现代应用数学手册

《现代应用数学手册》编委会

现代应用分析卷



清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

《现代应用数学手册》编委会

现代应用数学手册

现代应用分析卷





清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字158号

内 容 简 介

现代分析数学不仅在数学领域内占有非常重要的地位，而且在各自然科学和工程、技术科学中的应用越来越广泛. 本卷论述了现代分析数学各分支中的基本概念、术语、符号、性质和方法. 在编写上，注重背景，强调应用，突出常用的基本知识. 现代分析数学大多内容比较抽象，为使读者易于理解，书中适当地列举了一些例子. 本书适合高等院校各理、工专业的教师、本科生和研究生，以及广大科技工作者使用.

图书在版编目(CIP)数据

现代应用数学手册：现代应用分析卷/《现代应用数学手册》编委会编. —北京：清华大学出版社，1998

ISBN 7-302-03054-5

Ⅰ. 现… Ⅱ. 现… Ⅲ. 应用数学-手册 Ⅳ. 029-62

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第21432号

出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编100084）
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

印刷者：北京清华园胶印厂

发行者：新华书店总店北京科技发行所

开　本：850×1168 1/32　印张：22.25　字数：579千字

版　次：1998年11月第1版　1998年11月第1次印刷

书　号：ISBN 7-302-03054-5/O·198

印　数：0001～4000

定　价：36.00元

《现代应用数学手册》编辑委员会

现代应用分析卷

责任编委　陈景良

章次	编者	校者
1	陈景良	迟宗陶
2	韩云瑞	迟宗陶
3	陈景良	迟宗陶
4	韩云瑞	迟宗陶
5	韩云瑞	迟宗陶
6	陈景良	迟宗陶
7	姜启源	肖树铁
8	梁国珍	陈景良
9	关　治	迟宗陶
10	马振华	陈景良
11	李秀淳	梁国珍

序

随着计算机科学技术的飞速发展,人类正进入信息时代.

信息时代是应用数学大发展的时代.人类长期积累起来的知识体系,正面临着第3次数学化.数学思想,数学方法与数学模型随着计算机的广泛应用,日益渗透到各种行业中去.

当代,除了古典的数学理论(初等数学,微积分学,微分方程,复变函数等)早已得到广泛的应用外,一些比较抽象的现代数学理论(集合论、数理逻辑、范畴论、抽象代数、泛代数、代数几何、拓扑学、泛函分析等)以及一些新兴的数学理论(随机过程、时间序列、运筹学、最优化理论、有限元方法、模糊数学、混沌与分形等)也逐渐地成为社会生产、科学实验、工程技术及经济管理中不可缺少的工具,应用数学的适用范围正在迅速地扩大.

为了满足日益增长的社会需求,清华大学应用数学系《现代应用数学手册》编委会,组织编写了这套多卷集的手册.

本书读者是理、工、医、农、经管等各个领域中的广大工程技术人员、科研人员、大、中专院校的教师、学生、研究生及其他使用数学工具的实际工作者.其中有些内容对于中学生也是适用的.

编者力求使本书成为一套高质量的工具书,它有下列特点:

(1) **内容"新颖"** 本书力求做到内容现代化,除用现代观点介绍古典内容外,对已出现的新理论、新方法尽量优先选入.

(2) **突出"应用"** 本书在选材上突出数学理论的应用,以通俗易懂的方式着重介绍在现代科学技术等实际领域中应用广泛的数学理论和方法.

(3) **紧密"结合"计算机应用** 为了更有效地应用数学方法解

决各种实际问题，广大科技人员迫切要求数学方法与计算机应用相结合，提高工作效率. 为此，本书在结合计算机应用方面，给予特别的重视.

(4) **版面设计"合理"，便于迅速查阅** 为方便读者使用，本书采用了一套较为完善的索引体系. 除正文中章、节的编号沿用国际通行的十进制编号外，对于重要的定义、定理、例题、公式、图、表等均有编号. 读者可以从(1) 目录，(2) 中文—外文索引，(3) 外文—中文索引等三种途径，迅速找到所需资料. 此外，本书对载入的外国科学家人名，尽量采用"名从主人"的原则.

(5) **数学符号力求"统一"与国际化** 鉴于目前国内各种文献、书籍中使用的数学符号不够统一与国际化，增加了读者阅读时的困难. 本书除按国家标准 GB3102-93 外，兼用国际数学界权威著作《数学大百科辞典》(Encyclopedic Dictionary of Mathematics, EDM)中的符号为标准. 对于不在上述文献中的其他新符号，则选用较为流行者.

本手册各卷内容独立完整，便于个人读者与团体读者按需选购. 当前应用数学急剧发展，编委会在条件成熟的时候，还将增出新卷.

本书的编撰是与清华大学应用数学系领导，特别是萧树铁教授的热心支持，编辑委员会各位编委的通力协作，校内外的许多教师、科研工作者的大力支持分不开的，编者深致谢意.

在编辑出版过程中，还得到清华大学出版社的热情支持.

本书从编撰到出版，历尽艰辛，饮水思源，编者还要感谢本书的发起人，清华大学应用数学系陆璇教授，北京出版社李利军编辑及已故的北京出版社社长王政人先生.

最后，编者还要对夫人王华敏表示谢忱，没有她的深刻理解、热情支持与持久的帮助，本书也难以问世.

主编　马振华

1997 年于清华园

符 号 表

$\forall$	全称量词
$\exists$	存在量词
$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\subset$	包含于
$\not\subset$	不包含于
$\subsetneqq$	真包含于
$\cup$	并运算
$\cap$	交运算
$\setminus$	差运算
$X^c/C(X)$	集 X 的余集/集 X 的补集
$X-Y/X\setminus Y$	集 X 与集 Y 的差集
$X\times Y$	集 X 与集 Y 的笛卡尔积集
$X/\sim$	集 X 关于等价关系～的等价类组成的商集
$\rightarrow/\Rightarrow$	蕴涵 推断
$\leftrightarrow/\Leftrightarrow$	等价
$\{x\mid P(x)\}$	使性质 $P(x)$成立的全体 x 组成的集合
$\limsup A_n$	集合序列 A_n 的上极限
$\liminf A_n$	集合序列 A_n 的下极限
$\lim A_n$	集合序列 A_n 的极限
$\sup X$	实数集 X 的上确界
$\inf X$	实数集 X 的下确界
$X\sim Y$	集 X 对等于集 Y

$\overline{\overline{X}}/\vert X\vert$	集 X 的基数
$\prec$	偏序关系
$\aleph$	阿列夫
$\aleph_0$	阿列夫零
$C^n[a,b]$	$[a,b]$上连续 n 阶可导函数的全体
$\mathbf{N}$	自然数集(含数"0"在内)
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\hat{\mathbf{R}}$	扩充实数集
$\mathbf{C}$	复数集
$\mathbf{R}^n$	n 维实空间
$\mathbf{C}^n$	n 维复空间
$f: X\to Y$	f 是从集 X 到集 Y 内的映射
$f: x\mapsto y$	映射记号
$D(f)$	映射 f 的定义域
$R(f)$	映射 f 的值域
f^{-1}	映射 f 的逆映射
$f\vert X$	映射 f 在集 X 上的限制
$g\circ f$	映射 f 与 g 的复合映射
I_x/I	集 X 上的恒等映射
$m_*(E)$	$\mathbf{R}^n$ 上点集 E 的内测度
$m^*(E)$	$\mathbf{R}^n$ 上点集 E 的外测度
$f*g$	f 与 g 的卷积(褶积)
$\bigvee_a^b(f;T)$	f 在$[a,b]$上关于分划 T 的变差
$\bigvee_a^b(f)$	f 在$[a,b]$上的全变差
$\Vert\cdot\Vert$	范数

$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E}\lvert f(x)\rvert$	$\lvert f\rvert$在集 E 上的本性下界
$C_c(a,b)$	定义在(a,b)上具有紧支集的函数类
$\operatorname{supp}\varphi$	函数 φ 的支集
$(X,\mathscr{S},\mu)$	测度空间
E^n	n 维欧几里得空间
C^n	n 维酉空间
$\rho(\cdot,\cdot)$	距离
$(S;P;+,\cdot)$	线性空间(向量空间)
Span A	由集 A 生成的线性子空间
(S,ρ)	度量空间
diam (A)	集 A 的直径
$(X,\lVert\cdot\rVert)$	赋范线性空间
$(\cdot,\cdot)$	内积
$(X,(\cdot,\cdot))$	线性空间 X 上的内积空间
$\perp$	正交
$\oplus$	正交和
$\mathscr{L}(X,Y)$	由 X 到 Y 的有界线性算子空间
$\mathscr{L}(X)$	由 X 到 X 的有界线性算子空间
X^{**}	X 的二次共轭空间
$X^{*\cdots*}$	X 的 n 次共轭空间
T^*	T 的共轭算子
T'	T 的伴随算子
$U^{\perp}$	U 的直交补空间
ker T	算子 T 的核
coker T	算子 T 的余核
ind T	算子 T 的指数
tr A	算子 A 的迹

$r_\sigma(x)$	x 的谱半径
$\mathscr{D}(\Omega)$	开区域 Ω 上的检验函数空间
$\mathscr{D}'(\Omega)$	Ω 上的分布空间
$L_C(\Omega)/L^C(\Omega)$	Ω 上的局部可积函数空间
δ	Dirac 分布
$f\otimes g$	f 与 g 的直积
sgn	符号函数
l.i.m	平均收敛

目　　录

符号表

1　集合与映射 …… 1

1.1　集合及集合的运算 …… 1

1.1.1　集合的概念 …… 1

1.1.2　并集与交集 …… 3

1.1.3　差集与余集 …… 5

1.1.4　积集与投影 …… 7

1.2　映射 …… 8

1.2.1　映射与逆映射 …… 8

1.2.2　映射的图象 …… 14

1.2.3　映射的延拓与限制 …… 14

1.2.4　映射的复合 …… 15

1.2.5　集合的特征函数 …… 16

1.3　集合的基数 …… 16

1.3.1　对等与基数 …… 16

1.3.2　可列集 …… 19

1.3.3　连续点集的基数 …… 20

1.4　顺序关系及等价关系 …… 21

1.4.1　偏序与全序 …… 21

1.4.2　佐恩引理 …… 23

1.4.3　等价关系及商集 …… 24

1.5　实(数)直线上的点集 …… 24

1.5.1　一些基本概念与性质 …… 24

1.5.2　邻域、开集和闭集 …… 28

1.5.3　实(数)直线的完备性 …… 28

1.5.4 有界闭集的列紧性与紧性 …… 30
参考文献 …… 31
2 实变函数论 …… 32
2.1 引言 …… 32
2.1.1 实变函数论的产生 …… 32
2.1.2 建立勒贝格积分的方法 …… 33
2.2 测度论 …… 35
2.2.1 有界集合的内测度与外测度 …… 35
2.2.2 测度的性质 …… 37
2.3 可测函数 …… 39
2.4 勒贝格积分 …… 45
2.4.1 积分的定义与基本性质 …… 45
2.4.2 积分收敛定理 …… 47
2.4.3 富比尼定理 …… 51
2.5 有界变差函数与黎曼-斯蒂尔切斯积分 …… 53
2.5.1 单调函数与有界变差函数 …… 53
2.5.2 黎曼-斯蒂尔切斯积分 …… 56
2.6 绝对连续函数与微分 …… 58
2.7 空间 L^p …… 60
2.8 勒贝格积分的其它定义方法 …… 63
2.8.1 里斯方法 …… 63
2.8.2 基于完备化思想定义勒贝格积分的方法 …… 65
2.9 抽象测度 …… 68
2.9.1 环上的测度 …… 68
2.9.2 测度的扩张 …… 70
2.9.3 可测函数与积分 …… 71
2.9.4 勒贝格-斯蒂尔切斯积分 …… 73
3 空间结构与抽象空间 …… 75
3.1 集合与空间 …… 75
3.1.1 空间结构 …… 75
3.1.2 欧几里得空间 …… 77

3.1.3 酉空间 …… 80
3.2 线性运算 线性空间 …… 81
3.2.1 线性运算 …… 81
3.2.2 线性空间 …… 82
3.2.3 线性子空间 …… 83
3.2.4 线性相关与线性无关 …… 85
3.2.5 维数与基 …… 85
3.3 距离 度量空间 …… 88
3.3.1 距离 …… 88
3.3.2 度量空间 …… 89
3.3.3 开集与闭集 …… 90
3.3.4 聚点与闭包 …… 93
3.3.5 极限与收敛 …… 94
3.3.6 连续映射 …… 95
3.3.7 柯西序列与完备度量空间 …… 97
3.3.8 列紧性与紧性 …… 99
3.3.9 压缩映射与不动点定理 …… 102
3.4 范数 赋范线性空间 …… 103
3.4.1 范数和半范数 …… 103
3.4.2 赋范线性空间 …… 107
3.4.3 强收敛 …… 108
3.4.4 巴拿赫空间 …… 109
3.4.5 连续函数空间 …… 110
3.5 内积 内积空间 …… 112
3.5.1 内积 …… 112
3.5.2 内积空间 …… 113
3.5.3 希尔伯特空间 …… 115
3.5.4 正交与投影 …… 116
3.5.5 正交集 …… 119
3.6 拓扑 拓扑空间 …… 123
3.6.1 拓扑 …… 123

3.6.2 拓扑空间 …… 124
3.6.3 拓扑空间的基本概念与性质 …… 126
参考文献 …… 129
4 线性泛函分析 …… 131
4.1 引言 …… 131
4.2 线性拓扑空间 …… 132
4.2.1 基本概念 …… 132
4.2.2 局部凸空间 …… 134
4.2.3 弗雷歇空间 …… 135
4.3 有界线性算子 …… 137
4.3.1 定义与基本性质 …… 137
4.3.2 有界线性算子空间 …… 139
4.3.3 算子乘法与逆算子 …… 143
4.4 连续线性泛函 …… 144
4.4.1 基本概念与性质 …… 144
4.4.2 连续线性泛函的一般形式 …… 148
4.4.3 凸集分离定理 …… 151
4.5 有界线性算子的基本定理 …… 152
4.6 共轭空间与共轭算子 …… 155
4.6.1 弱收敛与弱*收敛 …… 155
4.6.2 自反巴拿赫空间 …… 157
4.6.3 共轭算子 …… 159
4.6.4 无界算子的伴随算子 …… 161
4.7 各类算子 …… 164
4.7.1 酉算子与正规算子 …… 164
4.7.2 自伴算子 …… 165
4.7.3 投影算子 …… 166
4.7.4 全连续线性算子 …… 168
4.7.5 弗雷德霍姆算子 …… 169
4.7.6 希尔伯特-施密特算子 …… 170
4.7.7 拉克斯-米尔格拉姆定理 …… 171

4.8 线性算子的谱……172
4.8.1 谱的概念与基本性质……172
4.8.2 自伴算子的谱……175
4.8.3 全连续算子的谱……179
4.9 算子半群……182
4.9.1 一致连续半群与强连续半群……182
4.9.2 压缩半群与耗散算子……185
4.10 巴拿赫代数……189
4.10.1 概念与例……189
4.10.2 预解集与谱……192
4.10.3 理想与同态……193
4.10.4 交换巴拿赫代数……194
参考文献……196
5 广义函数……197
5.1 引言……197
5.2 检验函数……199
5.3 广义函数……203
5.3.1 定义及例……203
5.3.2 分布的代数运算……206
5.3.3 分布的支集……208
5.3.4 分布序列的收敛……209
5.4 分布导数……212
5.5 一些重要的分布……215
5.6 分布的直积与卷积……223
5.6.1 分布的直积……223
5.6.2 分布的卷积……225
5.6.3 卷积的应用……227
5.7 缓增分布与傅里叶变换……228
5.7.1 速降检验函数……229
5.7.2 缓增分布……230
5.7.3 速降函数的傅里叶变换……232

5.7.4 缓增分布的傅里叶变换 …… 231
5.7.5 直积与卷积的傅里叶变换 …… 240
5.7.6 某些应用 …… 240
5.8 分布的拉普拉斯变换 …… 243
5.8.1 经典函数的拉普拉斯变换 …… 243
5.8.2 分布的拉普拉斯变换 …… 244
5.8.3 变换公式 …… 244
参考文献 …… 245
6 变分法与变分原理 …… 246
6.1 变分法的问题 …… 246
6.1.1 古典变分学问题 …… 246
6.1.2 变分法的内容与意义 …… 249
6.2 欧拉方程 …… 250
6.2.1 $\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 型不动边界问题 …… 250
6.2.2 $\int_a^b F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$ 型不动边界问题 …… 255
6.2.3 $\int_a^b F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x$ 型不动边界问题 …… 256
6.2.4 依赖多元函数的泛函 …… 257
6.2.5 可动边界问题 …… 259
6.2.6 条件极值问题 …… 264
6.3 变分问题的直接法 …… 267
6.3.1 欧拉有限差分法 …… 267
6.3.2 里茨法 …… 269
6.3.3 康托罗维奇法 …… 272
6.4 数学物理中的变分原理 …… 274
6.4.1 二次函数的极值 …… 274
6.4.2 能量法 …… 276
6.4.3 虚功原理 …… 280
6.4.4 广义解 …… 283
6.5 里茨-伽辽金方法 …… 287

6.5.1 变分原理常用的近似解法 …… 287
6.5.2 里茨法的应用及伽辽金法 …… 288
6.5.3 里茨-伽辽金法的收敛性 …… 292
6.5.4 里茨法在特征值计算中的应用 …… 295
参考文献 …… 301
7 数学模型 …… 302
7.1 数学模型概述 …… 302
7.1.1 建模的目的和步骤 …… 303
7.1.2 模型的分类 …… 304
7.1.3 系统辨识 …… 305
7.2 建立数学模型的方法 …… 307
7.2.1 初等分析 …… 307
7.2.2 初等概率 …… 310
7.2.3 量纲分析 …… 311
7.2.4 极值分析 …… 314
7.2.5 微分方程 …… 320
7.2.6 马尔可夫链分析 …… 323
7.2.7 冲量过程 …… 326
7.2.8 层次分析 …… 330
7.3 数学模型的应用 …… 335
7.3.1 人口 …… 336
7.3.2 经济 …… 339
7.3.3 社会 …… 342
7.3.4 交通 …… 345
7.3.5 医学 …… 348
7.3.6 生产 …… 350
7.3.7 生态 …… 352
7.3.8 体育 …… 354
8 不等式 …… 358
8.1 引言 …… 358
8.1.1 不等式的意义 …… 358

8.1.2 常用不等式的类型 …………………………………… 358

8.1.3 几个特点 …………………………………………… 359

8.2 几个基本不等式…………………………………………… 360

8.2.1 杨不等式 …………………………………………… 360

8.2.2 关于积分的平均值不等式 ………………………… 363

8.2.3 关于积分的赫尔德不等式 ………………………… 365

8.2.4 关于积分的闵可夫斯基不等式 …………………… 368

8.3 与凸函数单调函数有关的不等式………………………… 370

8.3.1 凸函数、单调函数与不等式……………………… 370

8.3.2 有关凸(凹)函数的一些不等式 ………………… 372

8.3.3 斯梯芬森不等式 …………………………………… 377

8.4 有关变分法的一些不等式………………………………… 378

8.4.1 变分法与不等式 …………………………………… 378

8.4.2 包含一阶导数的一类不等式 ……………………… 379

8.4.3 温廷杰不等式 ……………………………………… 380

8.4.4 包含二阶导数的一类不等式 ……………………… 381

8.4.5 其它不等式 ………………………………………… 382

8.5 与矩阵有关的一些不等式………………………………… 383

8.5.1 正定矩阵的一些不等式 …………………………… 383

8.5.2 有关特征值的一些不等式 ………………………… 388

8.5.3 正矩阵的几个不等式 ……………………………… 394

8.6 与微分算子有关的一些不等式…………………………… 396

8.6.1 一阶线性常微分算子 ……………………………… 396

8.6.2 二阶及高阶线性常微分算子 ……………………… 399

8.6.3 广义凸性 …………………………………………… 401

8.6.4 二阶线性偏微分算子 ……………………………… 404

8.6.5 几个定理 …………………………………………… 406

8.6.6 联系函数及其导数的不等式 ……………………… 408

8.6.7 离散情形 …………………………………………… 410

8.7 其它不等式………………………………………………… 412

8.7.1 从多线性型到积分的类似情形 …………………… 412

8.7.2 希尔伯特不等式及其推广和应用 …………………… 415
8.7.3 哈代不等式及其类似情形 ………………………… 420
8.7.4 $0<p<1$ 及两个参数的情形 ……………………… 424
8.7.5 重新排列 …………………………………………… 426
参考文献 ………………………………………………………… 433
9 特殊函数 ……………………………………………………… 434
9.1 引言 ……………………………………………………… 434
9.2 Γ函数B函数 ……………………………………………… 436
9.2.1 Γ函数的定义 ……………………………………… 436
9.2.2 Γ函数的性质 ……………………………………… 437
9.2.3 B函数 ……………………………………………… 438
9.3 超几何函数 ……………………………………………… 439
9.3.1 超几何级数和超几何函数 ………………………… 439
9.3.2 广义超几何函数 …………………………………… 443
9.3.3 合流超几何函数 …………………………………… 447
9.4 贝塞尔函数 ……………………………………………… 448
9.4.1 第一类贝塞尔函数的基本概念 …………………… 448
9.4.2 整数阶和半奇数阶的第一类贝塞尔函数 ………… 450
9.4.3 第二类和第三类贝塞尔函数 ……………………… 453
9.4.4 变型的贝塞尔函数 ………………………………… 454
9.4.5 几个图形 …………………………………………… 455
9.4.6 渐近展开式和零点 ………………………………… 456
9.4.7 傅里叶-贝塞尔展开 ……………………………… 458
9.4.8 应用举例 …………………………………………… 460
9.5 正交多项式 ……………………………………………… 463
9.5.1 正交多项式的基本概念 …………………………… 463
9.5.2 正交多项式的基本性质 …………………………… 464
9.5.3 雅可比多项式 ……………………………………… 466
9.5.4 切比雪夫多项式 …………………………………… 469
9.6 勒让德多项式及有关的函数 …………………………… 475
9.6.1 勒让德多项式的定义 ……………………………… 475

9.6.2 勒让德多项式的基本性质 …………………………… 478
9.6.3 第二类勒让德函数 …………………………………… 480
9.6.4 伴随勒让德函数 ……………………………………… 481
9.6.5 球面函数 ……………………………………………… 483
9.6.6 应用举例 ……………………………………………… 485
9.7 埃尔米特多项式…………………………………………… 486
9.8 拉盖尔多项式……………………………………………… 489
9.8.1 广义拉盖尔多项式 …………………………………… 489
9.8.2 拉盖尔多项式 ………………………………………… 493
参考文献 ………………………………………………………… 496
10 积分变换 …………………………………………………… 497
10.1 引言 ……………………………………………………… 497
10.2 积分变换 ………………………………………………… 497
10.2.1 定义 ………………………………………………… 497
10.2.2 若干重要的积分变换 ……………………………… 498
10.3 傅里叶变换 ……………………………………………… 499
10.3.1 傅里叶变换及其反演公式 ………………………… 499
10.3.2 傅里叶变换的性质 ………………………………… 500
10.3.3 傅里叶变换及其反演公式存在的条件 …………… 502
10.3.4 傅里叶余弦变换与傅里叶正弦变换 ……………… 504
10.3.5 傅里叶变换表 ……………………………………… 505
10.4 拉普拉斯变换 …………………………………………… 509
10.4.1 引言 ………………………………………………… 509
10.4.2 拉普拉斯变换及其反演公式 ……………………… 509
10.4.3 拉普拉斯变换的性质 ……………………………… 509
10.4.4 拉普拉斯变换及其反演公式存在的条件 ………… 512
10.4.5 拉普拉斯变换的主要公式表 ……………………… 513
10.4.6 拉普拉斯变换表 …………………………………… 516
10.5 梅林变换 ………………………………………………… 536
10.5.1 梅林变换及其反演公式 …………………………… 536
10.5.2 梅林变换的性质 …………………………………… 538

10.5.3 梅林变换与傅里叶变换的关系 …………………… 539
10.5.4 梅林变换的重要公式表 …………………… 540
10.5.5 梅林变换表 …………………… 541
10.6 汉开尔变换 …………………… 564
10.6.1 汉开尔变换及其反演公式 …………………… 564
10.6.2 汉开尔变换表 …………………… 564
10.6.3 汉开尔变换的推广 …………………… 566
10.7 斯蒂尔切斯变换及其反演公式 …………………… 567
10.8 魏尔斯特拉斯变换 …………………… 568
10.8.1 魏尔斯特拉斯变换及其反演公式 …………………… 568
10.8.2 魏尔斯特拉斯变换表 …………………… 568
10.9 勒让德变换及其反演公式 …………………… 569
10.10 希尔伯特变换及其反演公式 …………………… 569
10.11 一般积分变换及其反演公式 …………………… 570
10.11.1 康托洛维奇-列别捷夫变换 …………………… 570
10.11.2 梅涅尔-福克斯变换 …………………… 571
10.11.3 列别捷夫变换 …………………… 571
10.11.4 外姆普变换 …………………… 571
参考文献 …………………… 572
11 摄动方法 …………………… 573
11.1 基本概念 …………………… 573
11.1.1 引言 …………………… 573
11.1.2 阶符 …………………… 574
11.1.3 渐近展开 …………………… 576
11.1.4 无量纲化 …………………… 579
11.2 正则摄动法 …………………… 581
11.3 变形坐标法 …………………… 587
11.3.1 变形参数法 …………………… 588
11.3.2 变形坐标法 …………………… 589
11.3.3 重正化方法 …………………… 591
11.4 匹配法 …………………… 593

11.4.1 匹配法 …… 593
11.4.2 合成法 …… 600
11.5 多重尺度法 …… 604
11.5.1 多变量法(导数展开法) …… 605
11.5.2 双变量展开法 …… 615
11.5.3 推广的多重尺度法 …… 620
参考文献 …… 626
附录 …… 627
特殊函数表 …… 627
中文 外文索引 …… 638
外文 中文索引 …… 661
外国人名表 …… 685

1 集合与映射

1.1 集合及集合的运算

1.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个基础概念. 人们往往只能用"全体"、"整体"、"汇集"等类同义语描述"集",却难以用更简单的概念给予定义. 德国数学家康托(G. Cantor)在 19 世纪末叶创立了集论.

集合的概念可以这样来描述:由确定的相互区别的一些对象组成的整体称为**集合**(set),常用大写拉丁字母如 X 表示. 集合内的对象称为**元素**(element),常用小写拉丁字母如 x 表示. x 是属于集合 X 的元素,记作 $x\in X$;若 x 不属于 X,则记作 $x\notin X$. 这种对集合概念的描述仅仅是一种解释,并没有真正定义"集合"和"元素",因为没有定义什么是"整体"和"对象".

为了研究的方便,规定一个集合可以不包含任何元素,称之为**空集**(empty set),记作 $\varnothing$. 包含有限个元素的集合称为**有限集**(finite set). 包含无限个元素的集合称为**无限集**(infinite set).

元素相异和范围明确是集合概念中的两条最基本的属性. 例如,某班学生成一集合,有理数全体成一集合,因为它们的元素都可以相互区别,而且可以判明其范围. 如果只讲某班中个儿高的学生,或者只讲大的有理数,那么它们都不能成为一个集合,因为"个儿高"和"大"均无明确的界限.

为了明确集合 X 由哪些元素组成,常用列举法和描述法来表示 X.

列举法适合于有限集或元素可依某种次序排列的无限集,其

表示法是将元素写成一行并用花括号括起来.例如

$$A=\{a,b,c,d,e\},$$
$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}.$$

集 A 由 5 个不同的元素组成.集 X 则是由 1 个无穷序列组成,所以简写作$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

描述法适合于全体元素均具有某种特性的集合,其一般形式为

$$X=\{x\mid P(x)\},$$

其中 $P(\cdot)$是某个谓词,表示式指明集合 X 是使谓词 $P(x)$成立的全体 x 组成的.

例 1.1.1 自然数集 $\mathbf{N}$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,实数集 $\mathbf{R}$,复数集 $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{N}=\{n\mid n=1,2,\cdots\}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}=\{n\}_{n=1}^{\infty},$$
$$\mathbf{Z}=\{x\mid x=0\text{ 或 }x\in\mathbf{N}\text{ 或 }-x\in\mathbf{N}\}$$
$$=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\},$$
$$\mathbf{Q}=\left\{x=\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N},p\text{ 与 }q\text{ 既约}\right\},$$
$$\mathbf{R}=\{x\mid-\infty<x<\infty\},$$
$$\mathbf{C}=\{x=a+ib\mid a,b\in\mathbf{R},i=\sqrt{-1}\}.$$

例 1.1.2 n 维欧几里得空间 E^n 中点的全体所成之集记作 $\mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

特别,$\mathbf{R}^1=\mathbf{R}$.

例 1.1.3 关于变元 x 的次数不大于 n 的复系数多项式全体成一集合

$$P_n=\left\{\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\ \middle|\ a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{C}\right\}.$$

在集合论中,所有其它概念可由集合与元素的概念及关系

"$\in$"引出.

定义 1.1.4 如果集合 X 的元素都属于集合 Y,即 $x\in X\Rightarrow x\in Y$,则称 X 是 Y 的**子集**(subset),记作 $X\subset Y$ 或 $Y\supset X$,读作"X 包含在 Y 中"或"Y 包含 X". 集合 Y 不包含 X,记作 $X\not\subset Y$ 或 $Y\not\supset X$. 如果 $X\subset Y$ 但 $Y\not\subset X$,则称 X 是 Y 的**真子集**(proper subset). 如果 $X\subset Y$ 且 $Y\subset X$,则称集合 X 与集合 Y **相等**,记作 $X=Y$. 规定空集$\varnothing$是一切集的子集.

注意区分关系"$\in$"与"$\subset$",前者应用于元素与集合之间,后者应用于集合与集合之间. 例如,x 是集合 X 的元素,可利用"$\in$"表示成 $x\in X$;X 的单个元素 x 构成的集$\{x\}$与 X 本身的关系则表示成$\{x\}\subset X$.

由定义 1.1.4 立即推出关于集合的如下两条简单性质:

(1) $x\in X\Leftrightarrow\{x\}\subset X$;

(2) $X\subset Y,Y\subset Z\Rightarrow X\subset Z$;

定义 1.1.5 设 X 是一个集合,则以 X 的所有子集为元素构成一个集合,称为 X 的**幂集**(power set),记作 $\mathscr{P}(X)$.

显然,幂集有如下简单性质:

(1) $\varnothing\in\mathscr{P}(X),X\in\mathscr{P}(X)$;

(2) $x\in X\Leftrightarrow\{x\}\in\mathscr{P}(X)$;

(3) $Y\subset X\Leftrightarrow Y\in\mathscr{P}(X)$.

1.1.2 并集与交集

定义 1.1.6 设 X 与 Y 是两个集合,由属于 X 或 Y 的所有元素组成一个集合,称为 X 与 Y 的**并集**(union),记作 $X\cup Y$. 由既属于 X 又属于 Y 的所有元素组成一个集合,称为 X 与 Y 的**交集**(intersection),记作 $X\cap Y$.

通常,并集简称为并,交集简称为交. 集合 X 和 Y 的并与交,用描述法表示:

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \quad 或 \quad x \in Y\},$$
$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \quad 且 \quad x \in Y\}.$$

集合 X 和 Y 的并与交(用阴影表示)的示意图如图 1.1.

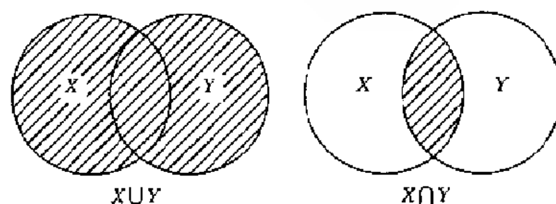


图 1.1

一般地，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 与 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 分别表示指标 λ 属于某指标集 Λ 的一族集合 X_λ 的并与交. 当 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ 或 $\Lambda = \mathbf{N}$(自然数集)时可以写成 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

由定义 1.1.6 立即推出下面的性质：

定理 1.1.7 设 X, Y, Z 是任意的集合，则成立

(1) 幂等律 $X \cup X = X$，$X \cap X = X$；

(2) 交换律 $X \cup Y = Y \cup X$，$X \cap Y = Y \cap X$；

(3) 结合律 $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$，
$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$；

(4) 分配律 $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$，
$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$；

(5) 吸收律 $(X \cup Y) \cap X = X$，$(X \cap Y) \cup X = X$.

需要指出，推证集合关系式有两种基本方法. 一种是分析集合包含的元素，这是最基本的方法；另一种是直接利用明显的或已经得出的集合之间的包含关系及等式. 在正式给出分析证明之前，可利用示意图从直观看关系式的正确性，有时能帮助寻找证明线索. 作为例子，下面给出定理 1.1.7 中分配律 $(X \cup Y) \cap Z$

$(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$的示意图(图1.2)及一个证明.

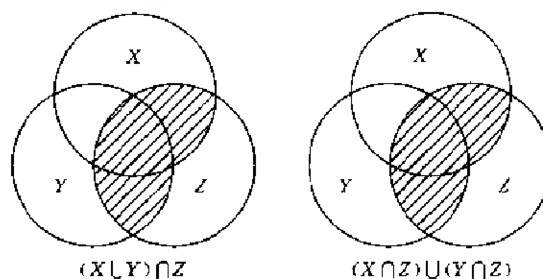


图 1.2

例 1.1.8 $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$的证明.

一方面,分析集合包含的元素,若$x\in(X\cup Y)\cap Z$,则$x\in Z$,且$x\in X\cup Y$即$x\in X$或$x\in Y$.当$x\in X$有$x\in X\cap Z$,当$x\in Y$有$x\in Y\cap Z$,故

$$x\in(X\cap Z)\cup(Y\cap Z).$$

由x的任意性及定义1.1.4,我们得到

$$(X\cup Y)\cap Z\subset(X\cap Z)\cup(Y\cap Z).$$

另一方面,利用明显的集合之间包含关系式

$$X\cup Y\supset X,X\cup Y\supset Y,$$

有

$$(X\cup Y)\cap Z\supset X\cap Z,(X\cup Y)\cap Z\supset Y\cap Z.$$

由此即得

$$(X\cup Y)\cap Z\supset(X\cap Z)\cup(Y\cap Z).$$

综合上述两个方面,最后得到

$$(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z).$$

1.1.3 差集与余集

定义 1.1.9 设X与Y是两个集合,由X中不属于Y的全体

元素所成之集称为 X 与 Y 的**差集**(difference set),记作 $X-Y$ 或 $X\backslash Y$. 即

$$X-Y=\{x\in X \mid x\notin Y\}.$$

如果 $Y\subset X$,则称差集 $X-Y$ 为 Y 关于 X 的**余集**或**补集**(complementary set),记作 $C_X(Y)$ 或 Y^c.

集合 X 与 Y 的差集和余集(用阴影表示)的示意图如图 1.3.

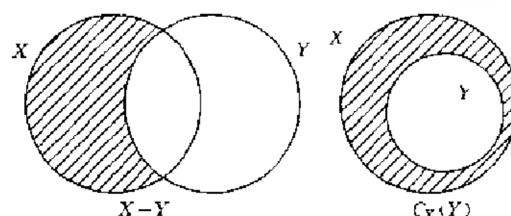


图 1.3

定理 1.1.10 下列基本性质成立:

(1) $X-X=\varnothing$, $X-\varnothing=X$;

(2) 若 $X\subset Y$,则 $X-Y=\varnothing$;

(3) $(X-Y)\cap Z=(X\cap Z)-(Y\cap Z)$;

(4) $(Z-X)-Y=Z-(X\cup Y)$;

(5) 若 $X\subset Z$,$Y\subset Z$,则 $X-Y=X\cap C_Z(Y)$;

(6) $X\cup Y=(X-Y)\cup(Y-X)\cup(X\cap Y)$;

(7) $C_X(C_X(Y))=Y$,$Y\cap C_X(Y)=\varnothing$;

(8) 若 $Y\subset X$,则 $Y\cup C_X(Y)=X$;

(9) $X-\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(X-X_\lambda)$;

(10) $X-\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(X-X_\lambda)$.

定理 1.1.10 中的(9)和(10)是联系并交关系的两个非常重要的恒等式,称为**德·摩根(De Morgan)**公式. 特别

$$C_Z(X\cup Y)=C_ZX\cap C_ZY,\ C_Z(X\cap Y)=C_ZX\cup C_ZY.$$

1.1.4 积集与投影

任意两个元素 x 与 y 配成一个有序的对 (x,y)，称为 x 与 y 的**序对**(ordered pair). 有序是指当 $x\neq y$ 时 $(x,y)\neq(y,x)$，而且

$$(x,y)=(x',y')\Leftrightarrow x=x',\text{且 } y=y'.$$

定义 1.1.11 设 X 与 Y 是两个集合，由 X 的元素与 Y 的元素配成的全体序对成为一集，称为 X 与 Y 的**积**或**积集**(product set)，记作 $X\times Y$，即

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}.$$

x 与 y 分别称为序对 (x,y) 在集合 X 上与集合 Y 上的**投影**(projection)，记作

$$pr_X(x,y)=x \quad \text{或} \quad pr_1(x,y)=x,$$
$$pr_Y(x,y)=y \quad \text{或} \quad pr_2(x,y)=y.$$

图 1.4 为积集与投影的示意图.

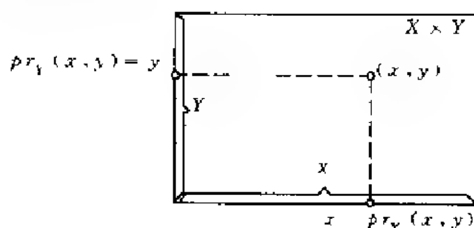


图 1.4

定理 1.1.12 下列命题成立:

(1) $X\times Y=\varnothing\Leftrightarrow X=\varnothing$ 或 $Y=\varnothing$;

(2) 若 $X\times Y=\varnothing$，则

$$\tilde{X}\times\tilde{Y}\subset X\times Y\Leftrightarrow\tilde{X}\subset X,\tilde{Y}\subset Y;$$

(3) $(X\times Y)\cup(\tilde{X}\times Y)=(X\cup\tilde{X})\times Y$;

(4) $(X\times Y)\cap(\tilde{X}\times\tilde{Y})=(X\cap\tilde{X})\times(Y\cap\tilde{Y})$;

(5) 设 $\tilde{X}\subset X,\tilde{Y}\subset Y$,则

$$C(\tilde{X}\times\tilde{Y})=[C(\tilde{X})\times Y]\cup[\tilde{X}\times C(\tilde{Y})]$$
$$=[X\times C(\tilde{Y})]\cup[C(\tilde{X})\times\tilde{Y}].$$

一般地,我们可以定义 n 个元素的**序组** $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 规定:

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$$
$$\Leftrightarrow x_1=x'_1,x_2=x'_2,\cdots,x_n=x'_n,$$

并且定义 n 个集合 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的**积集**为:

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in X_i,1\leqslant i\leqslant n\};$$

序组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的**投影**为:

$$pr_{X_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_i$$

或 $$pr_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

如果 $X_1=X_2=\cdots=X_n=X$,则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的积集简写成 X^n. 特别,当 $X=\mathbf{R}$ 是实数全体时,积集:

$$\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}_{n个},$$

就是例 1.1.2 给出的 n 维欧几里得空间 E^n 中点的全体. 若 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,则其第 i 个投影 x_i 就是点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在空间 $\mathbf{E}^n$ 中的第 i 个坐标. 如果每个 $X_i\subset\mathbf{R}$ 是一区间 $(1\leqslant i\leqslant n)$,则积集 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是空间 $\mathbf{E}^n$ 中的 n 维长方体.

1.2 映射

1.2.1 映射与逆映射

定义 1.2.1 设 X 与 Y 是两个非空集合,如果存在一个对应规则 f,使得对于任一元素 $x\in X$,有唯一的元素 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 是从 X 到 Y 内的**映射**(mapping),记作

$$f:X\to Y.$$

元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的**象**(image),记作 $y=f(x)$ 或 $y=$

fx. 对于任一固定的 $y\in Y$, 集合 X 中在 f 下以 y 为象的元素组成的集合(可以是空集)

$$\{x \in X \mid f(x) = y\}$$

称为 y 在映射 f 下的**原象**或**逆象**(inverse image). 集合 X 称为映射 f 的**定义域**(domain), 记作 $D(f)$. 集合

$$f(X) \triangleq \{f(x) \mid x \in X\}$$

由 X 中所有元素的象组成, 称为映射 f 的**值域**(range), 也记作 $R(f)$. 一般 $f(X)\subset Y$, $f(X)$可以是 Y 的真子集. 如果 $f(X)=Y$, 则称 f 是从 X 到 Y 上的映射或从 X 到 Y 的**满映射**(surjection), 或简称 f 是**映上的**.

注意"从 X 到 Y 内的映射(mapping of X into Y)"与"从 X 到 Y 上的映射(mapping of X onto Y)"两种说法之间的差别, 前者值域可能是 Y 的一个真子集, 也可能是 Y, 后者值域就是 Y. 见图 1.5.

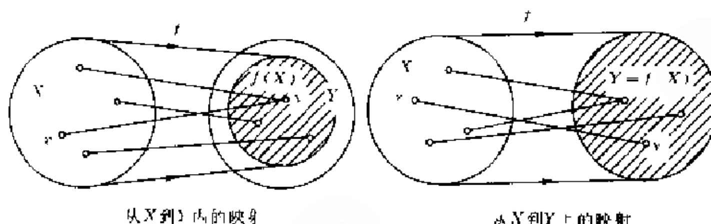


图 1.5

对于给定的映射 $f: X\to Y$, 为了指明对应的元素, 也常用记号

$$f: x \mapsto y.$$

这时定义域 $D(f)$ 需另行给出. 例如

$$f: x \mapsto x^2, \quad x \in [0,1],$$

表示 f 是这样一个映射, 每个 $x\in[0,1]$ 在 f 下对应的象 $f(x)$

x^2, $D(f)=[0,1]$.

映射是函数概念的推广.

$$f:[a,b]\to\mathbf{R}$$

是定义在区间$[a,b]$上的一元实值函数;

$$f:\Omega\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$$

是定义在n维域Ω上的n元实值函数.

下面引进一类常用的一元函数的集合,记作$C^n(a,b)$,$n=0$,1,2,…. 记号$C^n(a,b)$表示在开区间(a,b)上具有连续n阶导数的复值函数集,即

$$C^n(a,b)=\{f\mid f:(a,b)\to\mathbf{C},f^{(n)}\text{ 在}(a,b)\text{ 上连续}\},$$

特别,当$n=0$时,$C(a,b)$是(a,b)上连续复值函数全体,简记作$\mathbf{C}(a,b)$. 但经常限定考虑实值函数,在(a,b)上具有连续n阶导数的实值函数全体仍用记号$C^n(a,b)$表示. 对于闭区间有类似的记号$C^n[a,b]$.

定义 1.2.2 设映射$f:X\to Y$与$g:X\to Y$满足

$$f(x)=g(x),\quad\forall x\in X,$$

则称f与g**相等**,记作$f=g$. 如果$f:X\to Y$有

$$f(x)=y_0,\quad\forall x\in X,$$

这里$y_0\in Y$是一个固定元素,则称f为**常值映射**(constant mapping). 若$X=Y$,且有

$$f(x)=x,\quad\forall x\in X,$$

则称f为X的**恒等映射**(identity mapping),通常记作I_X或I.

定义 1.2.3 如果映射$f:X\to Y$对于任意的$x,x'\in X$成立

$$x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x'),$$

或等价地

$$f(x)=f(x')\Rightarrow x=x',$$

则称f是从X到Y的**一对一的映射**或**1-1映射**(injection). 如果$f:X\to Y$是1-1的满映射,则称f为X与Y的一一对应(one to-

one correspondence)或从 X 到 Y 上的 **1-1 映射**，或简称 f 为**双映射**(bijection). 示意如图 1.6.

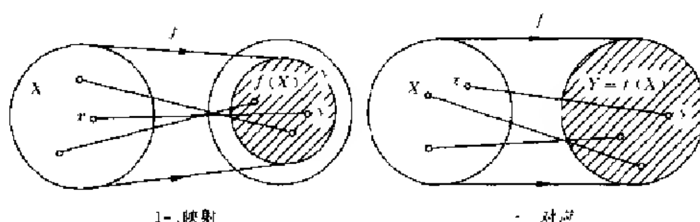


图 1.6

不难看出，1-1 映射与一一对应的共同特征是定义域中不同元素对应着不同的象，不同之处是 1-1 映射可以不是满映射，而一一对应必须是满映射. 换句话说，若 $f: X\to Y$ 是 1-1 映射，则值域 $R(f)$ 可能是 Y 的真子集，对每个 $y\in R(f)$，有唯一的 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$；若 $f: X\to Y$ 是一一对应，则值域 $R(f)=Y$，对每个 $y\in Y$，有唯一的 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$.

例 1.2.4 (1) 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x$，$f$ 不是满映射；设 $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$，$g(x)=\sin x$，g 是满映射.

(2) 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=e^x$，$f$ 是 1-1 映射；设 $g:\mathbf{R}\to(0,\infty)$，$g(x)=e^x$，$g$ 是一一对应.

(3) 定义实值连续函数集 $C[a,b]$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射

$$f:\varphi\mapsto\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad \varphi\in C[a,b],$$

这是一个满映射但不是 1-1 映射.

(4) 设 $\varphi\in C^1[a,b]$，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi\in C[a,b]$，因此 $f:\varphi\mapsto\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi$ 是 $C^1[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 上的映射，显然是满的但不是 1-1 的.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，则线性替换

$$f: x \mapsto y = Ax$$

确定 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个映射. 当 $\det A \neq 0$ 时, f 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个一一对应.

定义 1.2.5 若 $f: X \to Y$ 是一一对应, 即对每个 $y \in Y$ 有唯一的 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$, 则由 f 可以定义一个映射 $f^{-1}: Y \to X$, $f^{-1}(y) = x$ 当且仅当 $y = f(x)$. f^{-1} 称为 f 的**逆映射**(inverse mapping). 逆映射是反函数概念的推广.

例 1.2.6 考虑例 1.2.4 的(2)中的 g 及(5)中的 f.

g 的逆映射为

$$g^{-1}: (0, \infty) \to \mathbf{R}, \quad g^{-1}(x) = \ln x.$$

当 $\det A \neq 0$ 时, f 的逆映射为

$$f^{-1}: x \mapsto y = A^{-1}x.$$

更一般地, 对于给定的映射 $f: X \to Y$, 可以定义 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 与 Y 的幂集 $\mathscr{P}(Y)$ 之间的映射(象)与逆映射(逆象). 这时 f 是否一一对应并不重要.

定义 1.2.7 设 $f: X \to Y$ 是任一给定的映射, 对每个 $A \in \mathscr{P}(X)$ 令

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in A\},$$

集 $f(A) \in \mathscr{P}(Y)$ 称为集 A 在 f 下的象; 对每个 $B \in \mathscr{P}(Y)$ 令

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\},$$

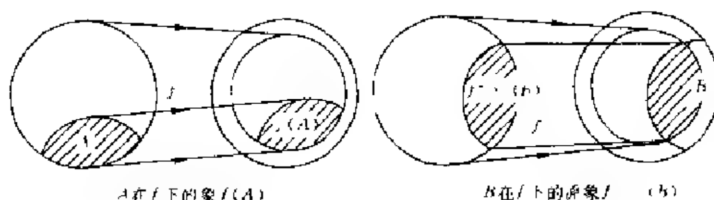
集 $f^{-1}(B) \in \mathscr{P}(X)$ 称为集 B 在 f 下的**原象**或**逆象**. 于是 $f: X \to Y$ 导出映射

$$f: \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y), \quad f^{-1}: \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X).$$

示意如图 1.7.

应当注意, 定义 1.2.7 中也采用了符号 f^{-1}, 但它一般不是 f 的逆映射.

例 1.2.8 设 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 3, 4\}$, 映射



A在 f 下的象 $f(A)$　　　　B在 f 下的原象 $f^{-1}(B)$

图 1.7

$$f: X \to Y,\ f(x) = x^2,$$

则

$\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, X\}$;

$\mathscr{P}(Y) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{3,4\}, Y\}$;

$f(\varnothing) = \varnothing, f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{1\}, f(\{2\}) = \{f(2)\} = \{4\}$;

$f(X) = \{f(1), f(2)\} = \{1,4\} \in \mathscr{P}(Y)$;

$f^{-1}(\varnothing) = f^{-1}(\{3\}) = \varnothing, f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{1,3\}) = \{1\}$;

$f^{-1}(\{4\}) = f^{-1}(\{3,4\}) = \{2\}$,

$f^{-1}(\{1,4\}) = f^{-1}(Y) = X \in \mathscr{P}(X)$.

定理 1.2.9　设 $f: X \to Y$ 是任一给定的映射，$A_1, A_2 \in \mathscr{P}(X)$，$B_1, B_2 \in \mathscr{P}(Y)$，则如下性质成立：

(1) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;

(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

(3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;

(4) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

(5) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

(6) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

(7) $B_1 \supset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$;

(8) $f(f^{-1}(B_1)) = B_1 \cap f(X)$;

(9) $f^{-1}(f(A_1)) \supset A_1$.

1.2.2 映射的图象

定义 1.2.10 设有映射 $f: X\to Y$,则对每一个元素 $x\in X$ 有相应的元素 $f(x)\in Y$,序对 $(x,f(x))\in X\times Y$,全体序对组成一个集合

$$G(f)=\{(x,f(x))\mid x\in X\}.$$

$G(f)$是积集 $X\times Y$ 的一个子集,称为 f 的**图象**(graph).

映射 $f: X\to Y$ 的图象 $G(f)$的示意图如图 1.8.

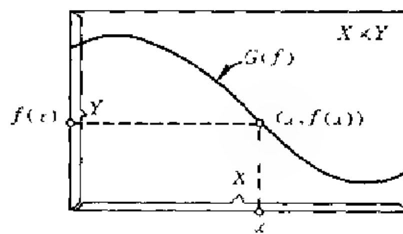


图 1.8

当 X 与 Y 均为实数集时,$f: X\to Y$ 的图象 $G(f)$就是通常函数图形上点的全体所成之集合.

定义 1.2.10 表明,任一映射 $f: X\to Y$ 有一个图象 $G(f)\subset X\times Y$,其特征性质是对每个 $x\in X$,存在着唯一的元素$(x,y)\in G(f)$,其中 $y=f(x)$. 反之,如果集合 $E\subset X\times Y$ 具有如上特征性质,即对每个 $x\in X$,存在着唯一的元素$(x,y)\in E$,则 E 实际上定义了一个映射 $f: X\to Y$, $f(x)=y$,且 $E=G(f)$. 由此可见,映射的概念也可从具有所述特征性质的 $X\times Y$ 的子集 E 引出.

1.2.3 映射的延拓与限制

定义 1.2.11 设有映射 $f: X\to Y$, $g:\tilde{X}\to Y$,而且有 $\tilde{X}\subset X$,如果

$$f(x) = g(x),\ \forall x \in \tilde{X}$$

成立，则称 f 为 g 在 X 上的**延拓**或**扩张**(extension)，称 g 为 f 在 $\tilde{X}$ 上的**限制**(restriction)，记作 $g = f|\tilde{X}$.

从定义 1.2.11 看出，若 $g = f|\tilde{X}$，则有

$$G(g) = G(f) \cap (\tilde{X} \times Y).$$

这里 $G(g)$ 与 $G(f)$ 分别是 g 与 f 的图象，$Y \supset g(\tilde{X})$.

例 1.2.12 设 $f(x) = |\sin x|, -\infty < x < \infty, g(x) = \sin x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$，则 f 是 g 在 $(-\infty,\infty)$ 上的延拓，g 是 f 在 $[0,\pi]$ 上的限制，$g = f|[0,\pi]$.

例 1.2.13 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}, x \neq 1, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$，则当 $|x|<1$ 时 $f(x) = g(x)$，因此 f 是 g 的延拓，且 $g = f|(-1,1)$.

1.2.4 映射的复合

定义 1.2.14 设有映射 $f: X \to Y, g: Y \to Z$，则由 f 与 g 确定一个新的映射 $h: X \to Z$,

$$h(x) = g(f(x)),\ \forall x \in X.$$

h 称为 f 与 g 的**复合映射**(composite mapping)，记作 $h = g \circ f$.

复合映射 $g \circ f$ 示意图如图 1.9.

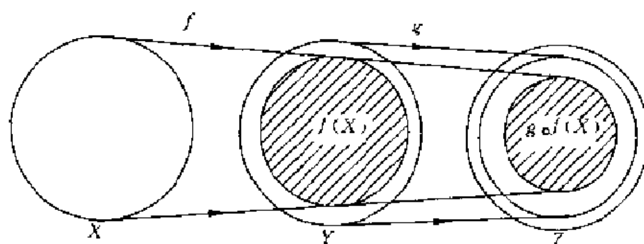


图 1.9

定理 1.2.15 复合映射有下述两条简单性质：

(1) 若 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$，$h: Z\to W$，则 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

(2) 设 $f: X\to Y$ 是一一对应，则

$$f^{-1}\circ f=I_X,\ f\circ f^{-1}=I_Y$$

这里 I_X 与 I_Y 分别是 X 的与 Y 的恒等映射.

1.2.5 集合的特征函数

定义 1.2.16 设 $A\in\mathscr{P}(X)$，具有如下性质的映射 $\chi_A: X\to\{0,1\}$ 称为集合 A 的**特征函数**(characteristic function)：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

定理 1.2.17 集合与特征函数之间有以下几个基本关系：

(1) $A=X\Leftrightarrow\chi_A(x)=1$；

$A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(x)=0$；

(2) $A\subset B\in\mathscr{P}(X)\Leftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$；

(3) $A=B\in\mathscr{P}(X)\Leftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x),\forall\ x\in X$；

(4) 设 $A_\lambda\in\mathscr{P}(X)$，$\lambda\in\Lambda$，$\Lambda$ 是某一指标集.

令

$$A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda,\quad B=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda.$$

则成立

$$\chi_A(x)=\max_{\lambda\in\Lambda}\chi_{A_\lambda}(x),\quad \chi_B(x)=\min_{\lambda\in\Lambda}\chi_{A_\lambda}(x)$$

定理 1.2.17 中的(3)表明，X 的任一子集 A 完全由它的特征函数所确定.

1.3 集合的基数

1.3.1 对等与基数

集合的基数也称集合的势，用以刻画集合中元素的多少，是集

合论中的一个重要概念. 对于有限集来说, 自然可以用元素的个数来定义基数, 但是对无限集不能说元素的个数. 因此, 通常是选取适当的"尺度"(有限集选取一列有限集为"尺度", 无限集则选取某些无限集为"尺度"), 然后利用一一对应定义基数, 即给出集合中元素多少的一种量度.

设 $M_n=\{1,2,\cdots,n\}$, 是前 n 个自然数组成的集合. 我们可以用有限集序列

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$$

作为有限集的"尺度". 若 X 是一个有限集, 则 X 必与某个 M_{n_0} 一一对应, n_0 就是 X 中元素多少的量度(即 X 中元素的个数).

问题在于给出量度无限集元素多少的恰当的"尺度".

定义 1.3.1 如果集合 X 与集合 Y 存在一个一一对应 $f: X \to Y$, 则称 X **对等于**(equipotent to)Y, 记作 $X \sim Y$.

对于有限集, 从定义 1.3.1 可以推出下述结论:

(1) 有限集不能与其真子集对等.

(2) 有限集之间对等的充分必要条件是元素个数相等.

下面的例子和定理表明无限集与有限集存在着本质上的差别.

例 1.3.2 以下三个集合相互对等:

自然数集 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$;

奇数集 $X=\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$;

偶数集 $Y=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$.

因为存在一一对应

$$f: \mathbf{N} \to X,\quad f(n)=2n-1,\quad \forall n \in \mathbf{N};$$
$$g: \mathbf{N} \to Y,\quad g(n)=2n,\quad \forall n \in \mathbf{N};$$
$$h: X \to Y,\quad h(x)=x+1,\quad \forall x \in X.$$

所以 $\mathbf{N} \sim X \sim Y$.

可见, 尽管奇数集和偶数集都是自然数集的真子集, 但它们都

与自然数集对等(存在一一对应).因此奇数,偶数,自然数三者"一样多".

定理 1.3.3 每个无限集必有与其对等的真子集.换句话说,不存在与自身对等的真子集的集合必是有限集.

不难证明,对等关系"$\sim$"有如下三个基本性质:

(1) **自反性** $X\sim X$;

(2) **对称性** 若 $X\sim Y$,则 $Y\sim X$;

(3) **传递性** 若 $X\sim Y$,$Y\sim Z$,则 $X\sim Z$.

定理 1.3.4 (伯恩斯坦(Bernstein)定理) 若集合 X 有子集 A,集合 Y 有子集 B,使得 $X\sim B$,$Y\sim A$,则 $X\sim Y$.

这个定理可用于判断两个集合对等.

有了对等的概念,可对集合进行分类,彼此对等的集合组成一类,彼此不对等的集合分属不同的类.这样,便能在有限集"元素个数"这一概念基础上进行推广.

定义 1.3.5 彼此对等的集合,称它们具有相同的**基数**(cardinal number)或**势**(potency).彼此不对等的集合,称它们具有不同的基数.集合 X 的基数记作 $\overline{\overline{X}}$.$X\sim Y$ 便记 $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}$.空集的基数为零.有限集的基数是元素个数.

引入基数的概念是为了研究无限集的元素的多少.但是无限集的基数已不是具体的自然数(空集和有限集的基数是非负整数),需要用一些特殊的记号来表示,但为了区别元素的多少,基数之间仍应有大小关系.

定义 1.3.6 如果集合 X 对等于集合 Y 的某个子集,但 X 不对等于 Y,则称 X 的基数小于 Y 的基数,记作 $\overline{\overline{X}}<\overline{\overline{Y}}$ 或 $\overline{\overline{Y}}>\overline{\overline{X}}$.

定义 1.3.5 并未给出无限集的基数,这是一个复杂的问题.但是,确实存在基数不相同的无限集.而且可以证明,不存在基数最大的集合.因此有无穷多种基数大小不同的无限集.

下面仅讨论两类常用的无限集：一类是与自然数集具有相同基数的所有无限集；另一类是与区间$[0,1]$具有相同基数的所有无限集.

1.3.2 可列集

定义 1.3.7 与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等(或说具有相同基数)的集合称为**可列集**或**可数集**(denumerable set). 可列集的基数记作$\aleph_0$，读作“阿列夫零”.

显然，任何无限集必含有可列子集，因此可列集是最“小”的无限集. 若 X 是一可列集，则存在一一对应 $f: \mathbf{N} \to X$，令

$$x_n = f(n), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

因而 X 中的每个元素可以按一种确定的编号加以排列：

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots.$$

这就是说，每一个可列集对应着一个无穷序列.

为了叙述方便，我们把有限或可列的集合称为**至多可列集**.

定理 1.3.8 可列集有下列基本性质：

(1) 可列集的任何子集是至多可列集.

(2) 有限个或可列个至多可列集的并集是至多可列集.

(3) 若 X 与 Y 是可列集，则积集 $X \times Y$ 也是可列的.

例 1.3.9 依定理 1.3.8，下述集合均为可列集：

(1) 整数全体所成之集 $\mathbf{Z}$. 因为它可以表成

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{x \mid -x \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}.$$

(2) 平面上格子点全体所成之集

$$\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(p,q) \mid p,q \in \mathbf{Z}\}.$$

在直角坐标系下，平面上两坐标 x 与 y 均为整数的点(x,y)称为**格子点**.

(3) 有理数集 $\mathbf{Q}$. 因为每个有理数 r 可表成唯一的既约分数

$$r = \frac{p}{q},\ p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N}$$

它对应着$(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$. 因此 $\mathbf{Q}$ 对应着 $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ 的一个无限子集，而 $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ 是可列的.

(4) 整系数多项式全体所成之集. 对于固定的自然数 n，次数 $\leqslant n$ 的整系数多项式的全体对等于积集 $\mathbf{Z}^n = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}$.

(5) 代数数全体所成之集. 整系数多项式的实根称为**代数数**(algebraic number). 每个 n 次多项式至多有 n 个实根.

根据对等关系的对称性和传递性，任何两个可列集之间必存在着一一对应的映射. 在上述讨论中，"可列"的说法可改用"基数为 $\aleph_0$"的说法.

定理 1.3.10 若 X 是无限集，Y 是有限集或可列集，则 $\overline{\overline{X \cup Y}} = \overline{\overline{X}}$.

这个定理是说，在一个无限集内添加有限个或可列个元素，不会改变无限集的基数.

1.3.3 连续点集的基数

并非无限集都是可列集.

定理 1.3.11 区间$[0,1]$是一个不可列集.

这个定理有不同证法，一般都用反证法. 由这个定理引出如下定义.

定义 1.3.12 区间$[0,1]$的基数称为**连续点集的基数**(cardinal number of continuous point set)，记作 $\aleph$，读作阿列夫.

依定义 1.3.6 有 $0 < n < \aleph_0 < \aleph$，其中 n 是任一自然数，它是具有 n 个元素的有限集的基数. 由于无限集必含有可列集，因此在无限集的基数中，以 $\aleph_0$ 为最小.

定理 1.3.13 下列集合的基数均为 $\aleph$：

(1) 实数全体 $\mathbf{R}$.

(2) 任意区间 (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$.

(3) 无理数全体所成之集.

(4) 超越数全体所成之集. 非代数数的实数称为**超越数**(transcendental number).

(5) 实数列全体所成之集,即

$$\{x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbf{R}, 1 \leqslant n < \infty\}.$$

(6) 集合 $\mathbf{R}^n$.

(7) 集合 $C[a,b]$.

(8) 由两个不同元素(如 0 与 1 两个数)组成的无穷序列的全体.

(9) 任一可列集的子集全体.

下面的定理表明存在基数大于 $\aleph$ 的集合,而且不存在基数最大的集合.

定理 1.3.14 设 X 是任一集合,则 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$(即 X 的子集全体)的基数大于 X 的基数,即有 $\overline{\overline{\mathscr{P}(X)}} > \overline{\overline{X}}$.

1.4 顺序关系及等价关系

1.4.1 偏序与全序

实数全体有大小顺序. 自然数全体 $\mathbf{N}$ 可以从小到大加以排列:1,2,…,n,…. 但是只讲"大小顺序"并不够用,例如有理数全体 $\mathbf{Q}$ 可列,见例 1.3.9 中的(3),即 $\mathbf{Q}$ 的元素可按(由 $\mathbf{Q}$ 与 $\mathbf{N}$ 的一一对应确定的)某种顺序加以排列,而此种顺序决非"大小顺序",因为任意两个有理数之间有无穷多个有理数.

下面建立一般的顺序概念.

定义 1.4.1 设集合 $X \neq \varnothing$,如果对 X 的某些元素之间规定

了一个关系，记作$\prec$，满足下列条件：

(1) 自反性：$x \prec x$，$\forall x \in X$；

(2) 反对称性：$x, y \in X$ 且 $x \prec y$，$y \prec x \Rightarrow x = y$；

(3) 传递性：$x, y, z \in X$ 且 $x \prec y$，$y \prec z \Rightarrow x \prec z$；

则称关系$\prec$是集合 X 上的一个**偏序**(partial ordering)，称 X 是具有偏序$\prec$的**偏序集**(partially ordered set)。有时也把偏序集记作$(X, \prec)$。设 $M \subset X$，如果对任何 $x, y \in M$，或者 $x \prec y$，或者 $y \prec x$，即按照偏序$\prec$，M 中任意两个元素之间都能比较，则称$\prec$是 M 上的一个**全序**(total ordering)，称 M 是 X 的**全序子集**(totally ordered subset)。特别，当 $M = X$ 时，称 X 是**全序集**(totally ordered set)。

显然，偏序集必有全序子集。按照偏序$\prec$，偏序集 X 的任意两个元素之间不一定都能比较，都能比较时 X 便是全序集。因此，全序集也是偏序集，但偏序集可以不是全序集。

"$x \prec y$"可以读作"x 在 y 前"或"y 在 x 后"。

例 1.4.2 (1) 设 X 是以集合为元素的集合，则集合的包含关系$\subset$是 X 上的一个偏序，它一般不是 X 上的全序。

(2) 通常的不大于关系$\leqslant$是实数集 $\mathbf{R}$ 上的"自然的"全序。

(3) 在 n 维点集 $\mathbf{R}^n$ 上规定：

$$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

这里 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$。关系$\prec$是 $\mathbf{R}^n$ 上的偏序而非全序。

(4) 在自然数集 $\mathbf{N}$ 上规定：

$$x, y \in \mathbf{N},\ x \prec y \Leftrightarrow y \text{ 是 } x \text{ 的整数倍}.$$

关系$\prec$是 $\mathbf{N}$ 上的偏序而非全序。

偏序和全序概念是我们所熟悉的实数大小顺序概念的一种推广。在可能的情况下，可以在一些集合中规定各种偏序或全序，而且可以把实(数)直线上点集的最大值与最小值，以及上界与下界

的概念，分别推广于偏序集及其子集.

定义 1.4.3 设 X 是偏序集，偏序为 $<$. 如果存在 $a\in X$，使得任何 $x\neq a$，$x\in X$，都不能使 $a<x$ 成立，则称 a 是 X 的**极大元**(maximum element). 如果存在 $b\in X$，使得任何 $x\neq b$，$x\in X$，都不能成立 $x<b$，则称 b 是 X 的**极小元**(minimum element). 设 $M\subset X$. 如果存在 $\alpha\in X$，能使得 $x<\alpha$，$\forall x\in M$，则称 α 是 X 的子集 M 的一个**上界**(upper bound). 如果存在 $\beta\in X$ 使得 $\beta<x$，$\forall x\in M$，则称 β 是 X 的子集 M 的一个**下界**(lower bound).

注意，并非每个偏序集都有极大元或极小元，偏序集的每个子集也不一定都有上界或下界. 当偏序集 X 不是全序集时，如果 X 有极大元 a 或极小元 b，那末并不意味着 $x<a$，$\forall x\in X$ 或 $b<x$，$\forall x\in X$，因为按照偏序 $<$，X 中可能存在与 a 或 b 不可比较的元素.

1.4.2 佐恩引理

引理 1.4.4(佐恩(Zorn)引理) 设 X 是一个偏序集. 如果 X 的每个全序子集都有上界(下界)，那末 X 必有一个极大元(极小元).

从直观上来说，佐恩引理并非显然. 读者可以通过一些浅显的例子(如实数直线上的点集——闭区间和开区间等)来了解它. 佐恩引理是研究"无限情形"的一种推理工具，一些数学分支中的某些重要结果的证明要用到这个引理.

与佐恩引理等价的一个公理称为策墨洛(Zermelo)选择公理.

公理 1.4.5 设 $\mathscr{A}=\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ 是一族集合，其中每个 $A_\lambda\neq\varnothing$，则存在集合 $S\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，使得 S 与 $\mathscr{A}$ 中每个集合 A_λ 的交是单元素集 $S\cap A_\lambda=\{a_\lambda\}$，即 S 是由在每个 A_λ 中选取唯一的一个元素而组成的集合.

1.4.3 等价关系及商集

定义 1.4.6 设 X 是一个集合，如果对 X 的元素之间规定了一个关系，记作~，满足下列条件：

(1) 自反性：$x\sim x, \forall x\in X$；

(2) 对称性：$x\sim y\Rightarrow y\sim x$；

(3) 传递性：$x\sim y, y\sim z\Rightarrow x\sim z$，

则称关系~是集合 X 上的一个**等价关系**(equivalence relation).

例 1.4.7 (1) 设 X 是以集合为元素的集合，则集合的对等关系(定义 1.3.1)是 X 上的一个等价关系.

(2) 在实数全体 $\mathbf{R}$ 中，当 $x-y=2k\pi$(k 是任何整数)时规定 $x\sim y$，这是 $\mathbf{R}$ 的一个等价关系.

(3) 在 $\mathbf{R}^2$ 中规定 $(x,y)\sim(x,y')$，即平面上横坐标相同的点之间具有关系~，这是 $\mathbf{R}^2$ 的一个等价关系.

定义 1.4.8 设集合 X 具有等价关系~. 对每个元素 $x\in X$，令

$$A_x=\{y\in X \mid y\sim x\}.$$

集合 A_x 是与 x 等价的元素全体，称为 X 的一个**等价类**(equivalence class). X 的等价类的全体，即 $\{A_x \mid x\in X\}$，称为 X 由关系~导出的**商集**(quotient set)，记作 $X/\sim$.

显然，对于不同的元素 $x,x'\in X$，等价类 A_x 和 $A_{x'}$ 或者相同或者互不相交. X 的商集 $X/\sim$ 就是互不相交的等价类的全体，而且它们的并集就是 X.

1.5 实(数)直线上的点集

1.5.1 一些基本概念与性质

任何两个不同的实数 α 与 β，必有 $\alpha<\beta$ 或 $\beta<\alpha$. 任何两个实

数的和、差、积、商(当除数不为零)仍为实数. 因此，实数全体 **R** 是一个有大小顺序的数域，可简称为有序域(ordered field).

为了刻画实数之间"距离"的远近，并引出极限与收敛等概念，首先建立绝对值的概念. 我们可以用映射描述绝对值概念.

定义 1.5.1　绝对值(absolute value)是一个从 **R** 到区间 $[0,+\infty)$ 的映射，记作 $|\cdot|: \mathbf{R}\to[0,+\infty)$,

$$|x| = \max\{x, -x\}, \qquad \forall x\in \mathbf{R}.$$

$|x|$ 即 x 与 0 的"距离"，$|x-y|$ $(x,y\in\mathbf{R})$ 就是 x 与 y 的"距离". 由绝对值定义立即推出：

(1) $|0|=0$;

(2) $|x| = \begin{cases} x, & x>0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ $\forall x\in\mathbf{R}, x\neq 0$;

(3) $|x+y| \leqslant |x| + |y|, \forall x,y\in\mathbf{R}$;

(4) $|xy|=|x||y|, \forall x,y\in\mathbf{R}$.

有序域 **R** 一一对应于实数轴上点的全体，引进绝对值后同时是一维的欧几里德空间，通常称为**实(数)直线**(real line)，记作 **E** 或仍记作 **R**. 因此，每个实数集合 $X\subset E^1$ 也称为**实(数)直线上的点集**.

区间(interval)是最简单最常用的实(数)直线上的点集，它是如下几种点集的统称：

闭区间(closed interval)　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，其中 $-\infty<a\leqslant b<+\infty$. 特别，单点集 $\{a\}=[a,a]$ 也是闭区间.

开区间(open interval)　$(a,b)=\{x|a<x<b\}$，其中 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$.

左闭右开区间　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，其中 $-\infty<a<b\leqslant+\infty$.

左开右闭区间　$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，其中 $-\infty\leqslant a<b<+\infty$.

一般,将全体实数与两个新元素 $-\infty$, $+\infty$ 组成的集合称为**扩充实数集**(set of extended real numbers),记作 $\bar{\mathbf{R}}$,即

$$\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}.$$

由于实数有大小顺序,对实(数)直线上的点集可以建立界和确界的概念.

定义 1.5.2 设非空集合 $X\subset E^1$,如果存在常数 M,使得 $x\leqslant M$, $\forall x\in X$,则称集合 X 是**上有界的**(bounded above),M 是 X 的一个**上界**(upper bound);如果存在常数 m,使得 $x\geqslant m$, $\forall x\in X$,则称集合 X 是**下有界的**(bounded below),m 是 X 的一个**下界**(lower bound). 若 X 是上、下有界的,则称 X 为**有界集**(bounded set). 当上界 $M\in X$ 或下界 $m\in X$,则称 M 是 X 的**最大值**(maximum),m 是 X 的**最小值**(minimum),分别记作

$$M=\max X \quad 或 \quad M=\max_{x\in X} x,$$

$$m=\min X \quad 或 \quad m=\min_{x\in X} x.$$

定义 1.5.3 **上确界**(supremum)是从实数直线 E^1 的非空子集全体即 $\mathscr{P}(E^1)-\{\varnothing\}$($\mathscr{P}(E^1)$ 是 E^1 的幂集)到扩充实数集 $\bar{\mathbf{R}}$ 的一个映射,记作 $\sup:\mathscr{P}(E^1)-\{\varnothing\}\to\bar{\mathbf{R}}$,对于任意的 $X\in\mathscr{P}(E^1)-\{\varnothing\}$,

$$\sup X=\begin{cases}\min\{M\mid x\leqslant M,\forall x\in X\}, & 当 X 上有界;\\ +\infty, & 当 X 非上有界.\end{cases}$$

下确界(infimum)也是从 $\mathscr{P}(E^1)-\{\varnothing\}$ 到 $\bar{\mathbf{R}}$ 的一个映射,记作 $\inf:\mathscr{P}(E^1)-\{\varnothing\}\longrightarrow\bar{\mathbf{R}}$,对于任意的 $X\in\mathscr{P}(E^1)-\{\varnothing\}$,

$$\inf X=\begin{cases}\max\{m\mid x\geqslant m,\forall x\in X\}, & 当 X 下有界;\\ -\infty, & 当 X 非下有界.\end{cases}$$

当 $X\in\mathscr{P}(E^1)$ 上有界时,$\sup X$ 就是 X 的最小上界,等价于

(1) $x\leqslant\sup X$, $\forall x\in X$;

(2) $\forall \varepsilon>0, \exists x' \in X, x'>\sup X-\varepsilon$.
如果 $\sup X \in X$，则 $\max X=\sup X$；否则，即若 $\sup X \notin X$，则 $\max X$ 不存在. 类似地，当 $X \in \mathscr{P}(E^1)$ 下有界时，$\inf X$ 是 X 的最大下界，等价于

(1) $x \geqslant \inf X, \forall x \in X$;

(2) $\forall \varepsilon>0, \exists x' \in X, x'<\inf X+\varepsilon$.
如果 $\inf X \in X$，则 $\min X=\inf X$；否则，即若 $\inf X \notin X$，则 $\min X$ 不存在.

有界实数集合未必存在最大值和最小值，但可以存在上确界与下确界，如开区间(0,1)即是一例. 从实数的定义出发，可以证明下面的定理，它保证由定义 1.5.3 的上确界与下确界是有意义的.

定理 1.5.4(确界存在定理) 上有界的非空实数集合必有唯一的最小上界即上确界，下有界的非空实数集合必有唯一的最大下界即下确界.

通常，为了避免涉及繁复的实数定义，常把"上有界的非空实数集合必有上确界"作为一条公理，然后"下有界的非空实数集合必有下确界"，便变成可以推证的命题.

利用上确界与下确界的概念，可以推证下述两个常用的结论.

定理 1.5.5(区间套定理) 设$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$是闭区间的序列，满足如下两个条件：

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则存在唯一的一点 $c \in [a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$.

定理 1.5.6(阿基米德(Archimedean)性质) 对于任何正实数 ε 和 x，必存在 $n \in \mathbf{N}$，使得 $x<n\varepsilon$. ($\mathbf{N}$ 是自然数集)

定理 1.5.6 的性质极为直观：不管 ε 有多么小，x 有多么大，总有 ε 的一个倍数大于 x. 这个性质在论证中是常用的.

1.5.2 邻域、开集和闭集

定义 1.5.7 设 $x_0\in E^1$，$\varepsilon>0$，开区间

$$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)=\{x\in E^1 \mid |x-x_0|<\varepsilon\}$$

称为 x_0 的 **ε-邻域**或**邻域**(neighborhood)，记作 $B(x_0,\varepsilon)$. 设非空集合 $X\subset E^1$，$x_0\in X$，如果存在 x_0 的邻域 $B(x_0,\varepsilon)\subset X$，则称 x_0 为集合 X 的**内点**(interior point).

更一般地，可以定义包含点 x_0 的任何一个开区间 (a,b) 为 x_0 的一个邻域.

定义 1.5.8 设集合 $X\subset E^1$. 如果 X 中每一个点均为 X 的内点，则称 X 是**开集**(open set). 设集合 $Y\subset E^1$. 如果 E^1-Y 即 Y^c 是开集，则称 Y 为**闭集**(closed set).

显然，任何开区间 (a,b) 是开集，任何闭区间 $[a,b]$ 是闭集，任何半开半闭的区间 $[a,b)$ 和 $(a,b]$ 是非开非闭的集合.

下面两个定理表明了实(数)直线上开集和闭集的构造.

定理 1.5.9 实(数)直线上任何一个非空开集可以表示为有限个或可列个互不相交的开区间的并集. 这些开区间称为所说开集的**构成区间**.

定理 1.5.10 实(数)直线上的闭集或是 E^1 本身，或是从 E^1 中去掉有限个或可列个互不相交的开区间而得出的集合.

1.5.3 实(数)直线的完备性

定义 1.5.11 设序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E^1$. 如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$(依赖于 ε 的自然数)，使得

$$|x_n-x_m|<\varepsilon,\ \forall\, n,m>N,$$

则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为**柯西序列**(Cauchy sequence).

例 1.5.12 (1) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是柯西序列.

(2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列.

定理 1.5.13 序列 $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E^1$ 收敛$\Leftrightarrow X$ 是柯西序列.

E^1 上收敛序列必是柯西序列，这是很容易推证的. 定理 1.5.13 重要的意义在于指出 E^1 上每个柯西序列必收敛，实(数)直线的这一性质称为**完备性**(completeness).

我们还可以定义 E^1 的完备子集. 设集合 $X\subset E^1$，如果 X 上的每个柯西序列均收敛于 X 的一点，则称 X 是 E^1 的**完备子集**. 例如，每个闭区间以至每个闭集都是完备子集. 除 E^1 外的每个开区间以至每个开集都是非完备子集.

通常称定理 1.5.13 为柯西收敛原理，利用这个原理可以判断实数序列是否收敛.

例 1.5.14 (1) 设序列 $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots.$$

由于

$$|x_{2n}-x_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\geqslant\frac{1}{2},$$

所以 X 不是柯西序列，因此 X 不收敛.

(2) 设序列 $Y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$y_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

因为对任何 $m>n$ 有

$$\begin{aligned}|y_n-y_m| &= \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\\ &<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\\ &=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n},\end{aligned}$$

可见 Y 是柯西序列，所以 Y 收敛.

1.5.4 有界闭集的列紧性与紧性

现在给出一个重要定理，它所反映的性质称为实数直线上有界闭集的**列紧性**(sequentially compactness).

定理 1.5.15(波尔查诺-魏尔斯特拉斯(Bolzano-Weierstrass)定理) 在 E^1 上，每个有界闭集中的任何序列必有子序列收敛于该有界闭集内的一点.

定理中"有界"和"闭"两个条件缺一不可. 例如，开区间(0,1)有界但非闭，(0,1)中的序列$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$就没有子序列收敛于(0,1)内的一点；自然数集 N 是 E^1 的闭子集但无界，它本身是一个序列，显然没有收敛的子序列.

下面要引进关于有界闭集的另一个重要定理，为此先引入覆盖的概念.

定义 1.5.16 设集合 $X\subset E^1$，$\mathscr{U}$ 是一族开区间. 如果对任一点 $x\in X$ 均有开区间 $\Delta\in\mathscr{U}$ 使得 $x\in\Delta$，则 $\mathscr{U}$ 称为 X 的一个**开覆盖**(open covering)，或者说 $\mathscr{U}$ **覆盖** X. 如果 $\mathscr{U}$ 仅包含有限个开区间且覆盖 X，，就称 $\mathscr{U}$ 为 X 的**有限开覆盖**(finite open covering). 如果 X 的覆盖 $\mathscr{U}$ 的一个子族也是 X 的覆盖，便称这个子族为 $\mathscr{U}$ 的一个**子覆盖**(subcovering).

例 1.5.17 设 $\mathscr{U}$ 是如下一族开区间：

$$\left(\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{1}{3},1\right),\cdots,\left(\frac{1}{n},1\right),\cdots,$$

则 $\mathscr{U}$ 是开区间 $X=(0,1)$的一个开覆盖. 事实上，任一 $x\in X$ 有 $0<x<1$，可取充分大的 n 使得 $\frac{1}{n}<x$，从而有 $x\in\left(\frac{1}{n},1\right)$. 但 $\mathscr{U}$ 的任何有限个开区间显然都不能覆盖 X.

这个例子表明，开集的开覆盖不一定有有限的子覆盖. 然而对于有界闭集却有如下结论.

定理 1.5.18(海涅-波莱尔-勒贝格(Heine Borel Lebesgue)定理) 设 $X\subset E$ 是有界闭集.如果 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖,则必存在 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖.

这个定理反映的性质称为实(数)直线上有界闭集的**紧性**(compactness).定理 1.5.15 与定理 1.5.18 是深入讨论有界闭集上连续函数的性质时要用到的两个基本定理,它们在数学分析中起着重要的作用.拓扑学、泛函分析中列紧性与紧性的概念正是在这两个定理的基础上经过拓广而建立起来的.对有界闭集来说,列紧性与紧性是等价的.

参考文献

1. 陈建功．实函数论．科学出版社,1978
2. 夏道行,吴卓人,严绍宗,舒五昌．实变函数论与泛函分析．上册．1978
3. 河田敬义著,赖英华译．集合　拓扑　测度．上海科学技术出版社,1961
4. 陈景良．近代分析数学概要．清华大学出版社,1987

2 实变函数论

2.1 引言

2.1.1 实变函数论的产生

实变函数论作为数学的一个分支形成于19世纪末和20世纪初. 实变函数论的产生,首先是为了理解和弄清19世纪在经典分析中一系列当时看来是奇怪的发现,例如,连续而不可微的函数、连续但不是逐段单调的函数、函数项级数的每一项都是连续的但其和函数却不连续、有界但不是黎曼(Riemann)可积的函数、黎曼可积的函数序列的极限函数不是黎曼可积的以及可求长但不符合微积分中弧长定义的曲线等. 这一切看起来与人们所期望的那种函数与其导数、积分的性态相矛盾. 这就促使人们对于比连续函数更广泛的一类函数进行深入的研究.

另一方面,在19世纪已经建立起傅里叶(Fourier)级数理论. 对于应用数学而言,傅里叶级数在当时已经是一个相当令人满意的工具. 但是在纯数学方面,傅里叶级数的理论仍不能令人满意,例如函数和它的傅里叶级数之间的统一性、对称性及完备性等问题仍没有弄清楚. 这个问题的进一步研究,也促进了实变函数论的形成和发展.

对于函数进行研究的许多问题都涉及到积分理论,因为看起来不合适的问题大部分都可以通过适当地扩充积分概念加以解决. 另外,随着人们对于客观世界认识的不断深化,特别是在18世纪有关热、波、电磁等的研究的需要,数学上必须对函数项级数、含参变量积分等进行深入的研究. 这些问题迫切需要在数学上有一

个比黎曼积分更为广泛和有效的积分概念.它应当既能保持黎曼积分的直观性、又能比较好地解决一些黎曼积分难以处理的理论问题,例如函数项级数的逐项积分问题、累次积分交换顺序问题等等.在19世纪和20世纪交替之际,法国数学家勒贝格(H. Lebesgue)在前人工作的基础上提出了一种新的积分概念,这就是勒贝格积分.勒贝格积分是黎曼积分的一个直接推广.它既保持了黎曼积分的直观性,又在逐项积分、交换积分顺序等重要问题上较大地改进了所需要的条件,同时也为近代分析的创立和发展提供了一个基础.勒贝格积分的出现是数学领域中的一个重大进展.

勒贝格积分的出现及实变函数论中的其它成果,不仅使许多经典分析中的问题得到了明确的解答并得到更为深刻的结果,而且也为一些新的数学分支、特别是泛函分析的产生和发展提供了基础,并通过泛函分析影响了微分方程、计算数学和近代物理等很多领域.在数学的各个分支中使用勒贝格积分是现代数学的一个重要特征.

在20世纪中,勒贝格测度和积分的思想又得到进一步的发展,特别是由拉东(J. Radon)所建立的被称为勒贝格-斯蒂尔切斯(Lebesgue-Stieltjes)积分.这种积分使积分概念的范围更大、包含了欧氏空间点集上的不同的积分概念,而且还扩展到象函数空间那样更普遍的空间,这种更普遍的积分概念在概率论、谱理论、各态遍历理论和调和分析中都找到了应用.

2.1.2 建立勒贝格积分的方法

勒贝格积分理论是实变函数论的一个重要组成部分.为了说明这种积分概念的建立,首先回顾黎曼积分的概念.

设 f 是定义在有限区间$[a,b]$上的有界函数,在$[a,b]$中插入一组分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

并在每个小区间$[x_{k-1},x_k]$上任取一点$\xi_k(1\leqslant k\leqslant n)$，然后作和式

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

如果当$\lambda \triangleq \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k - x_{k-1})\to 0$时，这个和式有确定的极限（即极限的存在性和极限值与分点$x_1,x_2,\cdots,x_n$的取法及$\xi_k\in[x_{k-1},x_k](1\leqslant k\leqslant n)$的取法无关），则称$f$在$[a,b]$上黎曼可积，并称这个极限为$f$在$[a,b]$上的黎曼积分．这个定义简单直观，它是求面积运算的直接推广.

勒贝格积分建立的基本思想与此不同．为简单起见，考虑有界区间$[a,b]$上的有界函数f，即存在常数c,d，使得有$c\leqslant f(x)<d$ $(x\in[a,b])$.

分割区间$[c,d]$为$c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$，并在小区间$[y_{k-1},y_k]$上任取一值$\eta_k(1\leqslant k\leqslant n)$，然后构造和式$\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k\cdot mE(y_{k-1}\leqslant f<y_k)$，其中$mE(y_{k-1}\leqslant f<y_k,k\geqslant 1)$表示$[a,b]$的子集$\{x\in[a,b]\mid y_{k-1}\leqslant f(x)<y_k\}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$的测度．因为在一般情况下，这些集合不再是区间，而可能是一些构造相当复杂的点集，因而不能用长度去度量它们．如果当$\lambda\triangleq\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(y_k-y_{k-1})\to 0$时，这个和式有确定的极限（即极限的存在性及极限值与区间$[c,d]$的分割方法无关），则称函数f在$[a,b]$上按勒贝格意义可积，并称这个极限为f在$[a,b]$上的勒贝格积分．这个定义中是采用了分割函数值域（即所谓分割纵轴）而不是像黎曼积分定义中分割自变量范围（即分割横轴）的方法.

上面已经提到，在建立勒贝格积分时遇到的集合$E(y_{k-1}\leqslant f<y_k)$一般不是区间，而是结构比较复杂的点集．对这样的集合，一般不可能用长度这个概念去表示集合的"大"与"小"，而是需要扩充长度这个概念，建立勒贝格测度的概念．测度是长度的直接推

广，用测度这一工具可以度量一些构造非常复杂的点集．这就为建立勒贝格积分提供了工具．

上面提到的勒贝格积分的定义，需要计算集合 $E(y_{k-1}\leqslant f<y_k)$ 的测度 $mE(y_{k-1}\leqslant f<y_k)(1\leqslant k\leqslant n)$．而这个集合的测度是否存在？即集合 $E(y_{k-1}\leqslant f<y_k)$ 是否可测？由于这些集合是由 f 决定的，所以这就对函数 f 提出了一个限制，从而产生了可测函数这一概念．为了建立勒贝格积分理论，首先要对可测函数进行研究．

在建立勒贝格积分之后，还要对微积分的一些基本问题，例如微分与积的关系、分部积分、导数的存在性等进行研究．因此，测度论、可测函数、积分论、微分等，就成为勒贝格积分的基本内容．

2.2 测度论

2.2.1 有界集合的内测度与外测度

定理 2.2.1 $\mathbf{R}^1$ 中任意开集 G 可以表为有限个或可列个互不相交的开区间之并，即

$$G=\bigcup_k(\alpha_k,\beta_k),$$

这些区间称为 G 的构成区间

$\mathbf{R}^n(n>1)$ 中的任意开集 Ω 可以表为可列个半开半闭的 n 维立方体

$$I_k=\{x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)\in\mathbf{R}^n;\ a_k^i\leqslant x^i<b_k^i,i=1,2,\cdots,n.\},\quad k=1,2,\cdots$$

的并集．即

$$\Omega=\bigcup_k I_k.$$

定义 2.2.2 设 $G\subset\mathbf{R}^1$ 为任意开集，并且 $G=\bigcup_k(\alpha_k,\beta_k)$，其中 $\{(\alpha_k,\beta_k)\}_k$ 是 G 的构成区间，则规定 G 的长度为这些区间长度

之和，即

$$|G| = \sum_k (\beta_k - \alpha_k).$$

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为任意开集，并且 Ω 已表为可列个互不相交的 n 维立方体之并，$\Omega = \bigcup_k I_k$，则规定 Ω 的 n 维体积为这些立方体体积之和，即

$$|\Omega| = \sum_k |I_k|.$$

定义 2.2.3 设 $F \subset \mathbf{R}^n (n \geqslant 1)$ 为任意有界闭集，任取有界开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$，使 $F \subset \Omega$. F 的体积(当 $n=1$ 时为长度)规定为

$$|F| = |\Omega| - |\Omega \setminus F|.$$

上式中，Ω 与 $\Omega \setminus F$ 都是有界开集，所以 $|\Omega| - |\Omega \setminus F|$ 确定. 另外，$|F|$ 的值又与有界开集 Ω 的选取无关，因而这个定义是合理的.

定义 2.2.4 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为任意有界集，所有包含 E 的有界开集的体积的下确界称为 E 的**外测度**(outer measure)；所有含于 E 的闭集的体积的上确界称为 E 的**内测度**(inner measure). E 的内、外测度分别记为 $m_* E$ 与 $m^* E$，即

$$m_* E \triangleq \sup\{|F| \mid F \subset E \text{ 为闭集}\},$$

$$m^* E \triangleq \inf\{|G| \mid G \supset E \text{ 为有界开集}\}.$$

定理 2.2.5 对任意有界集 $E \subset \mathbf{R}^n$，有

$$m_* E \leqslant m^* E.$$

定义 2.2.6 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为有界集，如果 $m_* E = m^* E$，则称 E 为(有界)**可测集**(measurable set). E 的测度定义为

$$mE \triangleq m_* E = m^* E.$$

定义 2.2.7 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 为任意集合，Q_k 为 $\mathbf{R}^n$ 中以原点为中心、$k(k=1,2,\cdots)$ 为半径的闭球，并记 $E_k \triangleq E \cap Q_k (k=1,2,\cdots)$. 如果对每个自然数 k，有界集 E_k 可测，则称集合 E 为可测集. E 的测

度定义为

$$mE = \lim_{k\to\infty} mE_k.$$

定理 2.2.8 对于 $\mathbf{R}^n$ 中任意开集和有界闭集，其测度等于它们的长度或体积.

2.2.2 测度的性质

定理 2.2.9 (1) 若 E_1, E_2 为可测集，则 $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$ 及 $E_1 \setminus E_2$ 也是可测集，并且有

$$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2 - m(E_1 \cap E_2),$$

当 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 时，有

$$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2.$$

(2) 若 E_1, E_2 为可测集，$E_1 \subset E_2$，则 $mE_1 \leqslant mE_2$.

(3) $E \subset (a,b)$ 为可测集的充分必要条件是集合 $(a,b) \setminus E$ 可测，并且

$$mE + m((a,b) \setminus E) = b - a.$$

定理 2.2.10 有界集 E 可测的充分必要条件是：对于任意的正数 ε，存在开集 G 与闭集 F，满足 $F \subset E \subset G$，并且使得

$$mG - mF < \varepsilon.$$

定理 2.2.11 设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列可测集，则 $\bigcup_k^{\infty} E_k$ 与 $\bigcap_k^{\infty} E_k$ 仍为可测集，并且

$$m\left(\bigcup_k^{\infty} E_k\right) \leqslant \sum_k mE_k.$$

如果 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 互不相交，则

$$m\left(\bigcup_k^{\infty} E_k\right) = \sum_k mE_k.$$

这称为测度的**完全可加性**(complete additivity).

定理 2.2.12 (1) 设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列可测集，满足 $E_k \subset E_{k+1}$ $(k = 1,2,\cdots)$，则

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k\to+\infty} mE_k.$$

(2) 设$\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$为一列可测集,满足$E_k \supset E_{k+1}$ ($k=1,2,\cdots$),如果$mE_1 < +\infty$,则

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k\to+\infty} mE_k.$$

例 2.2.13 在定理 2.2.12 的(2)中,条件$mE_1 < +\infty$是必不可少的,这可由下例看出:令$E_k = [k, +\infty)$ ($k=1,2,\cdots$). 虽然有$mE_k = +\infty$ ($k=1,2,\cdots$),但是却有$m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = m\varnothing = 0$.

例 2.2.14 在$\mathbf{R}^1$中,任意的(开、闭、半开半闭)区间是可测集,并且其测度与长度相等.

例 2.2.15 在$\mathbf{R}^n$($n\geqslant1$)中,由一个点构成的集合是可测集,并且测度为零.从定理 2.2.10 可以推出,由有限个或可列个点构成的集合是一个测度为零的可测集.

例 2.2.16 $[0,1]$中的全体有理点构成的集是可测集,其测度为零;$[0,1]$中的全体无理点构成的集合也是可测集,其测度为 1.

例 2.2.17 若集合E可表为至多可列个闭集的并集,则称E为F_σ型集;若E可表为至多可列个开集的交集,则称E为G_δ型集.任意F_σ型集与G_δ型集都是可测集.

以开集或闭集为对象,进行任意的、至多为可列的并、交运算,所得到的集合称为博雷尔(Borel)型集,简称 B 型集.任意 B 型集是可测的.

如果E的外测度为零,则E可测,并且测度为零.

定理 2.2.18 集合E可测的充分必要条件是E可以表为一个B型集与一个测度为零的可测集之并.

例 2.2.19 在$\mathbf{R}^n$($n\geqslant1$)中,任意的k($k<n$)维流形是测度为零的可测集.因此,$\mathbf{R}^2$中的任意曲线,$\mathbf{R}^3$中的任意曲面都是零测

度集. 任意区域的边界是零测度集.

定理 2.2.20 $E\subset\mathbf{R}^n$ 为可测集的充分必要条件是：对任意的集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$，都有

$$m^*A=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C),$$

其中 E^C 为 E 关于 $\mathbf{R}^n$ 的余集.

这个条件称为**卡拉泰奥多里**(Carathéodory)**条件**.

2.3 可测函数

定义 2.3.1 设 E 为任意可测集，f 是定义在 E 上的扩充实值函数(即 f 在 E 上既可取值任意实数，又可以等于 $+\infty$ 或 $-\infty$). 对任意的实数 c，用 $E(f>c)$ 表示 E 中所有使 $f(x)>c$ 的点 x 组成的子集($E(f<c)$、$E(f\geqslant c)$ 与 $E(f\leqslant c)$ 可类似地理解).

如果对每个实数 c，集合 $E(f>c)$ 可测，则称 f 是 E 上的**可测函数**(measure function).

定义 2.3.2 设 E 为可测集. 如果某个命题 π 在 E 上除了某个零测度子集之外处处成立，则称命题 π 在 E 上**几乎处处**(almost everywhere)**成立**，并记作 π, a.e..

例如，如果 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在 E 上的一列可测函数，f 是一个定义在 E 上的扩充实值函数. 如果除了 E 中的一个测度为零的子集 e 之外，在 E 上处处有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，则称函数序列 $\{f_n\}_n$ 在 E 上**几乎处处收敛**(almost everywhere converge)于 f，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, a.e..

例 2.3.3 设 $E=[0,1]$，令

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

由于 $[0,1]$ 中的有理点集是一个零测度集，所以 φ 在 $[0,1]$ 上

几乎处处为零，即 $\psi(x)=0$, a. e.. 称这个函数为**狄利克雷**(Dirichlet)**函数**.

例 2.3.4 设 $E=[0,1]$，对每个自然数 n，令

$$\psi_n(x)=\lim_{k\to+\infty}[\cos(n!\pi x)]^{2k}$$

则有

$$\psi_n(x)=\begin{cases}1, \text{若 } x=\dfrac{m}{n!}, m=0,1,2,\cdots,n!.\\ 0, \text{其它}.\end{cases}$$

显然，在 E 上成立

$$\lim_{n\to+\infty}\psi_n(x)=\psi(x).$$

因而在 $[0,1]$ 上有

$$\lim_{n\to+\infty}\psi_n(x)=0, \text{ a. e.}.$$

定理 2.3.5 设 E 为可测集，f,g 为 E 上的可测函数，则 $f+g$，$f-g$，$f\cdot g$，$\min\{f,g\}$ 及 $\max\{f,g\}$，$|f|$ 都是 E 上的可测函数. 另外，如果 g 在 E 上几乎处处不为零，则 f/g 也是 E 上的可测函数.

例 2.3.6 设 $E\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant1)$ 为任一集合，令

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$$

称 χ_E 为集合 E 的**特征函数**(characteristic function).

定理 2.3.7 设 $E\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant1)$，则 E 为可测集的充分必要条件是它的特征函数 χ_E 为可测函数.

定义 2.3.8 设 E 为可测集，满足 $mE<+\infty$. 又设 E_1，$E_2,\cdots,E_k$ 为 E 的互不相交的可测子集，使得 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{k}E_i$. $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 为一组任意的实数. 在 E 上定义一个函数 φ，使得

$$\varphi(x)=c_i,\qquad x\in E_i,\quad i=1,2,\cdots,k.$$

称 φ 是 E 上的**简单函数**(simple function).

利用特征函数,可将上述简单函数表示成

$$\varphi(x) = \sum^{l} c_i \chi_{E_i}(x)$$

当 $mE = +\infty$ 时,可以完全相同地定义 E 上的简单函数. 不过应注意,φ 不能在任一个测度为 $+\infty$ 的子集上恒不为零.

例 2.3.9 (1) 设 $E = [0,1]$,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \frac{1}{4}; \\ 0, & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ -1, & \frac{1}{2} < x \leqslant \frac{3}{4}; \\ 2, & \frac{3}{4} < x \leqslant 1; \end{cases}$$

则 φ_1 是 $[0,1]$ 上的简单函数.

但是若令

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}, \quad n = 1,2,\cdots, \end{cases}$$

则 φ_2 不是 $[0,1]$ 上的简单函数. 因为这里集合 $E = [0,1]$ 已经被分割为无限个子集的并,并且在每个不同的子集上,函数 φ_2 取不同的值.

(2) 设 $E = [1, +\infty)$,令

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \leqslant x < n+1, \quad n = 1,2,\cdots,10, \\ 0, & x > 10, \end{cases}$$

则 φ_1 是 $[1, +\infty)$ 上的简单函数.

但是若令

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{n}, n \leqslant x < n+1, \quad n = 1,2,\cdots,$$

则 φ_2 不是$[1,+\infty)$上的简单函数，因为 φ_2 在无穷测度集$[1,+\infty)$上恒不为零.

定义 2.3.10 设 $E\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant 1)$为任一集合，$f$ 是定义在 E 上的一个实值函数. 称 f 在 $x_0\in E$ 连续，是指对任意的正数 ε，存在正数 δ，只要 $x\in E$，$\|x-x_0\|<\delta$，就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

如果 f 在 E 的每一个点连续，则称 f 是 E 上的连续函数.

例 2.3.11 在例 2.3.6 中的狄利克雷函数 ψ 显然不是$[0,1]$上的连续函数，因为 ψ 在$[0,1]$中的每一个点都不连续. 但是，如果将 ψ 限制在$[0,1]$中的有理点集或无理点集上，则它是连续函数.

定理 2.3.12 任意可测集上的简单函数、连续函数和(当 $n=1$ 时)单调函数都是可测函数.

定理 2.3.13 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是可测集 E 上的一列可测函数，其中每个函数在 E 上几乎处处有限. 又设 f 是 E 上的一个扩充实值函数，如果

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\quad \text{a.e.},$$

则 f 也是 E 上的可测函数.

定理 2.3.14 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是可测集 E 上的一列可测函数，若记 $g_1(x)=\sup\limits_n\{f_n(x)\}$、$g_2(x)=\inf\limits_n\{f_n(x)\}$、$h_1(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sup f_n(x)$、$h_2(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\inf f_n(x)$，则 g_1,g_2,h_1,h_2 都是 E 上的可测函数.

定理 2.3.15 设 f 是可测集 E 上的一个非负可测函数，则存在 E 上的一列简单函数$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足

$$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\quad x\in E,$$

并使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x),\quad \text{a.e.}.$$

定理 2.3.16 设 f 是可测集 E 上的任意可测函数，则存在 E 上的一列简单函数$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x),\quad \text{a.e.}.$$

定义 2.3.17 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$、f都是可测集E上的几乎处处有限的可测函数．如果对每个正数ε，都有

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

则称可测函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在E上**依测度收敛**(convergence in measure)于f.

在上式中$E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)\triangleq\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}$.

定理 2.3.18 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，f都是可测集E上的几乎处处有限的可测函数．如果$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在E上依测度收敛于f，则在$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$必有子列$\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$在$E$上几乎处处收敛于$f$.

定理 2.3.19 设E为可测集，满足$mE<+\infty$，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$、f都是E上的几乎处处有限的可测函数．如果

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{a.e.},$$

则$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在E上依测度收敛于f.

但是，如果$mE=+\infty$，定理结论不再成立.

例 2.3.20 设$E=[0,+\infty)$，$f_n(x)=\dfrac{x}{n}$，$n=1,2,\cdots$，则对每个$x\in E$，有$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$，但是$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$并不依测度收敛于0，这是因为，若令$\varepsilon=1$，则集合$E(|f_n-0|\geqslant 1)=[n,+\infty)$．于是对所有的自然数$n$，恒有

$$mE(|f_n| \geqslant 1) = +\infty,$$

因此$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$不依测度收敛于零.

定义 2.3.21 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，f都是可测集E上的几乎处处有限的可测函数．如果对任意的正数δ，都存在E的可测子集E_δ，满足$m(E\setminus E_\delta)<\delta$，使得$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$E_\delta$上一致收敛于$f$，则称序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$E$上**近一致收敛**(convergence almost uniform)于f.

定理 2.3.22 设E为可测集，满足$mE<+\infty$，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，f都是E上的几乎处处有限的可测函数．如果

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \text{a.e.},$$

则$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在E上近一致收敛于f.

反之，对任意的可测集E，如果$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在E上近一致收敛于f，则有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \text{a.e.}.$$

定理 2.3.23 设$F\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant 1)$为任意闭集，$f$是定义在$F$上的连续函数，又设有常数$c$、$d$，使得

$$c\leqslant f(x)\leqslant d, \qquad x\in F$$

则存在$\mathbf{R}^n$上的连续函数g，使得

$$g(x)=f(x), \qquad \forall\, x\in F,$$

并且满足

$$c\leqslant g(x)\leqslant d, \qquad x\in\mathbf{R}^n.$$

这就是说，在$\mathbf{R}^n$中，定义在任一个闭集上的有界连续函数可以在保持原有的上、下界的条件下连续延拓到整个$\mathbf{R}^n$上去.

定理 2.3.24 设$E\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant 1)$为任意可测集，$f$是定义在$E$上的几乎处处有限的可测函数，则对任意的正数$\delta$，存在$E$的闭子集$F$，满足$m(E\setminus F)<\delta$，使得$f$在$F$上的限制是$F$上的连续函数.

定理 2.3.25 设f是开集$G\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant 1)$上的几乎处处有限的可测函数，则对任意正数$\delta$，存在$G$上的连续函数$g$，使得

$$mE(f\neq g)<\delta.$$

如果存在正数M，使得在G上有

$$|f(x)|\leqslant M, \qquad \text{a.e.},$$

则可要求g在G上也满足

$$|g(x)|\leqslant M, \qquad \forall\, x\in G.$$

2.4 勒贝格积分

2.4.1 积分的定义与基本性质

定义 2.4.1 设 φ 是定义在可测集 E 上的简单函数，即 E_1，$E_2,\cdots,E_k$ 为 E 的互不相交的可测子集，满足 $E=\bigcup_{i=1}^{k}E_i$. 又 c_1，$c_2,\cdots,c_k$为一组实数，使得

$$\varphi(x)=c_i,\qquad x\in E_i,\qquad i=1,2,\cdots,k.$$

称和数 $\sum_{i=1}^{k}c_i\cdot mE_i$ 为 φ 在 E 上的积分. 由定义 2.3.8，简单函数不能在任意具有无限测度的子集上不为零，所以上述和式总是有限的.

φ 在 E 上的积分记为 $\int_E\varphi\mathrm{d}m$.

定义 2.4.2 设 $E\subseteq\mathbf{R}^n(n\geqslant1)$ 为任意可测集，f 是 E 上的非负可测函数. 如果

$$\sup\left\{\int_E\varphi\mathrm{d}m\,\middle|\,\varphi\text{是}E\text{上的非负简单函数，满足}\ 0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x),\forall\,x\in E\right\}<+\infty$$

则称 f 在 E 上是**勒贝格可积的**(integral in the sense of Lebesgue)，并将这个上确界定义为 f 在 E 上的**勒贝格积分**. f 在 E 上的勒贝格积分记作 $\int_E f\mathrm{d}m$.

定义 2.4.3 设 f 是可测集 E 上的任意可测函数，令

$$f_+(x)\triangleq\max\{f(x),0\},$$

$$f_-(x)\triangleq-\min\{f(x),0\}.$$

则 f_+、f_- 是 E 上的非负可测函数. 如果 f_+与 f_- 都是在 E 上勒贝

格可积分的，则称 f 在 E 上勒贝格可积分．并规定 f 在 E 上的勒贝格积分为

$$\int_E f\mathrm{d}m \triangleq \int_E f^+ \mathrm{d}m - \int_E f^- \mathrm{d}m$$

所有的在 E 上勒贝格可积分的函数构成的集合记作 $L(E)$．

定理 2.4.4 勒贝格积分具有下列性质：

(1) 设 f 在 E 上可测，则 $f\in L(E)$ 的充分必要条件是 $|f|\in L(E)$，并且

$$\left|\int_E f\mathrm{d}m\right| \leqslant \int_E |f|\mathrm{d}m.$$

(2) 若 $f\in L(E)$ 为非负函数，并且 $\int_E f\mathrm{d}m = 0$，则在 E 上有

$$f(x)=0, \quad \text{a.e.}.$$

(3) 设 $f\in L(E)$，$g\in L(E)$ 满足

$$f(x)\leqslant g(x), \quad \text{a.e.},$$

则有

$$\int_E f\mathrm{d}m \leqslant \int_E g\mathrm{d}m.$$

(4) 设 $g\in L(E)$，若 f 在 E 上可测，满足

$$|f(x)| \leqslant |g(x)|, \quad \text{a.e.},$$

则 $f\in L(E)$．

(5) 设 $mE<+\infty$，f 在 E 上可测，并且存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M, \quad \text{a.e.},$$

则 $f\in L(E)$，并且

$$\left|\int_E f\mathrm{d}m\right| \leqslant M\cdot mE.$$

(6) 设 $f\in L(E)$，$g\in L(E)$，则对任意的实数 λ、μ，$\lambda f+\mu g\in L(E)$，并且

$$\int_E(\lambda f+\mu g)\mathrm{d}m = \lambda\int_E f\mathrm{d}m + \mu\int_E g\mathrm{d}m.$$

(7) 设 $f\in L(E)$，$g\in L(E)$，则

$\max\{f(x),g(x)\}$ 与 $\min\{f(x),g(x)\}$ 都是在 E 上勒贝格可积的函数.

定理 2.4.5 设 $f\in L(E)$，则对任意的正数 ε，存在正数 δ，对于 E 的任意可测子集 e，只要 $me<\delta$，就有

$$\int_e |f|\mathrm{d}m < \varepsilon.$$

这个性质称为积分的**绝对连续性**(absolute continuity).

定理 2.4.6 设 $G\subset \mathbf{R}^n(n\geqslant 1)$ 为开集，$f\in L(G)$，则对任意正数 ε，存在 $\overline{G}$ 上的有界连续函数 g，使得

$$\int_G |f-g|\mathrm{d}m < \varepsilon.$$

定理 2.4.7 设 E 为任意可测集，$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 的一列互不相交的可测子集，满足 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，如果 $f\in L(E)$，则 $f\in L(E_n)$，$n=1,2,\cdots$，并且

$$\int_E f\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f\mathrm{d}m.$$

这个性质称为积分的**完全可加性**(complete additivity).

定理 2.4.8 若 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，则 f 在 $[a,b]$ 上勒贝格可积，且两种积分值相等.

2.4.2 积分收敛定理

定理 2.4.9 设 E 为可测集，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 上的一列勒贝格可积函数，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n(t)|\mathrm{d}m < +\infty,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)$ 在 E 上几乎处处收敛. 若记 $f(t)\triangleq \sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)$，则

$f\in L(E)$，并且

$$\int_E f\mathrm{d}m=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\mathrm{d}m.$$

定理 2.4.10 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是可测集E上的一列非负可积函数，满足

$$f_1(t)\leqslant f_2(t)\leqslant\cdots,\qquad \text{a.e.}.$$

令$f(t)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(t)$，则当

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\mathrm{d}m<+\infty$$

时，$f\in L(E)$，并且

$$\int_E f\mathrm{d}m=\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\mathrm{d}m.$$

这个定理称为**单调收敛定理**(monotone convergence theorem).

定理 2.4.11 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是可测集E上的一列非负的可测函数，则有

$$\int_E[\varliminf_{n\to+\infty}f_n(t)]\mathrm{d}m\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}\int_E f_n(t)\mathrm{d}m.$$

由于历史的原因，这个定理常称为**法图(Fatou)引理**.

定理 2.4.12 设E为可测集，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是E上的一列可测函数，满足

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(t)=f(t),\qquad \text{a.e.}.$$

又设存在$g\in L(E)$，使得

$$|f_n(t)|\leqslant g(t),\qquad \text{a.e.},$$

则$f\in L(E)$，并且

$$\int_E f\mathrm{d}m=\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\mathrm{d}m.$$

这个定理称为**勒贝格控制收敛定理**(Lebesgue dominated convergence theorem).

定理 2.4.13 设 E 为可测集，$mE<+\infty$，$\{f_n\}_{n\geq 1}$ 为 E 上一列可测函数，满足

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t)=f(t),\qquad \text{a.e.},$$

又设存在正数 M，使得

$$|f_n(t)|\leq M,\qquad \text{a.e.},\quad n=1,2,\cdots,$$

则 $f\in L(E)$，并且

$$\int_E f\mathrm{d}m=\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\mathrm{d}m.$$

这个定理称为**有界收敛定理**(bounded convergence theorem).

定理 2.4.14 设$[a,b]$为有限区间，若 f 在$[a,b]$上黎曼可积，则 f 在$[a,b]$上勒贝格可积，并且两种积分值相等.

定理 2.4.15 设$[a,b)$为任意(有限或无限)区间，设对任意的 $c\in(a,b)$，f 在$[a,c]$上黎曼可积. 又设当 $c\to b$ 时，广义黎曼积分 $\int_a^b|f|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $f\in L(a,b)$，并且 f 在$[a,b)$上的勒贝格积分与 f 在$[a,b)$上的广义黎曼积分在数值上相等.

例 2.4.16 证明

$$\int_{(0,1)}\frac{t^p}{1-t}\log\frac{1}{t}\,\mathrm{d}m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2},\qquad (p>-1)$$

解 将$(1-t)^{-1}$展成幂级数：

$$(1-t)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\qquad 0<t<1,$$

则有

$$\int_{(0,1)}\frac{t^p}{1-t}\log\frac{1}{t}\,\mathrm{d}m=\int_{(0,1)}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+p}\log t\right)\mathrm{d}m$$

注意到(由定理 2.4.14 及定理 2.4.15)

$$-\int_{(0,1)}t^{n+p}\log t\,\mathrm{d}m=-\int_0^1 t^{n+p}\log t\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{(p+n+1)^2},\qquad n=0,1,\cdots$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(0,1)}|t^{n+p}\log t|\,\mathrm{d}m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}<+\infty.$$

由定理 2.4.9,得到

$$\int_{(0,1)}\frac{t^p}{1-t}\log\frac{1}{t}\,\mathrm{d}m=-\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(0,1)}t^{n+p}\log t\,\mathrm{d}m$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}$$

例 2.4.17 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\log(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x=0.$$

解 注意到对每个自然数 n,黎曼广义积分

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\log(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\right|\mathrm{d}x$$

收敛,由定理 2.4.15,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{[0,+\infty)}\frac{\log(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}m.$$

由于

$$\left|\frac{\log(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\right|\leqslant(1+x)\mathrm{e}^{-x},$$

$$0\leqslant x<+\infty,\quad n=1,2,\cdots$$

并且 $(1+x)\mathrm{e}^{-x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上勒贝格可积,故由定理 2.4.12

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\log(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty)}\frac{\log(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}m$$

$$= \int_{[illegible]} 0 \cdot \mathrm{d}m = 0.$$

2.4.3 富比尼定理

定理 2.4.18(富比尼(Fubini)定理) 设 E, F 分别是 $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n$ 中的可测集，$E \times F \subset \mathbf{R}^{m+n}$ 是它们的笛卡儿积. 分别用 x, y 表示 $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n$ 中的点，并用 m_x, m_y 及 m 分别表示 $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n$ 及 $\mathbf{R}^{m+n}$ 中的勒贝格测度.

如果 $f \in L(E \times F)$，则

(1) $\varphi(x) = \int_F f(x,y)\mathrm{d}m_y$ 是 E 上的勒贝格可积函数；

(2) $\psi(y) = \int_E f(x,y)\mathrm{d}m_x$ 是 F 上的勒贝格可积函数；

(3)
$$\int_{E \times F} f\mathrm{d}m = \int_E \left(\int_F f(x,y)\mathrm{d}m_y \right) \mathrm{d}m_x$$
$$= \int_F \left(\int_E f(x,y)\mathrm{d}m_x \right) \mathrm{d}m_y.$$

定理 2.4.19 设 $E \subset \mathbf{R}^m, F \subset \mathbf{R}^n$ 为任意可测集. f 是 $E \times F$ 上的非负可测函数，则有
$$\int_{E \times F} f\mathrm{d}m = \int_E \left(\int_F f(x,y)\mathrm{d}m_y \right) \mathrm{d}m_x$$
$$= \int_F \left(\int_E f(x,y)\mathrm{d}m_x \right) \mathrm{d}m_y$$

定理 2.4.20 设 $E \subset \mathbf{R}^m, F \subset \mathbf{R}^n$ 为任意可测集，f 是 $E \times F$ 上的任意可测函数. 如果两个累次积分 $\int_E \left(\int_F |f(x,y)|\mathrm{d}m_y \right) \mathrm{d}m_x$ 与 $\int_F \left(\int_E |f(x,y)|\mathrm{d}m_x \right) \mathrm{d}m_y$ 之中有一个存在有限，则另一个也存在有限，并且 f 在 $E \times F$ 上勒贝格可积，同时还成立着
$$\int_{E \times F} f\mathrm{d}m = \int_E \left(\int_F f(x,y)\mathrm{d}m_y \right) \mathrm{d}m_x$$

$$=\int_F\left(\int_E f(x,y)\mathrm{d}m_x\right)\mathrm{d}m_y.$$

例 2.4.21 设 $f\in L(-\infty,+\infty)$，$g\in L(-\infty,+\infty)$，令

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}m_y,\qquad -\infty<x<+\infty.$$

其中 $\mathrm{d}m_y$ 表示积分变量是 y.

称 $f*g$ 是 f 与 g 的卷积. 在上述条件下，有 $f*g\in L(-\infty,+\infty)$. 事实上，在 $\mathbf{R}^2$ 上考虑可测函数

$$h(x,y)=f(y)g(x-y).$$

容易看出，累次积分

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^1}\left(\int_{\mathbf{R}^1}|h(x,y)|\mathrm{d}m_x\right)\mathrm{d}m_y\\
&=\int_{\mathbf{R}^1}\left(\int_{\mathbf{R}^1}|f(y)g(x-y)|\mathrm{d}m_x\right)\mathrm{d}m_y\\
&=\int_{\mathbf{R}^1}\left(|f(y)|\int_{\mathbf{R}^1}|g(x-y)|\mathrm{d}m_x\right)\mathrm{d}m_y\\
&=\int_{\mathbf{R}^1}|f(y)|\left(\int_{\mathbf{R}^1}|g(\tau)|\mathrm{d}m_\tau\right)\mathrm{d}m_y\\
&=\int_{\mathbf{R}^1}|g|\mathrm{d}m_x\int_{\mathbf{R}^1}|f|\mathrm{d}m_y<+\infty.
\end{aligned}$$

由定理 2.4.20，$h=f*g\in L(-\infty,+\infty)$.

例 2.4.22 在 $\mathbf{R}^2$ 上令

$$f(x,y)=\begin{cases}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{5}}\sin\dfrac{1}{xy}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, & \text{当 } xy\neq 0,\\ 0, & \text{当 } xy=0,\end{cases}$$

则 $f\in L(\mathbf{R}^2)$.

解 f 的绝对值满足

$$|f(x,y)|\leqslant|x|^{-\frac{2}{3}}|y|^{-\frac{4}{5}}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

由于非负函数 $|x|^{-\frac{2}{3}}|y|^{-\frac{4}{5}}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 的累次积分

$$\int_{\mathbf{R}^1}\left(\int_{\mathbf{R}^1}|x|^{-\frac{2}{3}}|y|^{-\frac{1}{3}}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}m_x\right)\mathrm{d}m_y$$

$$=\int_{\mathbf{R}}|x|^{-\frac{2}{3}}e^{-x^2}\mathrm{d}m_x\cdot\int_{\mathbf{R}^1}|y|^{-\frac{1}{3}}e^{-y^2}\mathrm{d}m_y<+\infty.$$

于是由定理 2.4.20，函数 f 是 $\mathbf{R}^2$ 上的勒贝格可积函数.

2.5 有界变差函数与黎曼-斯蒂尔切斯积分

2.5.1 单调函数与有界变差函数

定义 2.5.1 设 f 是定义在$[a,b]$上的实值函数，如果对于任意的 $x_1\in[a,b]$及 $x_2\in[a,b]$，由 $x_1<x_2$ 可推出 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 f 是$[a,b]$上的一个**单调增加函数**(monotone increasing function)（或**单调减少函数**(monotone decveasing function)）.

如果由 $x_1<x_2$ 可以推出 $f(x_1)<f(x_2)$或 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 f 是**严格增加**的(strictly increasing)或**严格减少**的函数.

单调增加与单调减少的函数统称为**单调函数**(monotone function).

定理 2.5.2 设 f 是$[a,b]$上的单调函数，则

(1) f 在$[a,b]$上只有第一类不连续点；

(2) f 的不连续点最多是可列的；

(3) 对每个 $x_0\in[a,b]$，$f(x_0-0)\triangleq\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$及 $f(x_0+0)\triangleq\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$同时存在.

定义 2.5.3 设 f 在$[a,b]$上单调增加，$x_0\in[a,b]$，称 $f(x_0+0)-f(x_0-0)$为 f 在 x_0 的**跳跃**(jump).

定理 2.5.4 设 f 是$[a,b]$上的单调增加函数，则 f 在所有的不连续点的跳跃值总和不超过 $f(b)-f(a)$

定理 2.5.5 设 f 是$[a,b]$上的单调函数，则 f 在$[a,b]$上几

乎处处存在有限的导数，它的导函数 f' 在$[a,b]$上勒贝格可积，并且有

$$\int_{[a,b]} f'\mathrm{d}m \leqslant f(b) - f(a).$$

定义 2.5.6 设 f 是$[a,b]$上的实值函数. 对于区间$[a,b]$的任一个分割 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，令

$$\bigvee_a^b(f;T)=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|,$$

对于$[a,b]$所有可能的分割 T，如果$\sup\limits_T\{\bigvee\limits_a^b(f;T)\}<+\infty$，则称 f 是$[a,b]$上的**有界变差函数**(bounded variation function). 又令

$$\bigvee_a^b(f)\triangleq\sup_T\{\bigvee_a^b(f;T)\},$$

称$\bigvee\limits_a^b(f)$为 f 在$[a,b]$上的**全变差**(total variation).

例 2.5.7 常见的有界变差函数有：

(1) $[a,b]$上的任意单调函数是有界变差的，并且

$$\bigvee_a^b(f)=|f(b)-f(a)|.$$

(2) 若 f 在$[a,b]$上满足利普希茨(Lipschitz)条件，即存在正数 K，使得对于任意的 $x_1\in[a,b]$、$x_2\in[a,b]$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant K|x_1-x_2|,$$

则 f 是$[a,b]$上的有界变差函数.

(3) 如果 f 在$[a,b]$上处处存在有限的导数，并且存在正数 K，使得

$$|f'(x)|\leqslant K,\qquad x\in[a,b],$$

则 f 是$[a,b]$上的有界变差函数.

例 2.5.8 设

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

则 H 是 $[-1,1]$ 上的有界变差函数，并且

$$\bigvee_{-1}^{1}(H)=1.$$

但是 H 在 $[-1,1]$ 上不是连续的. 称 H 为**赫维赛德**(Heaviside)**函数**.

例 2.5.9 设

$$f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{\pi}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

f 在 $[0,1]$ 上连续，但 f 不是 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

解 对于 $[0,1]$ 的分割 T_n：$0<\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{n-1}<\cdots<1$，

$$\begin{aligned}\bigvee_0^1(f;T_n)&=\left|-1-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right|\\&\quad+\cdots+\left|(-1)^n\frac{1}{n}-0\right|\\&=\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\cdots+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

显然，当 $n\to+\infty$ 时，有 $\bigvee_0^1(f;T_n)\to+\infty$，于是 f 在 $[0,1]$ 上不是有界变差的.

定理 2.5.10 $[a,b]$ 上的任意有界变差函数 f 可以表为两个单调增函数之差.

这个结论称为**约当分解**(Jordan decomposition).

例如，可以取

$$\lambda(x)\triangleq\frac{1}{2}\left[\bigvee_a^x(f)+f(x)\right],\quad x\in[a,b],$$

$$\mu(x)\triangleq\frac{1}{2}\left[\bigvee_a^x(f)-f(x)\right],\quad x\in[a,b].$$

则 λ,μ 都是$[a,b]$上的单调增函数，并且

$$f(x)=\lambda(x)-\mu(x),\quad x\in[a,b].$$

定理 2.5.11 有界变差函数有下列性质：

(1) 若 f 在$[a,b]$上有界变差，则 f 在$[a,b]$上有界.

(2) 若 f 在$[a,b]$上有界变差，$\bigvee\limits_a^b(f)=0$，则 f 在$[a,b]$上为常数.

(3) 若 f 在$[a,b]$上有界变差，则对$[a,b]$中的任意区间$[c,d]$，f 也是在$[c,d]$上的有界变差函数.

(4) 若 f 是$[a,b]$上的有界变差函数，则对于任意的 $c\in[a,b]$，有

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$$

(5) 若 f,g 是$[a,b]$上的有界变差函数，则 $f\cdot g$ 也是$[a,b]$上的有界变差函数.

(6) 若 f 是$[a,b]$上的有界变差函数，则 f 的所有不连续点都是第一类的，并且 f 最多有可列个不连续点.

定理 2.5.12 设 f 是$[a,b]$上的有界变差函数，则 f 在$[a,b]$上几乎处处存在有限的导数，它的导函数 f' 在$[a,b]$上是勒贝格可积的.

2.5.2 黎曼-斯蒂尔切斯积分

定义 2.5.13 设 f,g 是$[a,b]$上的两个有限实值函数，对于$[a,b]$的任一分割

$$T: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b.$$

令

$$\sigma(f;T)\triangleq\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)[g(t_i)-g(t_{i-1})],$$

其中 $\xi_i\in(t_{i-1},t_i)$，$i=1,2,\cdots,n$.

如果当$\max\limits_{1\leq i\leq n}|t_i-t_{i-1}|\to 0$时，对任意选取的$\xi_i\in(t_{i-1},t_i)$，($i=1,2,\cdots,n$)，$\sigma(f;T)$趋于一个共同的极限，则称$f$在$[a,b]$上关于$g$是**黎曼-斯蒂尔切斯可积的**(Riemann-Stieltjes integrable)，并称这个极限为f关于g的黎曼-斯蒂尔切斯积分，简称R-S积分，并记为$\int_a^b f(t)\mathrm{d}g(t)$，或者$\int_a^b f\mathrm{d}g$.

定理 2.5.14 黎曼-斯蒂尔切斯积分具有下列性质：

(1) 若$\int_a^b f_1\mathrm{d}g$，$\int_a^b f_2\mathrm{d}g$都存在，则对于任意的实数α、β，有

$$\int_a^b(\alpha f_1+\beta f_2)\mathrm{d}g=\alpha\int_a^b f_1\mathrm{d}g+\beta\int_a^b f_2\mathrm{d}g.$$

(2) 若$\int_a^b f\mathrm{d}g_1$，$\int_a^b f\mathrm{d}g_2$都存在，则对于任意的实数α，β，有

$$\int_a^b f\mathrm{d}(\alpha g_1+\beta g_2)=\alpha\int_a^b f\mathrm{d}g_1+\beta\int_a^b f\mathrm{d}g_2.$$

(3) 设$a<c<b$，如果下面三个积分都存在，则有

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=\int_a^c f\mathrm{d}g+\int_c^b f\mathrm{d}g.$$

(4) 若$\int_a^b f\mathrm{d}g$与$\int_a^b g\mathrm{d}f$之中有一个存在，则另一个也存在，并且

$$\int_a^b f\mathrm{d}g+\int_a^b g\mathrm{d}f=f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

这就是说，对于黎曼-斯蒂尔切斯积分，分部积分公式仍然成立.

定理 2.5.15 设f在$[a,b]$上连续，g在$[a,b]$上有界变差，则$\int_a^b f\mathrm{d}g$存在，并且

$$\left|\int_a^b f\mathrm{d}g\right|\leqslant\max_{a\leq t\leq b}|f(t)|\cdot\bigvee_a^b(g).$$

定理 2.5.16 设f在$[a,b]$上连续，g的导函数g'在$[a,b]$黎

曼可积，则

$$\int_a^b f\mathrm{d}g = (R)\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

其中等式右端的积分为黎曼积分.

定理 2.5.17 设 g 在$[a,b]$上有界变差，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是一列在$[a,b]$上连续的函数，一致收敛于$[a,b]$上的连续函数 f，则有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n\mathrm{d}g = \int_a^b f\mathrm{d}g.$$

定理 2.5.18 设 f 在$[a,b]$上连续，$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$是一列$[a,b]$上有界变差函数，并且存在正数 M，使得

$$\bigvee_a^b(g_n)\leqslant M,\qquad n=1,2,\cdots,$$

如果$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$在$[a,b]$上逐点收敛于 g，则 g 也是$[a,b]$上的有界变差函数，并且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f\mathrm{d}g_n = \int_a^b f\mathrm{d}g.$$

2.6 绝对连续函数与微分

定义 2.6.1 设 F 是$[a,b]$上的有限实值函数. 如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对于$[a,b]$中任意一组互不相交的区间(α_1,β_1)，$\cdots$，(α_n,β_n)，只要满足 $\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)<\delta$，就有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(\beta_i)-F(\alpha_i)|<\varepsilon$$

则称 F 是$[a,b]$上的**绝对连续函数**(absolutely continuous function).

定理 2.6.2 绝对连续函数是有界变差函数.

定理 2.6.3 设 $f\in L(a,b)$，则函数 $F(t)=\int_{(a,t)}f\mathrm{d}m$ 是区间

$[a,b]$上的绝对连续函数，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)=f(t),\qquad \text{a.e.}.$$

反之，若 F 在$[a,b]$上绝对连续，则其导函数 F' 在$[a,b]$上勒贝格可积，并且

$$\int_{[a,t]}F'\mathrm{d}m=F(t)-F(a),\qquad \forall\, t\in[a,b].$$

定义 2.6.4 设 $f\in L[a,b]$，$t_0\in(a,b)$. 对于任意的满足 $h_1+h_2>0$ 的非负数 h_1,h_2，如果

$$\lim_{h_1+h_2\to 0}\frac{1}{h_1+h_2}\int_{[t_0-h_1,\,t_0+h_2]}|f(t)-f(t_0)|\mathrm{d}m=0,$$

则称 t_0 是 f 的一个**勒贝格点**.

定理 2.6.5 设 $f\in L[a,b]$，则在$[a,b]$中几乎处处都是 f 的勒贝格点. 又若 $t_0\in(a,b)$是 f 的一个勒贝格点，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{[a,t]}f\mathrm{d}m\right)\bigg|_{t=t_0}=f(t_0).$$

定理 2.6.6 设 f 在$[a,b]$上连续，g 在$[a,b]$上绝对连续，则 f 关于 g 的黎曼-斯蒂尔切斯积分可化为勒贝格积分，即

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=\int_{[a,b]}fg'\mathrm{d}m.$$

定理 2.6.7 设 $f\in L[a,b]$，g 在$[a,b]$上绝对连续，并令 $F(t)=\int_{[a,t]}f\mathrm{d}m$，则有

$$\int_{[a,b]}fg\mathrm{d}m=F(b)g(b)-F(a)g(a)-\int_{[a,b]}Fg'\mathrm{d}m.$$

这就是说，分部积分法对于勒贝格积分仍然成立.

2.7 空间 L^p

定义 2.7.1 设 E 为任意可测集，f 是 E 上的可测函数，$p\geq 1$. 如果 $|f|^p$ 在 E 上是勒贝格可积的，则称 f 是 E 上的一个 p 次可积函数. 所有在 E 上 p 次可积的函数构成的集合记为 $L^p(E)$. $L^p(E)(p\geq 1)$ 也称为**勒贝格函数空间**(Lebesgue function space).

对于任意的 $f\in L^p(E)$，称

$$\|f\|_p=\left(\int_E |f|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}$$

为 f 的 p-范数(p norm).

定理 2.7.2 设 E 为任意可测集，$p\geq 1$.

(1) 若 $f\in L^p(E)$，则对于任意复数 α，有 $\alpha f\in L^p(E)$，并且

$$\|\alpha f\|_p=|\alpha|\,\|f\|_p.$$

(2) 若 $f\in L^p(E)$，$g\in L^p(E)$，则 $f+g\in L^p(E)$，并且

$$\|f+g\|_p\leq \|f\|_p+\|g\|_p.$$

定理 2.7.3 设 E 为任意可测集，$p>1$，$q>1$ 满足 $p^{-1}+q^{-1}=1$. 则对任意的 $f\in L^p(E)$，$g\in L^q(E)$，$f\cdot g$ 是 E 上的勒贝格可积函数，并且

$$\left|\int_E f(t)g(t)\mathrm{d}m\right|\leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

定理 2.7.4 设 E 为任意可测集，

(1) 若 $p\geq r\geq q\geq 1$，则有

$$L^r(E)\subset L^p(E)\cap L^q(E).$$

(2) 若 $mE<+\infty$，$p\geq q\geq 1$，则

$$L^p(E)\subset L^q(E).$$

定义 2.7.5 设 E 为任意可测集，$p\geq 1$，$\{f_n\}\subset L^p(E)$，$f\in L^p(E)$，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_p=0$，则称序列 $\{f_n\}$ 在 $L^p(E)$ 中**强收敛**

(strong convergence)于 f,记为 $f_n \xrightarrow{s} f$.

定理 2.7.6 设 E 为任意可测集,$\{f_n\}$ 是 $L^p(E)$ 中的一个序列,满足

$$\lim_{m,n\to+\infty} \|f_m - f_n\|_p = 0,$$

则存在 $f\in L^p(E)$,使得

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

这称为 $L^p(E)$ 的**完备性**(completeness).

定义 2.7.7 设 $f\in C[0,1]$,对每个自然数 n,令

$$B_n(f;t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k},$$

$B_n(f;t)$ 称为 f 的 n 次伯恩斯坦**多项式**.

定理 2.7.8 对于任意的 $f\in C[0,1]$,当 $n\to+\infty$ 时,f 的伯恩斯坦多项式在 $[0,1]$ 上一致地收敛于 f.

定理 2.7.9 设 (a,b) 是一个有限区间,$p\geqslant 1$,对任意的 $f\in L^p(a,b)$,对任意的 $\varepsilon>0$,存在有理系数多项式 φ,使得

$$\|f-\varphi\|_p < \varepsilon.$$

这称为 $L^p(a,b)$ 的**可分性**(separability).

定理 2.7.10 设 (a,b) 是一个有限或无限的区间,则对任意的 $f\in L^p(a,b)$,任意的 $\varepsilon>0$,存在 (a,b) 上的有界连续函数 φ,使得

$$\|f-\varphi\|_p < \varepsilon.$$

定理 2.7.11 $L^p(-\infty,+\infty)(p\geqslant 1)$ 是可分的距离空间. 由函数族 $\{e^{-x^2}, xe^{-x^2}, x^2e^{-x^2}, \cdots, x^ne^{-x^2}, \cdots\}$ 的有理系数线性组合构成的函数集合是一个可列集,它在 $L^p(-\infty,+\infty)$ 中稠密.

同样,$L^p(0,+\infty)(p\geqslant 1)$ 也是可分的.

定义 2.7.12 设 E 为任意可测集,f 是定义在 E 上的可测函数,如果存在常数 $M>0$,使得在 E 上几乎处处有

$$|f(t)| \leqslant M,$$

则称 f 是 E 上的一个**本质有界函数**(essentially bounded function).

E 上的所有本质有界函数构成的集合称为(E 上的)**有界可测函数空间**(bounded measurable function space),记作 $L^\infty(E)$.

对任意的 $f\in L^\infty(E)$,令

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E}|f(x)|$$
$$=\inf\{k:|f(x)|\leqslant k,\text{a. e.}\},$$

称 $\|f\|_\infty$ 为 f 的 ∞-范数(∞-norm).

定理 2.7.13 $L^\infty(E)$ 是完备的,即若 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset L^\infty(E)$,满足

$$\lim_{m,n\to+\infty}\|f_m-f_n\|_\infty=0,$$

则存在 $f\in L^\infty(E)$,满足

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_\infty=0.$$

定理 2.7.14 $L^\infty[0,1]$ 是不可分的距离空间.

解 对任意的 $t\in[0,1]$,令

$$\varphi_t(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ 0, & t<x\leqslant 1,\end{cases}$$

则单参数函数族 $\{\varphi_t\}(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是一个 $L^\infty[0,1]$ 中的不可列子集,并且对于任意的 $t_1\in[0,1]$,$t_2\in[0,1]$,只要 $t_1\neq t_2$,就有

$$\|\varphi_{t_1}-\varphi_{t_2}\|_\infty=1.$$

如果 $L^\infty[0,1]$ 是可分的,则在其中存在一列元素 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$,使得对每个 $t\in[0,1]$,都可以找到这个序列中的某个 f_k,使得

$$\|f_k-\varphi_t\|_\infty<\frac{1}{3},$$

并且对不同的 $t\in[0,1]$,f_k 也不相同.由此推出 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 中的元素不应比 $\{\varphi_t\}(0\leqslant t\leqslant 1)$ 中的元素少.这显然是不正确的,因此 $L^\infty[0,1]$ 不是可分的.

2.8 勒贝格积分的其它定义方法

以上，在建立勒贝格积分之前首先建立了勒贝格测度理论．但是引入勒贝格积分也可以通过其它的途径．可以先有积分理论，而后由积分引出测度；也可以不用测度理论作为工具而用其它方法直接建立积分理论．这里介绍两种定义勒贝格积分的方法．

2.8.1 里斯方法

这种方法首先对于阶梯函数定义积分，然后通过适当的极限过程将积分推到一般的函数类，其实质是基于线性泛函的开拓的概念．这种方法不利用测度理论，但只适用于 $\mathbf{R}^1$ 的情形．

定义 2.8.1 设 (a,b) 是有限或无限区间，将 (a,b) 分成互不相交的有限个区间 $I_1,I_2,\cdots,I_k$．又设 φ 是 (a,b) 上的一个实值函数，具有下述形式

$$\varphi(x)=c_i,\quad x\in I_i\quad(1\leqslant i\leqslant k).$$

其中 $c_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 为常数．则称 φ 是 (a,b) 上的**阶梯函数**(step function)．

定义 2.8.2 设 (a,b) 与 $I_1,I_2,\cdots,I_k$ 同定义 2.8.1，φ 是 (a,b) 上的阶梯函数，其表达式与定义 2.8.1 相同．则 φ 在 (a,b) 上的积分定义为和数 $\sum_{i=1}^{k}c_i|I_i|$，其中 $|I_i|$ 表示区间 $I_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 的长度．

定理 2.8.3 设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 (a,b) 上的一个阶梯函数的递增序列，如果其积分所构成的序列有界，则 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 几乎处处有有穷的极限，即存在 (a,b) 上的一个有限值函数 f，使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x),\qquad \text{a.e.}.$$

定义 2.8.4 用记号 C_0 表示 (a,b) 上所有阶梯函数构成的函数类．又设 f 是 (a,b) 上的一个函数，如果存在 (a,b) 上的一个阶梯

函数的递增序列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，其积分序有界，并使得

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x),\qquad \text{a.e.},$$

则称f属于函数类C_1.

定义 2.8.5 设f是(a,b)上的一个C_1类函数，即存在一个阶梯函数的递增序列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，其积分序列有界并且满足

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x),\qquad \text{a.e.},$$

则定义f在(a,b)上的积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x.$$

其中$\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x$是阶梯函数$\varphi_n(n=1,2,\cdots)$的积，即在定义 2.8.2 中所规定的和式.

积分值$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$与序列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$的选取无关. 也就是说，如果有另外一个满足积分序列有界的递增的阶梯函数序列$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$也使得

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\psi_n(x),\qquad \text{a.e.},$$

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\psi_n(x)\mathrm{d}x$$

因此这个定义是合理的.

定义 2.8.6 设g是(a,b)上的一个函数，如果存在两个C_1类函数f_1,f_2，使得$g=f_1-f_2$，则称g属于函数类C_2. 对于这样的C_2类函数g，它的积分定义为

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

同样，这个值与f_1,f_2的选取无关，即若存在另外两个C_1类

函数 f_3, f_4，使得 $g=f_3-f_4$，则必有

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b f_3(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_4(x)\mathrm{d}x.$$

定义 2.8.7 (a,b)上的 C_2 类函数全体构成(a,b)上的勒贝格函数类，这个函数类与定义 2.4.3 得到函数类 $L(a,b)$是相同的.

2.8.2 基于完备化思想定义勒贝格积分的方法

这种方法是在黎曼积分的基础上，从连续函数出发，利用极限过程定义勒贝格可积函数类和勒贝格积分. 这种方法是基于距离空间的完备化思想，它无需事先建立测度理论，而是先建立勒贝格积分理论，然后由积分理论建立测度理论. 这种途径所获得的勒贝格可积函数类与定义 2.4.3 完全一致；由积分得到的测度也与定义 2.2.6、定义 2.2.7 完全一致.

为了叙述方便，下面仅以 $\mathbf{R}^1$ 为例建立积分和测度理论，但是这种方法完全适用于空间 $\mathbf{R}^n$，其方法和结论的证明过程基本上没有什么差别.

定义 2.8.8 设(a,b)是 $\mathbf{R}^1$ 中的一个有限或无限的区间，φ 是定义在(a,b)中的实值函数. 称集合$\{t\in(a,b) \mid \varphi(t)\neq 0.\}$的闭包为函数 φ 的**支集**(support set)，记作 $\mathrm{supp}\{\varphi\}$. 对任意的函数 φ，其支集 $\mathrm{supp}\{\varphi\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的闭集.

如果 $\mathrm{supp}\{\varphi\}$是(a,b)内的一个紧集(即 $\mathrm{supp}\{\varphi\}$包含于(a,b)中的某个闭区间内)，则称 $\varphi\in C_c(a,b)$. 当 $\varphi\in C_c(a,b)$时，也称 φ 是定义在(a,b)中的具有紧支集的函数.

当$(a,b)=(-\infty,+\infty)$时，$\varphi\in C_c(-\infty,+\infty)$意味存在某个闭区间$[a_1,b_1]$，使 $\mathrm{supp}\{\varphi\}\subset[a_1,b_1]$；当$(a,b)$为有限区间时$(a\neq b)$，$\varphi\in C_c(a,b)$意味着存在正数 δ，使得 $\mathrm{supp}\{\varphi\}\subset[a+\delta,b-\delta]$.

这样得到的函数族$C_c(a,b)$是一个线性空间.

定义 2.8.9 对任意的$\varphi,\psi\in C_c(a,b)$,若规定距离

$$d(\varphi,\psi)\triangleq\int_a^b|\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t$$

(其中积分为黎曼意义下的积分)则$C_c(a,b)$构成一个距离空间,但是这个距离空间不是完备的.

定理 2.8.10 设$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$是距离空间$C_c(a,b)$中的一个基本列,即满足

$$\lim_{m,n\to+\infty}\mathrm{d}(\varphi_m,\varphi_n)=\lim_{m,n\to+\infty}\int_a^b|\varphi_m(t)-\varphi_n(t)|\mathrm{d}t$$
$$=0.$$

则必存在唯一的一个在(a,b)上几乎处处有限的函数f,使得在$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$有某个子序列$\{\varphi_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$满足

$$f(t)=\lim_{j\to+\infty}\varphi_{n_j}(t),\qquad \text{a.e.}.$$

所谓唯一,是指如果存在另一个子列在(a,b)几乎处处收敛于另一个函数g,则必有

$$f(t)=g(t),\qquad \text{a.e.},$$

称这里的f为序列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$的**极限函数**.

定理 2.8.11 设$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$与$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$是$C_c(a,b)$中的两个基本列.如果它们互相等价,即满足

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{d}(\varphi_n,\psi_n)=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b|\varphi_n(t)-\psi_n(t)|\mathrm{d}t$$
$$=0$$

则这两个基本列有相同的极限函数.也就是说,如果基本列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$分别有极限函数$f$与$g$,则必有

$$f(t)=g(t),\qquad \text{a.e.}.$$

反之,如果基本列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$与$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$不是互相等价的,则它们的极限函数也不相同(即在$(a,b)$上不是几乎处处相等的).

定理 2.8.12 设$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$是$C_c(a,b)$中的一个基本列，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t$存在有限；如果$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$与$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$是两个互相等价的基本列，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n(t)\mathrm{d}t.$$

定义 2.8.13 设f是(a,b)上的一个几乎处处有限的函数．如果存在$C_c(a,b)$中的一个基本列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得其中有子序列在$(a,b)$上几乎处处收敛于$f$，则称$f$是$(a,b)$上的一个勒贝格可积函数．

当$f\in C_c(a,b)$时，f在(a,b)上的勒贝格积分就是f在(a,b)上的黎曼积分．当f不是$C_c(a,b)$类函数时，必存在$C_c(a,b)$中的基本列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得其中有子列$\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$在$(a,b)$上几乎处处收敛于$f$，这时定义$f$在$(a,b)$上的勒贝格积分为

$$\int_{(a,b)} f\mathrm{d}m \triangleq \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t.$$

由定理 2.8.12，等式右端的极限是存在的，并且与基本列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$的选取无关．

定义 2.8.14 设$E\subset(-\infty,+\infty)$为一有界集，如果$E$的特征函数$\chi_E$在$(-\infty,+\infty)$上勒贝格可积，则称$E$是一可测集，并且其测度为

$$mE = \int_{(-\infty,+\infty)} \chi_E \mathrm{d}m$$

设$E\subset(-\infty,+\infty)$为任一集合，如果对任意正数$a$，集合$E\cap[-a,a]$可测，则称$E$为可测集，并定义其测度为

$$mE = \lim_{a\to+\infty} m(E\cap[-a,a]).$$

定义 2.8.15 设$E\subset(-\infty,+\infty)$为任意可测集，$f$是定义在$E$上的几乎处处有限的函数．以任意方式将$f$的定义域延拓至

$(-\infty,+\infty)$(例如对任意的 $t\notin E$,可以令 $f(t)=0$),又设 χ_E 是 E 的特征函数,如果乘积函数 $\chi_E f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上勒贝格可积,则称 f 是 E 上的勒贝格可积函数.

2.9 抽象测度

2.9.1 环上的测度

定义 2.9.1 设 X 是一个集合,以后称之为空间或基本集合. $\mathscr{R}$ 是 X 的某些子集构成的一个非空集合族. 如果 $\mathscr{R}$ 具有下列性质:

(1) 若 $E\in\mathscr{R}$、$F\in\mathscr{R}$,则 $E\cup F\in\mathscr{R}$.

(2) 若 $E\in\mathscr{R}$、$F\in\mathscr{R}$,则 $E\backslash F\in\mathscr{R}$,称 $\mathscr{R}$ 是一个**环**(ring).

如果 $\mathscr{R}$ 还有性质:

(3) 若 $E_n\in\mathscr{R}$,$(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{R}$,称 $\mathscr{R}$ 是一个**σ-环**(σ-ring).

例 2.9.2 对于所有的左开右闭的区间作有限的并的运算,得到的集合族是一个环.

直线上所有的博雷尔(Borel)集合构成的族是一个 σ 环;所有的勒贝格可测集构成的族是一个 σ-环.

定理 2.9.3 设 X 是一个空间,$\mathscr{U}$ 是由 X 的某些子集构成的族,则存在一个包含 $\mathscr{U}$ 的最小的环(σ 环)$\mathscr{R}$.

所谓最小,是指如果有另一个环(σ 环)也包含 $\mathscr{U}$,则同时也包含 $\mathscr{R}$.

例 2.9.4 设 $\mathscr{U}$ 是直线上所有开区间构成的族,则由所有博雷尔集构成的 σ 环及由所有勒贝格可测集构成的 σ-环都包含 $\mathscr{U}$;而前者是包含 $\mathscr{U}$ 的最小的 σ 环.

又若 $\mathscr{U}_1$ 是直线上所有左开右闭的区间构成的族,则由 $\mathscr{U}_1$

及 $\mathscr{U}_1$ 中的集合的有限并构成的环是包含 $\mathscr{U}_1$ 的最小的环；而由所有博雷尔集构成的 σ-环是包含 $\mathscr{U}_1$ 的最小 σ 环.

定义 2.9.5 设 X 是一个空间，$\mathscr{R}$ 是由 X 的某些子集构成的环. 包含 $\mathscr{R}$ 的最小的 σ-环称为**由 $\mathscr{R}$ 张成的 σ-环**(σ-ring generated by $\mathscr{R}$)，记为 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$.

由 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 中的所有集合及这些集合的任意子集合构成的集合族记为 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$. 即若集合 $E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$，则或者 $E\in\mathscr{S}(\mathscr{R})$，或者存在某个 $F\in\mathscr{S}(\mathscr{R})$，使得 $E\subset F$. 同时，对任意的 $E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$，$E$ 的任意子集也属于 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$.

定义 2.9.6 设 $\mathscr{R}$ 是一个环，μ 是定义在 $\mathscr{R}$ 上的一个**集合函数**(即按照某种法则，使 $\mathscr{R}$ 中的每个集合 E 对应一个实数 $\mu(E)$，$\mu(E)$ 可以取 $+\infty$). 如果 μ 具有下列性质：

(1) $\mu(E)\geqslant 0$, $\quad\forall E\in\mathscr{R}$

(2) $\mu(\Phi)=0$.

(3) 若 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{R}$ 中一列互不相交的集合，使得 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{R}$，则

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n).$$

称 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的**一个测度**.

定义 2.9.7 设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的一个测度. 如果对任意的 $E\in\mathscr{R}$，由 $\mu(E)=0$ 可以推出 E 的任意子集也属于 $\mathscr{R}$，则称 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的**一个完全测度**(complete measure).

定义 2.9.8 设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的一个测度，如果对任意的 $E\in\mathscr{R}$，存在 $\mathscr{R}$ 中的一个序列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足 $\mu(E_n)<+\infty$，$(n=1,2,\cdots,)$ 并使

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$$

则称 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的一个 **σ-有限的测度**(σ finite measure).

例 2.9.9 设 $\mathscr{R}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中所有的博雷尔集构成的环，则勒贝格测度 m 在这个环上不是完全的测度. 因为测度为零的博雷尔集的子集可能不再是博雷尔集. 但是，如果 $\mathscr{R}$ 是所有的勒贝格可测集构成的环，则勒贝格测度 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的一个完全测度，并且是一个 σ 有限的测度.

2.9.2 测度的扩张

定义 2.9.10 设 $\mathscr{R}$ 是一个环，μ^* 是定义在 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上的一个集合函数. 如果 μ^* 具有下列性质：

(1) $\mu^*(E)\geqslant 0$, $\forall\, E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$.

(2) $\mu^*(\Phi)=0$.

(3) 若 $E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$，$F\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$，满足 $E\subset F$，则 $\mu^*(E)\leqslant\mu^*(F)$.

(4) 设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathscr{R}$ 中的任一序列，则

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n).$$

称 μ^* 是一个**外测度**(outer measure).

定理 2.9.11 设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的一个测度. 在 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上按如下方法构造一个集合函数 μ^*：

对任意的 $E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$，令

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\,\middle|\,E_n\in\mathscr{R},\ (n=1,2,\cdots,)\ \text{并且}\ E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right\}$$

则 μ^* 是 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上的一个外测度，并且对于任意的 $E\in\mathscr{R}$，有

$$\mu^*(E)=\mu(E).$$

这个定理说明，环 $\mathscr{R}$ 上的任一测度可以扩张为 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上的一个外测度.

定义 2.9.12 设$\mathscr{R}$是一个环，μ^*是$\mathscr{H}(\mathscr{R})$上的一个外测度，$E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$. 如果对所有的$A\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$，有

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E'),$$

则称E是μ^*-**可测的**. 其中E'表示E的余集.

定理 2.9.13 设μ是环$\mathscr{R}$上的一个测度，μ^*是由定理 2.9.11 得到的$\mathscr{H}(\mathscr{R})$上的外测度. 记$\mathscr{S}^*$为$\mathscr{H}(\mathscr{R})$中所有μ^*-可测集构成的族，则$\mathscr{S}^*$是一个包含$\mathscr{R}$的σ-环. μ^*限制在$\mathscr{S}^*$上是一个完全的测度；限制在$\mathscr{R}$上与μ相等. 如果μ是σ-有限的，则μ^*也是σ-有限的. 称测度μ^*是测度μ在$\mathscr{S}^*$上的**扩张**(extension).

定理 2.9.14 设$\mathscr{R}$是一个环，$\mathscr{S}(\mathscr{R})$是由$\mathscr{R}$张成的σ环，则$\mathscr{R}$上的任意测度μ在$\mathscr{S}(\mathscr{R})$上有唯一的扩张μ^*. 如果μ是σ有限的，则μ^*也是σ-有限的.

例 2.9.15 设$\mathscr{R}$是由$\mathbf{R}^1$中所有开区间的族张成的环. 对于每个开区间(a,b)，令$\mu(a,b)=b-a$. 由此可以在$\mathscr{R}$上确定一个测度μ. $\mathscr{S}(\mathscr{R})$就是所有博雷尔集构成的σ-环，而$\mathscr{S}^*$恰好是由所有的勒贝格可测集构成的σ-环. μ的扩张，正是勒贝格测度m.

2.9.3 可测函数与积分

定义 2.9.16 设X是一个空间，$\mathscr{S}$是由X的某些子集构成的一个非空的环(σ环). 如果空间X本身也属于$\mathscr{S}$，则称$\mathscr{S}$是X上的一个**σ 代数**(σ algebra).

定义 2.9.17 设X是一个空间，$\mathscr{S}$是X上的一个σ代数，μ是$\mathscr{S}$上的一个测度，则称$(X,\mathscr{S},\mu)$是一个**测度空间**(measure space).

例 2.9.18 设$X=\mathbf{R}^n$，$\mathscr{S}$是由所有勒贝格可测集构成的σ环，m是勒贝格测度，则$(X,\mathscr{S},m)$是一个测度空间.

如果令X为任意的一个勒贝格可测集，$\mathscr{S}$是由X的所有可

测子集构成的 σ 环，则 $(X,\mathscr{S},m)$ 仍是一个测度空间.

定义 2.9.19 设 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 是一个测度空间，f 是定义在 X 上的一个扩充实值函数. 如果对每个实数 c，有

$$\{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathscr{S}.$$

则称 f 是 X 上的一个可测函数.

定义 2.9.20 设 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 是一个测度空间，φ 是定义在 X 上的一个非负简单函数. 即存在互不相交的 $A_1,\cdots,A_n \in \mathscr{S}$，使得

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A$$

及一组非负实数 $c_1,\cdots,c_n$，使得

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x), \qquad x \in X.$$

其中 χ_{A_i} 是 A_i 的特征函数. 则 f 在 X 上关于测度 μ 的积分规定为

$$\int \varphi \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(A_i).$$

定义 2.9.21 设 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 是一个测度空间，f 是定义在 X 上的一个非负的可测函数，f 在 X 上关于 μ 的积分定义为：

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int \varphi \mathrm{d}\mu\right\},$$

其中 φ 是 X 上的非负简单函数，满足

$$\varphi(x) \leqslant f(x), \qquad x \in X.$$

如果这个上确界是有限的，就称 f 在 X 上关于 μ 是**可积**的.

又若 $E \in \mathscr{S}$ 为任一集合，则 f 在 E 上关于 μ 的积分为

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int f \cdot \chi_E \mathrm{d}\mu$$

其中 χ_E 是 E 的特征函数. 如果 $\int_E f \mathrm{d}\mu$ 有限，则称 f 在 E 上关于 μ 可积.

定义 2.9.22 设 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 是一个测度空间，f 是定义在 X 上的任意可测函数. 令

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\},\ f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

则 f^+ 与 f^- 都是 X 上的非负可测函数.如果 f_+ 与 f^- 都在 X 上关于 μ 可积,则称 f 关于 μ 可积.并且 f 关于 μ 的积分规定为

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int f_+ \mathrm{d}\mu - \int f^- \mathrm{d}\mu.$$

对于任意的 $E \in \mathscr{S}$,可类似地定义 f 在 E 上关于 μ 的积分.

2.9.4 勒贝格-斯蒂尔切斯积分

定理 2.9.23 设 g 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的一个单调增加的右连续实值函数.对任意左开右闭的区间 $(\alpha, \beta]$,令

$$\mu((\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha).$$

又设 $\mathscr{R}$ 是由所有的左开右闭的区间及其有限并集构成的环,则在 $\mathscr{R}$ 上存在一个唯一的测度 μ,使得对每个 $(\alpha, \beta]$,有

$$\mu((\alpha, \beta]) = \mu((\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha).$$

定义 2.9.24 设 g,$\mathscr{R}$,μ 同定理 2.9.23.按照定理 2.9.10,构造 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上的外测度 μ^*.再由定理 2.9.13,μ^* 是 $\mathscr{S}^*$ 上的一个完全测度.这个测度称为由 g 确定的**勒贝格-斯蒂尔切斯测度**,记为 μ_g.而 μ^* 可测集构成的 σ 环 $\mathscr{S}^*$ 也与 g 有关,所以记为 $\mathscr{S}_g^*$.

一般来说,不同的 g 确定不同的 $\mathscr{S}_g^*$.但是可以证明,对于任意的单调增加的右连续函数 g,得到的 $\mathscr{S}_g^*$ 都包含了直线上所有博雷尔集合.

定义 2.9.25 设 g 是 $[a,b]$ 上的一个右连续的有界变差函数.g_1,g_2 是两个右连续的单调增函数,使得 $g = g_1 - g_2$.按照定义 2.9.24,g_1 和 g_2 分别在 $[a,b]$ 上确定勒贝格-斯蒂尔切斯测度 μ_1 和 μ_2,以及两个相应的可测集类 $\mathscr{S}_{g_1}$ 与 $\mathscr{S}_{g_2}$.又设 $E \subset [0,1]$ 满足 $E \in \mathscr{S}_{g_1} \cap \mathscr{S}_{g_2}$,$f$ 是定义在 E 上的扩充实值函数.如果 f 关于测度 μ_1、μ_2 都是可测的,并且积分

$$\int_E f\mathrm{d}\mu_1, \quad \int_E f\mathrm{d}\mu_2$$

都存在，则称 f 在 E 上关于 g 是勒贝格-斯蒂尔切斯可积分的，f 在E 上关于 g 的勒贝格-斯蒂尔切斯积分定义为

$$\int_E f\mathrm{d}g \triangleq \int_E f\mathrm{d}\mu_1 - \int_E f\mathrm{d}\mu_2$$

例 2.9.26 设 H 是赫维赛德函数，即

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

设 H 产生的勒贝格-斯蒂尔切斯测度为 μ，可测集类为 $\mathscr{S}$，则对任意的 $E\in\mathscr{S}$，有

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \notin E, \\ 1, & \text{当 } 0 \in E. \end{cases}$$

定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的任意有限函数 f 都是关于 μ 可测的，并且 f 的勒贝格-斯蒂尔切斯积分为

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \notin E, \\ f(0), & \text{当 } 0 \in E. \end{cases}$$

3 空间结构与抽象空间

3.1 集合与空间

3.1.1 空间结构

物理系统的状态往往要由无穷多个参数(自由度)来确定.例如一个物体在时间 t 的温度状态是整个物体上的温度分布 $\theta(\boldsymbol{r})$,它是空间位置向量 $\boldsymbol{r}$ 的函数.这时系统的状态不是物体上个别位置的温度值,而是依赖于无穷多个参数值 $\boldsymbol{r}$ 的函数.又如在通信工程或控制工程中,系统的输入或输出信号都是时间 t 的函数

$$x:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\quad 或\quad x:[0,+\infty)\to\mathbf{R}.$$

x 是依赖于取无穷多个值的参数 t 的量.有时信号是经过采样取得的,即

$$x(t_k),\quad k=0,1,2,\cdots,\quad t_0<t_1<t_2<\cdots.$$

这时参数是离散变化的.依赖于连续变化的参数的量通常称为**函数**;依赖于离散变化的参数的量通常称为**数列**.为了考察物理系统的变化,人们关心的不是系统的某一个状态,而是状态的集合,即函数的集合或数列的集合.例如物体温度分布的集合 $\{\theta(\boldsymbol{r})\mid t_0\leqslant t\leqslant T\}$;通信工程中信号转换时信号的集合.

对于一个集合来说,组成元素确定了,集合就完全确定了,但元素与元素之间并未确定任何关系.为了研究问题的实际需要,往往在各种集合中引入某些不同的确定的关系,赋予集合以某些**空间结构**,不同空间结构的集合称为不同的**空间**.

线性代数的理论依赖于实数或复数的代数结构,这种代数结构主要是由加法和乘法两种运算建立的.例如向量间的线性组合

要用到向量加法和数乘法(即数乘向量的运算),它们分别归结为数的加法和乘法.在一些集合中常引入加法和数乘法两种代数运算,这种空间结构,称为**线性空间结构**.例如对于物体上的温度分布,两个温度分布相加是指在各个位置的两个温度值相加,温度分布乘数 α 是指各点处温度值均乘 α.赋予线性空间结构的集合称为**线性空间**.

初等数学分析的主要结果是在极限理论基础上获得的.极限概念只用到数与数之间(自变量之间以及函数值与极限值之间)的距离,因此距离是更为基础的概念.对于 $x,y\in\mathbf{R}$,距离 $|x-y|$ 是表达实(数)直线上点 x 与点 y 之间远近的一个数.用数学方法求解物理系统的状态时,往往只能得到近似解,希望近似解能任意逼近准确解.为此需要在系统的状态之间给出一种度量,以便确切地规定出"任意逼近"的概念.换言之,有必要将距离概念推广于一般的集合.距离是一种空间结构,称为**距离结构**.一个集合,如果定义了能够反映任意两个元素之间接近程度的距离概念,称为**度量空间**或**距离空间**.

范数是向量长度概念的推广,它也是一种空间结构,称为**范数结构**.赋予范数结构的线性空间称为**赋范线性空间**.赋范线性空间是泛函分析中具有重要意义的概念.在赋范线性空间中,任意两个元素 x 与 y 的距离可以用 $x-y$ 的范数来定义.因此赋范线性空间是特殊类型的度量空间.

要反映具有无穷多个自由度的物理系统的状态集合的属性,必须把代数的线性空间结构与分析的距离结构同时赋予所讨论的集合,成为赋距离的线性空间.这种空间与欧几里得空间 E^n 有许多相似的性质,但由于缺少"角度"这个概念,使得它们没有 E^n 所具有的许多几何性质.由于二维空间 E^2 与三维空间 E^3 中向量之间的夹角是通过内积给出的,从而在空间 E^2 与 E^3 中有正交性、正交投影以及向量的正交分解等重要的几何属性.对于一般的空间

E^n 也能定义内积. 实际的需要使得有必要将内积作为一种空间结构，并称为**内积结构**. 赋予内积结构的线性空间称为**内积空间**. 任何内积空间可以由内积确定一个范数，因此内积空间又是赋范线性空间的一种特殊情形.

从度量空间可以过渡到更广泛、更抽象的拓扑空间.

本章集中介绍以上所述各种空间结构及抽象空间的概念及有关性质.

3.1.2 欧几里得空间

维数 $n\leqslant 3$ 的欧几里得空间 E^n 也称为**几何空间**. 当 $n>3$ 时 E^n 已无直观性，一般在线性代数中讨论. 由于本章中所讨论的各类空间的结构容易看作是 E^n 中某些空间结构的自然推广，这里对 E^n 作一简述.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^n&=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}\\&=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

$\mathbf{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 也称为 **n 维实向量**，数 x_i 称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个**坐标**. 记号 $\mathbf{R}^n$ 仅仅表示一个集合.

欧几里得空间 E^n 的概念是几何空间概念的推广. 首先在集合 $\mathbf{R}^n$ 中引入线性空间结构，这是指定义如下两种运算：

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\triangleq(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),\tag{3.2}$$
$$\forall\,\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n.$$

$$\alpha\boldsymbol{x}\triangleq(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n),\tag{3.3}$$
$$\forall\,\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\alpha\in\mathbf{R},$$

$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 是由 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 相应坐标相加定义的，称为向量的**加法**. $\alpha\boldsymbol{x}$ 是由 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量乘 α 定义的，称为向量的**数乘法**. 向量的加法与数乘法统称为**线性运算**.

定理 3.1.1 由公式(3.2)定义的向量加法具有如下性质：

(1) **交换律** $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$, $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in \mathbf{R}^n$

(2) **结合律** $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$, $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in \mathbf{R}^n$

(3) $\mathbf{R}^n$ 中有唯一的一个向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$，使得

$$\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x},\quad \forall\, \boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n$$

显然，零向量就是原点即 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$；

(4) 对于每个 $\boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n$，在 $\mathbf{R}^n$ 中存在唯一的一个向量称为 $\boldsymbol{x}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{x}$，使得

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}.$$

显然，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的负向量由 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量取相反符号得出，即 $-\boldsymbol{x}=(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)$.

定理 3.1.2 由公式(3.3)定义的向量的数乘法具有如下四条性质：

(1) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$, $\forall\, \boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n$;

(2) $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$, $\forall\, \boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n$, $\alpha,\beta\in \mathbf{R}$;

(3) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$, $\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in \mathbf{R}^n$, $\alpha\in \mathbf{R}$;

(4) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$, $\forall\, \boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n$, $\alpha,\beta\in \mathbf{R}$;

其中向量的加法由式(3.2)定义.

集合 $\mathbf{R}^n$ 赋予上述线性运算后称为**实线性空间**(real linear space)或**实向量空间**(real vector space).

其次，再在实线性空间中引入**内积**，用记号 $(\cdot,\cdot)$ 表示，它是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射，或者说是 $2n$ 元的函数，定义为

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,\tag{3.4}$$

$$\forall\, \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in \mathbf{R}^n.$$

向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是一实数.

定理 3.1.3 由公式(3.4)定义的内积具有下列四条性质：

(1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$;

(2) $(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$;

(3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$;

(4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$.

定义 3.1.4 集合 $\mathbf{R}^n$ 赋予式(3.2)和(3.3)定义的线性运算以及式(3.4)定义的内积后称为 ***n* 维欧几里得空间**(n dimensional Euclidean space)，记作 E^n 或仍记作 $\mathbf{R}^n$.

几何空间中向量的长度，向量间的距离与夹角等概念可推广到一般的 E^n 中.

定义 3.1.5 设 $\boldsymbol{x}\in E^n$，非负实数 $\|\boldsymbol{x}\|\triangleq(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的**长度**. 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E^n$，称 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\triangleq\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**距离**.

定理 3.1.6(柯西不等式) 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E^n$，则

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

其中等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 中一个是另一个的常数倍.

定理 3.1.7 定义 3.1.5 的向量长度具有如下性质：

(1) **正定性** $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时 $\|\boldsymbol{x}\|=0$；

(2) **齐次性** $\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$；

(3) **三角不等式** $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

从柯西不等式可直接推出三角不等式.

定理 3.1.8 定义 3.1.5 的向量之间的距离具有下列性质：

(1) **正定性** $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 时 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$；

(2) **对称性** $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$；

(3) **三角不等式** $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\leqslant d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$.

定义 3.1.9 在 $\mathbf{E}^n$ 中，非零向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**夹角**记作 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$，规定为

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\cos^{-1}\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|},\quad 0\leqslant\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\leqslant\pi.$$

由定义看出，对非零向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 有

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0.$$

因此可以直接移植几何空间中关于正交的概念.

定义 3.1.10 设 $x,y\in E^n$. 如果 $(x,y)=0$，则称 x 与 y **正交**或**相互垂直**，记作 $x\perp y$.

这个定义也适用于零向量，且任何向量与零向量正交.

由定义 3.1.10 推出 E^n 中同样有**勾股定理**：

$$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2,\ \forall\, x,y\in E^n \text{ 且 } x\perp y. \tag{3.5}$$

3.1.3 酉空间

欧几里得空间是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的一种空间. 酉空间实际上就是复数集 $\mathbf{C}$ 上的欧几里得空间. 因此仅需介绍酉空间与欧几里得空间的主要区别.

积集 $\mathbf{C}^n=\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\cdots\times\mathbf{C}$ 中的元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 维复向量，用 $\mathbf{C}^n$ 代替 $\mathbf{R}^n$，用 $\mathbf{C}$ 代替 $\mathbf{R}$，便可仿照式(3.2)与(3.3)在 $\mathbf{C}^n$ 中定义复向量的线性运算——加法与数乘法，且仍然成立定理 3.1.1 与定理 3.1.2 中的性质.

$\mathbf{C}^n$ 中的内积与 E^n 中的内积有所不同，定义为

$$(x,y)=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n, \tag{3.6}$$

$$\forall\, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{C}^n,$$

其中 $\bar{y}_i$ 是 y_i 的共轭复数.

定理 3.1.11 式(3.6)定义的内积具有下列性质：

(1) $(x,y)=\overline{(y,x)}$；

(2) $(cx,y)=c(x,y)$；

(3) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$；

(4) $(x,x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=\mathbf{0}$ 时 $(x,x)=0$.

其中 x,y,z 是 $\mathbf{C}^n$ 中任意的向量，c 为任意的复数.

定义 3.1.12 集合 $\mathbf{C}^n$ 赋予复向量线性运算及式(3.6)定义的内积后称为**酉空间**(unitary space)，仍记作 $\mathbf{C}^n$.

由式(3.6)，有 $(x,x)\geqslant 0$，仍可定义 $\mathbf{C}^n$ 中向量的**长度**和**距离**为

$$|x|=(x,x)^{1/2},\ d(x,y)=|x-y|,$$

柯西不等式(定理 3.1.6)在 $\mathbf{C}^n$ 中仍成立.

在 $\mathbf{C}^n$ 中,仍可仿照定义 3.1.10 规定正交概念:如果 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{C}^n$ 有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$,则称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ **正交**或**相互垂直**.

酉空间与欧几里得空间内积结构的差异确保了两者在长度、距离和正交等概念上的一致.

3.2 线性运算 线性空间

3.2.1 线性运算

线性空间在线性代数中有详尽的讨论,但是常用的许多抽象空间往往包含线性空间结构(或者说以线性空间为基础),为使读者能较顺利地使用本手册,下面给出线性空间内容的一个概要.

抽象的线性空间就是引入了线性空间结构的抽象集合,已成为近代物理科学中一个重要的数学描述工具.其原始思想可追溯至牛顿时代,开始于描述力学中力和速度等基本概念.

线性运算中的数乘法要用数去乘集合的元素,因而对一般的集合有一个在什么范围内建立线性空间结构的问题.为此,先引进数域的概念.

定义 3.2.1 设 P 是某些复数所成之集合,其中包括 0 与 1.如果 P 对四则运算封闭,即 P 中任意两数(可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍是 P 中的数,则称 P 为一个**数域**(number field).

例如,集合 $\mathbf{C}$,$\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{Q}$ 都是数域.整数全体 $\mathbf{Z}$ 则不是数域.

定义 3.2.2 设集合 $S\neq\varnothing$,P 是一数域.如果有一映射 $\varphi:S\times S\to S$,记其在任一点 $(x,y)\in S\times S$ 的象 $\varphi(x,y)=x+y(\in S)$,它满足条件:

(1) $x+y=y+x$, $\forall\, x,y\in S$;

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall\, x,y,z\in S$;

(3) S 中存在唯一的一个元素记作 0，称为**零元素**(zero element)，使得 $x+0=x$，$\forall x\in S$；

(4) 每一 $x\in S$，在 S 中存在唯一的一个元素记作 $-x$，称为 x 的**负元素**(negative element)，使得 $x+(-x)=0$，则称映射 φ 是集合 S 的一个**加法**(addition)。如果又有一个映射 $\psi: P\times S\to S$，记其任一点 $(\alpha,x)\in P\times S$ 的象 $\psi(\alpha,x)=\alpha\cdot x$ 或 $\alpha x(\in S)$，它满足条件：

(1) $1x=x$，　$\forall x\in S$；

(2) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$，　$\forall \alpha,\beta\in P$，$x\in S$；

(3) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$，　$\forall \alpha\in P$，x，$y\in S$；

(4) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$，　$\forall \alpha,\beta\in P$，$x\in S$，

则称映射 ψ 是集合 S 在数域 P 上的一个**数乘法**(scalar multiplication)。加法和数乘法一起统称为集合 S 在数域 P 上的**线性运算**(linear operation)。

注意，定义中对线性运算采用了通常的数的加法记号"+"与乘法记号"·"，但是它们有不同的含意。为了区别，有时分别用"$\oplus$"和"$\circ$"来表示一般数集上定义的加法与数乘法。

例 3.2.3　(1) S 是次数≤n 的实系数多项式全体，通常的多项式加法及数与多项式的乘法是集合 S 在实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性运算。如果 S 是次数等于 n 的实系数多项式全体，则上述两种运算不是 S 在 $\mathbf{R}$ 上的线性运算，因为两个 n 次多项式之和可以是次数 $<n$ 的多项式而不属于 S。

(2) S 是正实数全体，定义加法$\oplus$与数乘法$\circ$如下：

$$x\oplus y=xy,\quad \alpha\circ x=x^{\alpha},\quad x,y\in S,\quad \alpha\in \mathbf{R}.$$

容易验证，$\oplus$与$\circ$是 S 在 $\mathbf{R}$ 上的线性运算。

3.2.2 线性空间

定义 3.2.4　如果规定了非空集合 S 在数域 P 上的线性运算

"+"与"·",则 S,P,+与·在一起称为一个**线性空间**(linear space)或**向量空间**(vector space),有时记作 $(S;P;+,\cdot)$,并称 S 的元素为**向量**(vector).

在叙述上,常说"X(或 S)是数域 P 上的线性空间"或"X 是一个线性空间",指的就是某个 $(S;P;+,\cdot)$.

通常,$(S;\mathbf{R};+,\cdot)$ 称为**实向量空间**(real vector space),$(S;\mathbf{C};+,\cdot)$ 称为**复向量空间**(complex vector space). 特别,E^n 是实向量空间,$\mathbf{C}^n$ 是复向量空间.

例 3.2.3 中的集合、数域和线性运算均构成线性空间.

例 3.2.5 (1) 元素属于数域 P 的 $m\times n$ 矩阵全体,按矩阵的加法及数与矩阵的乘法,构成 P 上的一个线性空间.

(2) 定义在区间 $[a,b]$ 上的实函数全体,按函数的加法及数与函数的乘法,构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

(3) 集合 $\mathbf{C}^r[a,b]$ 按(2)所说的线性运算构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

(4) 在区间 $[a,b]$ 上黎曼可积的实函数全体,按(2)所说的线性运算,构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

(5) 每个数域 P,按数的加法与乘法,构成在 P 自身上的线性空间.

在 $(S;P;+,\cdot)$ 中,利用负元素,可定义**减法**(subtraction)如下:

$$x-y=x+(-y),\ \forall x,y\in S. \tag{3.7}$$

3.2.3 线性子空间

定义 3.2.6 设 V 是 $(S;P;+,\cdot)$ 的一个非空子集,如果它对运算+与·封闭,即

$$x+y\in V,\forall x,y\in V;\quad \alpha x\in V,\quad \forall x\in V,\quad \alpha\in P,$$

或等价地写成

$$\alpha x + \beta y \in V, \quad \forall\, x, y \in V, \quad \alpha, \beta \in P,$$

则 V 对两种运算也构成在 P 上的线性空间，称为 $(S;P;+,\cdot)$ 或 S 的一个**线性子空间**，简称**子空间**(supspace).

例 3.2.7 (1) 在 $(S;P;+,\cdot)$ 中，单个零向量构成的子集和集合 S 本身都是线性子空间，有时把它们称为**平凡子空间**(trivial subspace).

(2) 对每个固定的整数 k，$0\leqslant k\leqslant n$，集合

$$V = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$$

是 E^n 的线性子空间.

定义 3.2.8 设 V 与 W 是 $(S;P;+,\cdot)$ 的子空间，集合 $\{x+y \mid x\in V, y\in W\}$ 称为 V 与 W 的**和**(sum)，记作 $V+W$. 如果还有 $V\cap W=\{0\}$，则称和 $V+W$ 为**直和**(direct sum).

定理 3.2.9 设 V 与 W 是 $(S;P;+,\cdot)$ 的子空间，则

(1) 交 $V\cap W$ 也是子空间；

(2) 和 $V+W$ 也是子空间；

(3) $V+W$ 为直和的充分必要条件是它的每个向量 z 的分解式 $z=x+y$，$x\in V$，$y\in W$ 是唯一的.

对于欧几里得空间 E^n 可以引进子空间之间正交的概念.

定义 3.2.10 设 V 与 W 是 E^n 的子空间，如果有

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0, \ \forall\, \boldsymbol{x} \in V, \boldsymbol{y} \in W,$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 是 E^n 的内积，则称 V 与 W **正交**(orthogonal)，记作 $V\perp W$. 如果向量 $\boldsymbol{x}\in E^n$ 有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，$\forall\, \boldsymbol{y}\in V$，则称 $\boldsymbol{x}$ 与 V **正交**，记作 $\boldsymbol{x}\perp V$. 如果 $V\perp W$ 而且 $V+W=E^n$，则称 W 是 V 的**正交补**(orthogonal complement)，并记 W 为 $V^{\perp}$.

定理 3.2.11 (1) 若子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 两两正交，则和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和.

(2) E^n 的每个子空间 V 有唯一的正交补 $V^{\perp}$.

3.2.4 线性相关与线性无关

定义 3.2.12 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $(S;P;+,\cdot)$ 中的向量，如果存在不全为零的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in P$，使得等式

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0\text{，成立，}$$

则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是**线性相关**(linear dependence)。否则，即如果上述等式只有 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ 时成立，称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是**线性无关**(linear independence)。

在线性空间中，由于定义了线性运算，才使形如 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$ 的表示式有意义，通常称这种表示式为向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**线性组合**(linear combination)。每个线性组合是线性空间中的一个向量。反过来，如果一个向量 x 可以表示为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个线性组合，即存在一组数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得 $x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$，则称 x 可以经 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ **线性表示**(linear representation)。

例 3.2.13 次数小于等于 n 的关于变元 t 的实系数多项式全体在 $\mathbf{R}$ 上构成的线性空间中，$1,t,t^2,\cdots,t^n$ 是线性无关的，且空间中每个元素(多项式)均可经它们线性表示。

线性无关的概念可以推广到无穷多个向量的情形。设向量集合 $\{x_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是无限集，如果其中任何有限多个向量都是线性无关的，则称这个向量集合是**线性无关集**(linearly independent set)。

例 3.2.14 定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的三角函数集合

$$\{1,\cos\theta,\sin\theta,\cos2\theta,\sin2\theta,\cdots,\cos n\theta,\sin n\theta,\cdots\}$$

是线性无关集。

3.2.5 维数与基

定义 3.2.15 设 $X=(S;P;+,\cdot)$，向量集合 $A\subset X$。

(1) X 中包含 A 的所有子空间的交仍是 X 的一个子空间，称为**由 A 生成的子空间**(subspace spanned by A)，记作 span$A$. 如果 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是有限集，显然有

$$\text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=\{x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \mid \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in P\},$$

并称为**由向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成的子空间**(subspace spanned by the vectors $x_1,x_2,\cdots,x_n$).

(2) 由有限个向量生成的空间称为**有限维向量空间**(finite dimensional vector space). 如果 $X=\text{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关，则称 n 是 X 的**维数**(dimension)，记作 $\dim X=n$，称 X 是 **n 维向量空间**(n-dimensional vector space)，并称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组**基**(basis). 这时，任一向量 $x\in X$ 有唯一的线性表示：

$$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n,$$

其中系数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为 x 在基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 下的坐标(coordinate)，记作 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

(3) 如果 X 中存在由无穷多个向量组成的线性无关集，则称 X 是**无限维向量空间**(infinite dimensional vector space).

例 3.2.16 例 3.2.13 表明次数小于等于 n 的实系数多项式全体构成的线性空间是 $n+1$ 维的，$1,t,t^2,\cdots,t^n$ 是一组基，因此可表示为 span$\{1,t,t^2,\cdots,t^n\}$. 但是所有实系数多项式所成的线性空间是无限维的.

定义 3.2.17 设 X 与 Y 是数域 P 上的两个线性空间，如果存在一一对应的映射 $f:X\to Y$，使得

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y),\ \forall\ x,y\in X,\alpha,\beta\in P,$$

则称 X 与 Y **同构**(isomorphism)，记作 $X\simeq Y$，f 称为**同构映射**(isomorphic mapping).

彼此同构的线性空间可视为同一的. 线性代数的一个重要结果是数域 P 上任一个 n 维线性空间都与 $P^n=P\times P\times\cdots\times P$ 同构.

在 E^n 中，由于有正交概念，可以考虑两两正交的非零向量组，并把它们称为**正交向量组**(system of orthogonal vectors). 容易证明正交向量组中的诸向量是线性无关的.

定义 3.2.18 在 E^n 中，n 个向量组成的正交向量组构成一组基，称为**正交基**(orthogonal basis)；单位(长度为1的)向量组成的正交基称为**标准正交基**(standard orthogonal basis).

由定义，若 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是标准正交基，则有

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\begin{cases}1, & 当\ i=j,\\ 0, & 当\ i\neq j,\end{cases}$$

在这组基下，任一向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 可通过内积简单地表出：

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\alpha_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

$$\alpha_i=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varepsilon}_i),\ i=1,2,\cdots,n$$

而且，这时的内积有特别简单的表达式

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n,$$

其中 $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\alpha_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$，$\boldsymbol{y}=\beta_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\beta_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+\beta_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$.

定义 3.2.19 设 V 是 E^n 的子空间，$V^\perp$ 是 V 的正交补，则任一向量 $\boldsymbol{x}\in E^n$ 均可唯一地分解成

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\quad \boldsymbol{x}_1\in V,\ \boldsymbol{x}_2\in V^\perp.$$

通常称 $\boldsymbol{x}_1$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 在子空间 V 上的**正交投影**(orthogonal projection).

可以证明，如果向量(点)$\boldsymbol{x}_1\in V$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的距离为最小，则 $\boldsymbol{x}_1$ 是 $\boldsymbol{x}$ 在 V 上的投影.

3.3 距离　度量空间

3.3.1 距离

在抽象的集合中引进距离量度，主要目的在于刻画“任意逼近”的概念. 如果把集合的元素看作空间中的点，距离就是表达两点之间远近的数. 欧几里得空间 E^n 中距离的三条基本性质(见定理 3.1.8)为我们提供了一般集合中的距离概念应具有的属性，它们的直观含义是：

(1) 任一点到它自己的距离等于零，两不同点之间的距离大于零；

(2) 从 x 到 y 的距离与从 y 到 x 的距离相等；

(3) 由两点之间直线段为最短引伸出来的三角不等式，即三角形两边之和大于第三边.

将以上属性用数学语言描述，就是距离的定义.

定义 3.3.1　设集合 $S\neq\varnothing$，如果实值函数 $\rho: S\times S\to\mathbf{R}$ 满足下列三个条件.

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$,

$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$,

其中 x,y,z 是 S 中任意的点，则称 ρ 为 S 上的**距离(函数)**(distance function)或**度量**(metric).

例 3.3.2　(1) 在集合 $\mathbf{R}^n$ 上定义函数 ρ_1 与 ρ_2,

$$\rho_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,\quad \rho_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|,$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任意的点. 不难验证 ρ_1 与 ρ_2 满足定义 3.3.1 的三个条件，因此都可用作 $\mathbf{R}^n$

上的距离.

(2) 在集合 $C[a,b]$ 上定义函数 ρ,

$$\rho(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|,\ \forall\ x,y\in C[a,b]$$

ρ 是 $C[a,b]$ 上的距离.

一般,在一个给定的集合上可定义出种种距离.例如当 ρ 是集合 S 上的一个距离时,便可由

$$\tilde{\rho}(x,y)\triangleq\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$ 确定出 S 上的一个新的距离 $\tilde{\rho}$.

3.3.2 度量空间

定义 3.3.3 如果在非空集合 S 上定义了一个距离 $\rho: S\times S\to\mathbf{R}$,则 S 与 ρ 在一起,称为一个**度量空间**(metric space),记作 (S,ρ). S 中的点或子集仍分别称为 (S,ρ) 中的点或子集.

注意,同一集合与不同的距离结合构成不同的距离空间.例如,$\mathbf{R}^n$ 与定义 3.1.5 中的欧几里得空间的距离 d 结合,与例 3.3.2 的(1)中的距离 ρ 及 ρ_2 结合,分别构成不同的度量空间 $(\mathbf{R}^n,d)$, $(\mathbf{R}^n,\rho_1)$, $(\mathbf{R}^n,\rho_2)$.

例 3.3.4 (1) 集合 $C[a,b]$ 按例 3.3.2 的(2)确定的距离是一个度量空间,按距离

$$\rho(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\,dt$$

也是一个度量空间.

(2) 在变分法与微分方程的稳定性理论中,要考察集合 $C^n[a,b]$ 中两元素 x 与 y 的逼近程度,对于任意的 $t\in[a,b]$,不仅要求 $|x(t)-y(t)|$ 很小,而且要求 $|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 很小.因此常引进距离

$$\rho(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\max_{a\leq t\leq b}|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|$$

或

$$\rho(x,y) = \max_{0 \le k \le n} \max_{a \le t \le b} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|.$$

(3) 设 S 是任一集合，对任意的 $x,y \in S$，定义

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & 当 x = y, \\ 1, & 当 x \neq y, \end{cases}$$

构成一个度量空间 (S,ρ) 称为**离散度量空间**(discrete metric space).

定义 3.3.5 设 A 是 (S,ρ) 的子集，则 ρ 在 $A \times A$ 上的限制 $\rho|_{A\times A}: A \times A \to \mathbf{R}$ 是 A 上的一个距离. 因此 $(A, \rho|_{A\times A})$ 也是一个度量空间，称为 (S,ρ) 的一个**子空间**，简记作 (A,ρ).

定义 3.3.6 设 (S_1,ρ_1) 与 (S_2,ρ_2) 是两个度量空间. 现令

$$S = S_1 \times S_2,$$

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = [\rho_1^2(x_1,x_2) + \rho_2^2(y_1,y_2)]^{1/2},$$

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in S_1 \times S_2,$$

则 (S,ρ) 是一个度量空间，称为 (S_1,ρ_1) 与 (S_2,ρ_2) 的**积空间**(product space)，记作 $(S_1,\rho_1) \times (S_2,\rho_2)$.

定义 3.3.7 如果度量空间 (S_1,ρ_1) 与 (S_2,ρ_2) 之间存在一个一一对应的映射 f，使得

$$\rho_1(x,y) = \rho_2(f(x),f(y)), \forall x,y \in S_1,$$

则称 f 是从 (S_1,ρ_1) 到 (S_2,ρ_2) 上的**等距映射**(isometric mapping)，并称这两个空间是**等距同构**(isometric isomorphism)的.

3.3.3 开集与闭集

开集、闭集、闭包和收敛点列是度量空间的四个重要的基本概念，可以在开球(邻域)的基础上给出它们的定义. 它们是以几何空间 E^1，E^2，E^3 中的点集、区间或区域、以及点列极限等为背景的，从它们出发能够建立起度量空间的理论，并且可以自然地过渡到拓扑空间.

在度量空间中，虽然点本身已解除用实数刻画的限制，但一切概念和结论的产生总是通过距离函数用实数来刻画的.

定义 3.3.8 设点 $x_0 \in (S,\rho)$，ε 是任给的正数. 集合 $B(x_0,\varepsilon)=\{x\in S \mid \rho(x_0,x)<\varepsilon\}$ 称为以 x_0 为中心、以 ε 为半径的**开球**(open ball)，也称为点 x_0 在 (S,ρ) 中的**ε-邻域或邻域**(neighborhood).

"球"这个词来源于通常的三维空间 E^3. 在一般的度量空间中，"球"已无三维球的外形了，甚至可以只是单个点.

例 3.3.9 集合 $C[a,b]$ 按例 3.3.2 的(2)定义距离的度量空间中，若用 θ 表示在 $[a,b]$ 上恒等于 0 的函数，则 $B(\theta,1)$ 是所有在 $[a,b]$ 上严格界于以 t 轴为对称轴，宽度为 2 的矩形区域里的连续函数全体，如图 3.1.

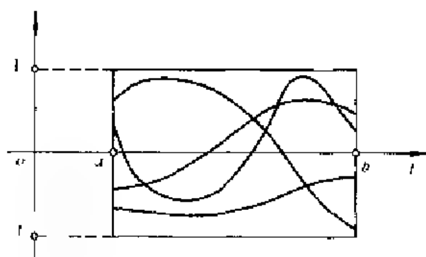


图 3.1 $C[a,b]$ 中的 $B(\theta,1)$

例 3.3.10 在离散度量空间(见例 3.3.4 的(3))中，

$$B(x_0,\varepsilon)=\begin{cases}\{x_0\}, & \text{当 } 0<\varepsilon\leqslant 1,\\ (S,\rho), & \text{当 } \varepsilon>1.\end{cases}$$

即 $B(x_0,\varepsilon)$ 或者是包含点 x_0 的单点集，或者是整个空间.

定理 3.3.11 (S,ρ) 中的开球具有以下性质：

(1) 任一点 $x\in S$ 都有非空开球：$x\in B(x,\varepsilon)$，ε 是任一正数；

(2) 若点 $x\in B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2)$，则存在 x 的开球 $B(x,\varepsilon)\subset B(x_1,\varepsilon_1)\cap B(x_2,\varepsilon_2)$.

定义 3.3.12 设 A 是 (S,ρ) 的一个子集. 若 $x\in A$ 且存在开球 $B(x,\varepsilon)\subset A$,则称 x 为 A 的一个**内点**(interior point). 若 $x\in A^c=S-A$ 且存在开球 $B(x,\varepsilon)\subset A^c$,则称 x 为 A 的一个**外点**(exterior point). 若 $x\in S$ 既非 A 的内点也非 A 的外点(即任一 $B(x,\varepsilon)$ 与 A 及 A^c 的交集均非空),则称 x 为 A 的一个**边界点**(boundary point). A 的内点全体称为 A 的**内部**(interior),记作 intA 或 A°. A 的外点全体称为 A 的**外部**(exterior),记作 A^e. A 的边界点全部称为 A 的**边界**(boundary),记作 A^b 或 ∂A(见图 3.2).

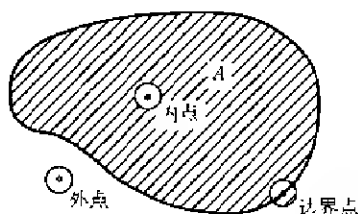


图 3.2 (S,ρ) 中子集 A 的内点、外点、边界点

定义 3.3.13 设 A 是 (S,ρ) 的一个子集. 若 $A=\text{int}A$,即对任一 $x\in A$ 存在 $B(x,\varepsilon)\subset A$,则称 A 是 (S,ρ) 中的**开集**(open set); 若 $S-A$ 是 (S,ρ) 中的开集,则称 A 为 (S,ρ) 中的**闭集**(closed set).

例 3.3.14 (1) 在 E^1 中,开区间是开集,闭区间是闭集,而半开半闭区间 $[a,b)(b\neq+\infty)$ 与 $(a,b]\ (a\neq-\infty)$ 皆既非开集也非闭集.

(2) 若 (S,ρ) 的集合 S 是有限集, $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 令 ε 适合

$$0<\varepsilon<\min_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\neq j}}\rho(x_i,x_j),$$

则有

$$B(x_i,\varepsilon)=\{x_i\},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

因此每一点 x 是包含它的任一子集的内点，可见 S 的任一子集，特别是单点子集都既是开集又是闭集.

定理 3.3.15 (1) $A^{\circ}\subset A\subset A^{\circ}\cup A'$, $A^{c}=(A^{*})^{\circ}$, $A^{c}=(A^{c})'$.

(2) A 是开集$\Leftrightarrow A$ 是若干开球的并集.

(3) $\operatorname{int}A$ 是开集.

下面是描述开集和闭集基本属性的两个重要定理.

定理 3.3.16 (S,ρ)中的开集具有下列三性质：

(1) S 与$\varnothing$是开集；

(2) A_1 与 A_2 是开集$\Rightarrow A_1\cap A_2$ 是开集；

(3) $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$是开集$\Rightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 是开集.

定理 3.3.17 (S,ρ)中的闭集具有下列三性质：

(1) S 与$\varnothing$是闭集；

(2) A_1 与 A_2 是闭集$\Rightarrow A_1\cup A_2$ 是闭集；

(3) $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$是闭集$\Rightarrow\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 是闭集.

定理 3.3.16 与定理 3.3.17 表明，有限多个开集的交集或任意多个开集的并集都是开集，有限多个闭集的并集或任意多个闭集的交集仍是闭集.

例 3.3.18 (S,ρ)中任一单点集$\{a\}$是闭集，因为 $S-\{a\}$是开集. 可见 S 的任一有限子集也是闭集. 由此，直线 E^1 上的开集 $A=\{x|0<x<1\}$可以看作无穷多个闭集(如单点集或有限点集)的并集，说明无穷多个闭集的并集不一定是闭集；反之，$\bigcap_{0<x<1}(\mathbf{R}-\{x\})=A^{c}=\mathbf{R}-A$，说明无穷多个开集的交集可以是闭集. 比如 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$.

3.3.4 聚点与闭包

定义 3.3.19 设 A 是(S,ρ)的一个子集，$x\in S$. 如果 x 的任一邻域都包含 $A-\{x\}$（当 $x\notin A$ 时 $A-\{x\}=A$）的一个点，即

$$B(x,\varepsilon)\cap(A-\{x\})\neq\varnothing,\quad \forall\,\varepsilon>0$$

则称 x 为 A 的**聚点**(cluster point). A 与它的全体聚点所组成之并集称为 A 的**闭包**(closure),记作 $\overline{A}$. 若 $\overline{A}=S$,则称 A 为 (S,ρ)的**稠密子集**(dense subset). 若 $\mathrm{int}\overline{A}=\varnothing$,则称 A 为 (S,ρ)的**疏子集**(nondense subset). 若 $x\in A$ 不是 A 的聚点,即存在 $B(x,\varepsilon)$使得 $B(x,\varepsilon)\cap A=\{x\}$,则称 x 为 A 的**孤立点**(isolated point). 若 A 是无孤立点的闭集,则称 A 为 (S,ρ)的**完全集**(complete set).

任何离散度量空间中的每一子集无聚点,这是"离散度量空间"一词的由来.

在 E^1 中,有理点全体是 E^1 的稠密子集;$A=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$,点 $x=0\notin A$ 是 A 的唯一聚点,但 $\mathrm{int}\overline{A}=\varnothing$,$A$ 是 E^1 的疏子集.

定理 3.3.20 设 A 是(S,ρ)的一个子集,则有

(1) A 是有限集或每两点距离均大于一固定正数的无限集$\Rightarrow$ A 无聚点;

(2) $\overline{A}=A\cup A'$;

(3) $\overline{A}$ 是闭集;

(4) A 是闭集$\Leftrightarrow\overline{A}=A$.

定理 3.3.21 (S,ρ)中闭包具有下列性质:

(1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$;

(2) $A\subset\overline{A}$;

(3) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$;

(4) $\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}$.

3.3.5 极限与收敛

为了建立度量空间之间连续映射的概念,首先将极限概念推广到度量空间.

定义 3.3.22 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是(S,ρ)中的一个点列，点$a\in S$. 若对每个$\varepsilon>0$，存在自然数N，使得$x_n\in B(a,\varepsilon)$，$\forall n>N$，则称a为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的一个**极限点**(limit point)，或说$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$**收敛到**(converge to)点a. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到点$a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\rho(a,x_n)=0$.

定理 3.3.23 (1) (S,ρ)中每一收敛点列有唯一的极限点.

(2) (S,ρ)的子集A以a为聚点$\Leftrightarrow A-\{a\}$中存在以a为极限点的由不同点组成的点列.

(3) 若点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$中的元素组成的集合$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$有聚点$a$，则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$存在子序列收敛到点$a$.

定义 3.3.24 在(S,ρ)中，子集A_1与A_2的**距离**(distance)是指

$$\rho(A_1,A_2)\triangleq\begin{cases}0, & \text{当}A_1=\varnothing\text{或}A_2=\varnothing;\\ \inf\{\rho(x,y)\mid x\in A_1,y\in A_2\}, & \text{当}A_1\neq\varnothing\text{且}A_2\neq\varnothing.\end{cases}$$

点$x\in S$到子集A的**距离**是指

$$\rho(x,A)\triangleq\rho(\{x\},A).$$

子集A的**直径**(diameter)是指

$$\operatorname{diam}(A)=\begin{cases}0, & \text{当}A=\varnothing;\\ \sup\{\rho(x,y)\mid x,y\in A\}, & \text{当}A\neq\varnothing.\end{cases}$$

当$\operatorname{diam}(A)$为有限数时，称A是**有界集**(bounded set).

注意：$x\notin A\not\Rightarrow\rho(x,A)>0$；$A_1\cap A_2=\varnothing\not\Rightarrow\rho(A_1,A_2)>0$.

定理 3.3.25 若$A\neq\varnothing$，$x\notin A$，则$\rho(x,A)>0$.

3.3.6 连续映射

定义 3.3.26 设$X=(S_1,\rho_1)$，$Y=(S_2,\rho_2)$，$f:X\to Y$是从X到Y的映射，点$x_0\in X$. 如果对任一给定开球$B(f(x_0),\varepsilon)$都存在另一开球$B(x_0,\delta)$，使得

$$x\in B(x_0,\delta)\to f(x)\in B(f(x_0),\varepsilon)$$

或者写成

$$f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)$$

则称 f **在点 x_0 连续**(continuous at a point x_0). 若 f 在 X 的每一点连续,则称 $f:X\to Y$ 为**连续映射**(continuous mapping);当 $Y=E$ 时,通常也称 f 为**连续函数**(continuous function).

注意,X 与 Y 的开球都相对于自身的距离而言. 直接利用距离,f 在点 x_0 连续是指:$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,

$$\rho_1(x,x_0)<\delta\Rightarrow\rho_2(f(x),f(x_0))<\varepsilon.$$

定理 3.3.27 设 $X=(S_1,\rho_1)$,$Y=(S_2,\rho_2)$,对于 $f:X\to Y$,下列五个条件两两定价:

(1) f 是连续映射;

(2) Y 的每一开集在 f 下的原象都是 X 的开集;

(3) Y 的每一闭集在 f 下的原象都是 X 的闭集;

(4) $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)},\forall A\subset X$;

(5) X 中每一个以 x 为极限点的收敛点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,象点列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Y 中收敛到 $f(x)$.

定理 3.3.28 (1) $X=(S,\rho)$ 的恒等映射 $I:X\to X$ 是连续映射.

(2) 若 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to Z$ 是度量空间之间的连续映射,则 $g\circ f:X\to Z$ 也是连续映射.

连续映射概念是初等数学分析中连续函数概念的推广,比如,定理 3.3.28 的(1)指出恒等映射必是连续映射,而不论 X 是怎样的集合. 又如当 X 为有限集时,任何映射 $f:X\to Y$ 必为连续映射,而不论 Y 是怎样的集合. 下面再看点例子.

例 3.3.29 (1) 设 X 是离散度量空间,Y 是任一度量空间,则任一映射 $f:X\to Y$ 是连续映射.

(2) 设 $X=(S,\rho)$ 是任一度量空间,则距离函数 $\rho:X\times X\to E^1$ 必是连续映射.

3.3.7 柯西序列与完备度量空间

可以模仿 E^1 上的柯西定理 1.5.13 来定义一般的完备度量空间. 为此首先将 E^1 的柯西序列概念(定义 1.5.11)推广于一般的度量空间.

定义 3.3.30 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是(S,ρ)中的点列,如果对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N=N(\varepsilon)$,使得

$$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon,\quad \forall\, n,m>N.$$

则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为(S,ρ)中的柯西序列(Cauchy sequence).

在一般度量空间中,柯西序列不一定是收敛序列. 例如,点列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列,在 E^1 中它收敛于 0. 现在将它放到度量空间(S,ρ)中来考察,这里 $S=(0,1)$,$\rho(x,y)=|x-y|$. 显然它也是(S,ρ)中的柯西序列,但 $0\notin S$,因此它不是(S,ρ)中的收敛点列.

定理 3.3.31 在(S,ρ)中成立:

(1) 每个收敛点列必是柯西序列;

(2) 若一个柯西序列有收敛的子列,则原序列收敛.

定义 3.3.32 (S,ρ)称为**完备度量空间**(complete metric space),如果其中的每一个柯西序列都收敛.

欧几里得空间 E^n 和酉空间 $\mathbf{C}^n$ 是完备的. 任何离散度量空间都是完备的,因为其中任何一个柯西序列至多有有限个不同的点.

如果物理系统的状态是用离散量表示的,我们就得引进种种数列空间. 下面给出几个以复数的数列(也可以只限实数的数列)为元素的度量空间,它们都是完备的.

定义 3.3.33 由数列组成的度量空间 s、c 和 l^p 定义如下:

空间 s 由一切数列组成,即

$$s=\{x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\mid x_n\in\mathbf{C}(\text{或}\,\mathbf{R}),n=1,2,\cdots\},$$

距离规定为

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

$$\forall\, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in s.$$

空间 c 由一切收敛数列组成，是空间 s 的子集，即

$$c = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in s \mid \lim_{n\to\infty} x_n \text{ 存在}\},$$

距离规定为

$$\rho(x,y) = \sup_{1\leqslant n<\infty} |x_n - y_n|,\quad \forall\, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in c.$$

空间 l^p $(1\leqslant p<\infty)$ 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ 收敛的一切数列 $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 组成，是空间 c 的子集，即

$$l^p = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\},$$

距离规定为

$$\rho(x,y) = \{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\}^{1/p},$$

$$\forall\, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p.$$

空间 l^∞ 由 $\{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}$ 有界的一切数列 $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 组成，是空间 s 的子集，即

$$l^\infty = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in s \mid \sup_{1\leqslant n<\infty} |x_n| < \infty\},$$

距离规定为

$$\rho(x,y) = \sup_{1\leqslant n<\infty} |x_n - y_n|,\quad \forall\, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^\infty.$$

在以上数列空间中可引入线性运算，加法和数乘法按下式定义：

$$x + y = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \triangleq \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\alpha x = \alpha\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \triangleq \{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

非完备空间在应用上往往很不方便，比如有时会因不完备而使所考察的问题无解. 存在确定的方法能使非完备度量空间完备

化，方法的实质是把每个柯西序列作为一个新的点增加到原空间中去. 例如，有理数全体按绝对值确定的距离成为一个度量空间，它是不完备的，用每个不收敛的柯西序列作为一个新的点(即无理数)增加到这个空间中去，得到的完备化空间就是 E^1. 这说明可用柯西序列将全体有理数扩充为全体实数.

3.3.8 列紧性与紧性

现在以实数直线有界闭集的列紧性定理 1.5.15 与紧性定理 1.5.18 为背景，定义一般度量空间中的列紧性与紧性.

定义 3.3.34 设 A 是 (S,ρ) 的一个子集，如果 A 中任一无穷点列有子列收敛于 S 中的一点，则称 A 是**相对列紧的**(relative sequentially compact). 如果还有每个收敛子列的极限点都属于 A，则称 A 是**列紧的**(sequentially compact). 如果 (S,ρ) 本身是列紧的，则称为**列紧空间**(sequentially compact space).

列紧空间总是完备的. 有限子集总是列紧的. 但完备空间未必是列紧的，空间 E^n 就是一例.

定理 3.3.35 设 A 是 $X=(S,\rho)$ 的子集，则

(1) A 列紧 $\Rightarrow A$ 是 X 的有界闭集；

(2) X 列紧且 A 是闭集 $\Rightarrow A$ 列紧.

由定理 1.5.15 和定理 3.3.35 的(1)得知，在 E^1 中，子集列紧 $\Leftrightarrow$ 子集是有界和闭的. 由定理 3.3.35 的(1)和(2)得知，在列紧度量空间中，子集列紧 $\Leftrightarrow$ 子集是闭的. 然而，在一般度量空间中，有界和闭是子集列紧的必要条件而非充分条件.

例 3.3.36 在 E^1 中，闭区间 $[0,1]$ 列紧，它是有界闭集；开区间 $(0,1)$ 或半开半闭区间 $(0,1]$ 与 $[0,1)$ 均相对列紧，它们有界但非闭集；区间 $(-\infty,0]$ 与 $[0,+\infty)$ 非列紧也非相对列紧，它们是闭集但非有界. 如果开区间 $(0,1)$ 本身作为一个度量空间，那么它是一个有界闭集，但它非列紧.

定义 3.3.37 设 A 是 $X=(S,\rho)$ 的一个有限子集，如果 $\rho(x, A)<\varepsilon, \forall x\in S$，则称 A 为 X 的一个 ε **网**(ε net).

定理 3.3.38 对于任一 $\varepsilon>0$，列紧度量空间均有 ε 网.

定义 3.3.39 包含一个可列稠密子集的度量空间称为**可分度量空间**(separable metric space).

有理点全体在 E^1 中稠密，E^1 是可分的；由此可知，一般的 E^n 也是可分的.

由定理 3.3.38 可推证下面的定理.

定理 3.3.40 列紧度量空间必是可分的.

以上讨论了列紧性，下面讨论紧性.

定义 3.3.41 设 A 是 $X=(S,\rho)$ 的一个子集. 如果 $\mathscr{M}=\{G_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ 是 X 的一族开集，使得

$$A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$$

则称 $\mathscr{M}$ 为 A 在 X 中的一个**开覆盖**(open covering)；并且将包含有限个开集的开覆盖称为**有限覆盖**(finite covering). 如果 A 在 X 中的开覆盖 $\mathscr{M}$ 的一个子族也是 A 在 X 中的一个覆盖，则称这个子族为 $\mathscr{M}$ 的一个**子覆盖**(subcovering). 若 X 本身的每一开覆盖有一有限子覆盖，则称 X 为**紧空间**(compact space).

如下定理表明，在度量空间中列紧性与紧性实际上是等价的.

定理 3.3.42 $X=(S,\rho)$ 是列紧空间 $\Leftrightarrow X$ 是紧空间.

在数学分析中，定义在闭区间上的连续函数具有一些重要性质. 相仿下面定理给出一般列紧度量空间上连续映射的几个基本特征.

定理 3.3.43 设 $f: X\to Y$ 是从列紧度量空间 X 到度量空间 Y 的连续映射，则

(1) $f(X)$ 是 Y 的列紧子集；

(2) $Y=E^1\Rightarrow$ 连续函数 f 有界且能在 X 中达到最大值与最小值；

(3) f 是**闭映射**(closed mapping),即 f 把 X 中的闭集映成 Y 中的闭集;

(4) f 是**一致连续映射**(uniformly continuous mapping),即 $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$,

$$\rho_1(x',x'')<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x'),f(x''))<\varepsilon, \forall\ x',x''\in X.$$

这里 ρ_1 与 ρ_2 分别是 X 与 Y 的距离.

现在就最常见的函数空间 $C[a,b]$,给出判别列紧子集的条件,它对物理问题中遇到的积分方程和微分方程的研究是有用的.先引入两个概念.

定义 3.3.44 设 A 是定义在区间$[a,b]$上的一个函数集合.如果有一个常数 $K>0$,使得

$$\sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|<K, \quad \forall\ f\in A$$

则称 A 是**一致有界**(uniform boundness)的.如果对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得只要

$$|x'-x''|<\delta, \quad \forall\ x',x''\in[a,b],$$

就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon, \quad \forall\ f\in A,$$

则称 A 是**同等连续**(equicontinuous)的.

例 3.3.45 函数集合

$$\left\{f\,\middle|\,|f(x')-f(x'')|\leqslant K|x'-x''|, \quad \forall\ x',x''\in[a,b]\right\}$$

和

$$\left\{f\,\middle|\,|f'(x)|\leqslant K,\forall\ x\in[a,b]\right\}$$

都是同等连续的,其中 K 是一个常数.函数 f 成立

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant K|x'-x''|,\forall\ x',x''\in[a,b],$$

称为 f 在$[a,b]$上满足利普希茨条件(Lipschitz condition).

定理 3.3.46(阿尔采拉-阿斯可里(Arzela-Ascoli)定理) 函

数集合 $A\subset C[a,b]$ 列紧的充分必要条件是 A 一致有界且同等连续.

3.3.9 压缩映射与不动点原理

下面介绍度量空间中的一类映射——压缩映射,以及它在完备空间中表现的基本特征性质——不动点原理.它们不仅在微分方程和积分方程解的存在性与唯一性问题上有重要应用,而且在数值分析求解算法的构造上起着重要作用.

定义 3.3.47 设 $X=(S,\rho)$,如果对于映射 $f:X\to X$ 有一个常数 $K,0\leqslant K<1$,使得

$$\rho(f(x),f(y))\leqslant K\rho(x,y),\ \forall\ x,y\in X,$$

则称 f 是一个**压缩映射**(contraction mapping).

显然,压缩映射是一致连续映射.当 $0\leqslant K<1$ 时,例 3.3.45 给出的两个同等连续函数集合中的每个函数都是 E 到 E 的压缩映射.

定理 3.3.48(巴拿赫(Banach)不动点原理) 设 $X=(S,\rho)$ 是完备的,且 $f:X\to X$ 是一个压缩映射,则存在唯一的点 $x^*\in X$,使得 $f(x^*)=x^*$.x^* 称为 f 的**不动点**(fixed point).

这个定理的证明给出求不动点的一个方法,即任取一点 $x_0\in X$,由递推关系式

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad n=0,1,2,\cdots \tag{3.8}$$

产生一个点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.在定理所述的条件下,这个点列收敛到 f 的不动点 x^*.

例 3.3.49 设 $\varphi\in C^1[a,b],0<m\leqslant\varphi'(x)\leqslant M,\forall\ x\in[a,b]$,且 $\varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$,则方程 $\varphi(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内有唯一的根 x^*.

考虑函数 f,

$$f(x)=x-\frac{1}{M}\varphi(x),\quad \forall\ x\in[a,b],$$

由于

$$|f'(x)| = \left|1 - \frac{1}{M}\varphi'(x)\right| \leqslant 1 - \frac{m}{M} < 1,$$

因此有唯一不动点 $x^* \in [a,b]$，$f(x^*) = x^*$，这等价于 $\varphi(x^*) = 0$，并可按递推关系式(3.8)计算 x^* 的满足任意精度要求的近似值.

下面定理是巴拿赫不动点定理的一个推论.

定理 3.3.50 设 $X=(S,\rho)$ 是完备的，$f: X \to X$ 是一个映射，如果对某个自然数 $n \geqslant 1$，复合映射 $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ 是压缩映射，则 f 有唯一不动点，或说方程 $f(x) = x$ 有唯一解.

例 3.3.51 设 K 是 $[a,b] \times [a,b]$ 上已知的连续函数，φ 是 $[a,b]$ 上已知的连续函数，λ 是任意参数，则积分方程

$$x(t) = \lambda\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s + \varphi(t)$$

在 $[a,b]$ 上有唯一的连续解 x^*. 事实上，考虑映射 $f: C[a,b] \to C[a,b]$，其定义为

$$f(x) = \lambda\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s + \varphi(t)$$

上述积分方程的解 x^* 就是 f 的不动点. 利用数学归纳法，可以证明当 n 充分大时 f^n 是一个压缩映射，于是依例 3.3.51，f 有唯一不动点.

3.4 范数 赋范线性空间

3.4.1 范数和半范数

范数的定义直接依据 E^n 中向量长度的三条性质(定理 3.1.7).

定义 3.4.1 设 X 是数域 P 上的线性空间，如果函数 $\|\cdot\|: X \to E$ 满足下列条件：

(1) **正定性**：$\|x\| \geqslant 0$，$x \in X$，当且仅当 $x = 0$ 时 $\|x\| = 0$；

(2) **齐次性**：$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$，$x \in X$，$\alpha \in P$；

(3) **三角不等式**：$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$，$x,y\in X$，

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的**范数**(norm).(3)也称为**次可加性**(subadditivity).

例 3.4.2 E^n 中向量的长度自然可作为范数的第一个例子：即对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E^n$，

$$\|\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x}| = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}.$$

但这仅是能够在 E^n 中定义的多种范数之一.例如

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|,$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \quad 1\leqslant p<\infty,$$

都是 E^n 中常用的范数，$\|\cdot\|_\infty$ 称为**向量的∞-范数**，$\|\cdot\|_p$ 称为**向量的 p-范数**. 证明 p 范数满足三角不等式时需利用闵可夫斯基(Minkowski)不等式(定理 8.2.20). 特别，向量 $\boldsymbol{x}$ 的 2-范数 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 就是 $\boldsymbol{x}$ 的长度. 这些范数也适用于酉空间 $\mathbf{C}^n$.

$n\times n$ 的实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 可以看作 $E^{n\times n}$ 中的向量. 按照 $E^{n\times n}$ 的 2 范数，可给出矩阵的一种范数，称为**弗罗贝尼乌斯(Frobenius)范数**，并记作 $\|\cdot\|_F$，即

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \Big(\sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|^2\Big)^{1/2}.$$

还有些常用的矩阵范数是通过向量的 p 范数来定义的：

$$\|\boldsymbol{A}\|_p \triangleq \max_{\substack{x\in E^n\\ x\neq 0}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p} = \max_{\substack{x\in E^n\\ \|x\|_p=1}} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_p, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

$\|\boldsymbol{A}\|_p$ 称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 p-范数**或**算子范数**. 可以证明

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = [\lambda_{\max}(A^{T}A)]^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\lambda_{\max}(A^{T}A)$ 表示矩阵 $A^{T}A$ 的最大特征值. 以上矩阵范数也适用于复矩阵.

例 3.4.3 在线性空间 $C[a,b]$ 中,当 $x\in C[a,b]$ 时,规定

$$\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|,$$

它显然满足范数定义的三个条件. 另外

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\mathrm{d}t$$

也是一种范数.

以上两个例子表明,同一个线性空间可以用多种方式引入不同的范数.

范数定义的条件(2)与(3)能够推出"$\|x\|\geqslant 0$ 且 $\|0\|=0$",但不能推出"若 $\|x\|=0$ 则 $x=0$".

定义 3.4.4 设 X 是数域 P 上的线性空间,如果函数 $p: X\to E^1$ 满足条件:

(1) 齐次性: $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$, $x\in X$, $\alpha\in P$;

(2) 三角不等式: $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$, $x,y\in X$,

则称 p 是 X 上的**半范数**(semi norm).

显然,每个范数也是半范数. 半范数区别于范数之处是不必满足条件: $p(x)=0\Rightarrow x=0$.

例 3.4.5 (1) 在数列空间 s 中,对于每个元素 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,规定 $p(x)=|x_N|$,其中 N 是一固定自然数,则 p 是 s 的半范数并确实不是范数,因为 $p(x)=0$ 只能推出 $x_N=0$,而 x 中其它分量可以不是 0.

(2) 在线性空间 $C(-\infty,+\infty)$ 中规定

$$p_n(x)=\max_{|t|\leqslant n}|x(t)|, \quad n=1,2,\cdots.$$

每个 p_n 均为半范数而不是范数.

(3) 如果 $f: X\to C^1$ 是数域 P 上线性空间 X 到酉空间 C^1 的

线性映射，即满足

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y),\quad x,y\in X,\quad \alpha,\beta\in P,$$

则 $p(x)=|f(x)|$ 是 X 上的半范数. 比如对于 $X=C^n$ 中每一点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 规定 $f(\boldsymbol{x})=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$，这里 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是常数.

半范数与凸集有着密切联系，凸集是泛函分析中常用的一个重要概念.

定义 3.4.6 设 A 是线性空间 X 的一个子集，如果成立

$$x,y\in A,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1\Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y\in A,$$

则称 A 为**凸集**(convex set).

例如，线性空间 X 的每个线性子空间都是凸集.

可以用几何方法来描述一般线性空间 X 中的凸集. 设 $x,y\in X$，集合

$$L(x,y)=\{\lambda x+(1-\lambda)y \mid 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$$

称为连结点 x 和 y 的**线段**(line segment). 显然，A 为凸集的充分必要条件是：

$$x,y\in A\Rightarrow L(x,y)\subset A.$$

凸集和非凸集示意图如图 3.3.

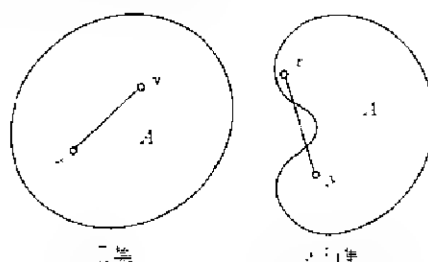


图 3.3 示意图

设 p 是线性空间 X 中的任何一个半范数，任取 $x_0 \in X$ 及正数 r，则利用 p 作的“球”

$$S(x_0,r) = \{x : x \in X, \quad p(x - x_0) \leqslant r\}$$

是一个凸集，称为半范数 p 的**导出凸集**(derived convex set). 半范数和凸集的这种联系，使得赋范数或半范数的线性空间上许多问题的研究，能够化为关于凸集的几何学的研究. 这样就能用几何的观点和方法来研究分析中的许多问题

3.4.2 赋范线性空间

定义 3.4.7 设 X 是一个线性空间，$\|\cdot\|$ 是 X 上的一种范数，则 X 和 $\|\cdot\|$ 在一起，称为一个**赋范线性空间**(normed linear space)，记作$(X,\|\cdot\|)$或简记作 X.

例 3.4.2 与例 3.4.3 中的线性空间按所给出的范数均构成赋范线性空间.

例 3.4.8 空间 $l^p(1\leqslant p<\infty)$按范数

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}, \quad \forall x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^p$$

构成赋范线性空间.

空间 l^∞ 按范数

$$\|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant n<\infty} |x_n|, \quad \forall x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^\infty$$

构成赋范线性空间.

赋范线性空间 $l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$有如下包含关系：

$$l^1 \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty, \quad 1 < p < q < \infty.$$

在任何$(X,\|\cdot\|)$中，范数 $\|\cdot\|$ 能够引出 X 中的一个距离 ρ：

$$\rho(x,y) = \|x - y\|, \forall x,y \in X, \tag{3.9}$$

称为**由范数 $\|\cdot\|$ 确定的距离**. 因此，任何一个赋范线性空间都按其范数确定的距离构成一个度量空间. 从而能够用范数代替距离，

并且把度量空间中的所有概念和结论移植到赋范空间.

由(3.9)确定的距离明显地满足如下条件：

$$\rho(x,y)=\rho(x-y,0),\quad \rho(\alpha x,0)=|\alpha|\rho(x,0).\tag{3.10}$$

反过来说，如果一个度量空间 X 中规定了线性运算，且距离 ρ 满足式(3.10)，则由 ρ 能确定一个范数 $\|\cdot\|$：

$$\|x\|=\rho(x,0),\ \forall x\in X.\tag{3.11}$$

因此，X 按式(3.11)确定的范数构成一个赋范线性空间. 但是，不是任何一个有线性结构的度量空间都能用其距离替代范数. 例如数列空间 s 的距离(定义 3.3.35)不满足式(3.10)中的第二个条件，因此由它不能确定范数；又如离散度量空间的距离也不能确定范数.

3.4.3 强收敛

在赋范线性空间中按照式(3.9)引入距离后，就可以引进极限概念.

定义 3.4.9 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $(X,\|\cdot\|)$ 中的一个点列，如果存在点 $x\in X$，使得点列按由范数确定的距离收敛于 x，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$，则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **依范数收敛**(convergence in norm)于 x 或**强收敛**(strong convergence)于 x，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 或 $x_n\to x(n\to\infty)$.

现在，在距离由范数确定和强收敛的意义下，在赋范空间上可以讲映射的连续性，讲柯西序列及完备性，讲列紧性与紧性等等.

定理 3.4.10 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是任一赋范线性空间，则

(1) 范数 $\|\cdot\|:X\to E^1$ 是连续函数，或者说(定理 3.3.27)

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|.$$

(2) 加法和数乘法对于按范数所确定的收敛是连续的，即

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0,\lim_{n\to\infty}\|y_n-y\|=0$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\|(x_n+y_n)-(x+y)\|=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|\alpha x_n - \alpha x\| = 0;$$
$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|\alpha_n x - \alpha x\| = 0$$

3.4.4 巴拿赫空间

定义 3.4.11 完备的赋范线性空间称为**巴拿赫空间**(Banach space)，它是一类重要的赋范空间.

空间 E^n，C^n，$l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$都是巴拿赫空间. 数列空间 c 取范数

$$\|x\| = \sup_{n\geq 1}|\xi_n|,\ \forall x = \{\xi_n\} \in c$$

是一巴拿赫空间.

例 3.4.12 在 $C[a,b]$中，若取范数 $\|x\| = \max_{a\leq t\leq b}|x(t)|$，则是巴拿赫空间；若取范数 $\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt$，则不能成为巴拿赫空间.

定义 3.4.13 $(X,\|\cdot\|)$中的每个点列 $\{x_n\}$ 的部分和

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\ n = 1,2,\cdots$$

构成一个点列$\{S_n\}_{n\geq 1}$，称为$(X,\|\cdot\|)$的一个**级数**(series)，记作 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$. 如果存在 $x\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n - x\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i - x\right\| = 0,$$

即部分和点列$\{S_n\}_{n\geq 1}$强收敛于 x，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ **收敛**(convergence)，且以 x 为**和**(sum)，记作 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n = x$. 如果数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ **绝对收敛**(absolutely convergent).

显然，在巴拿赫空间中，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西序列，即对任给的 $\varepsilon > 0$，必有 N 使得

$$\|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right\| < \varepsilon, \ \forall n > m > N.$$

定理 3.4.14 $(X, \|\cdot\|)$ 是巴拿赫空间 $\Leftrightarrow$ 每一个绝对收敛的级数都收敛.

在 E^1 中，每个绝对收敛的级数都收敛，这依赖于 E^1 的完备性. 定理 3.4.14 给出了一般巴拿赫空间同样具有能用级数反映的本征性质.

3.4.5 连续函数空间

定义 3.4.15 设 X 是度量空间或赋范空间，G 是 X 的一个子集，Ω 是 X 中的开集. 记号 $G \subset\subset \Omega$ 表示 $G \subset \Omega$ 且 $\bar{G}$ 是 X 的列紧子集. 设 φ 是定义在 G 上的函数，集合 $\{x \in G \mid \varphi(x) \neq 0\}$ 的闭包 $\overline{\{x \in G \mid \varphi(x) \neq 0\}}$ 称为 φ 的**支集**(support)，记作 $\mathrm{supp}\varphi$. 如果有 $\mathrm{supp}\,\varphi \subset\subset \Omega$，则称 φ 在 Ω 中有**紧支集**(compact support).

下面将考虑定义在 E^n 的一个开子集 Ω 上的 n 元连续函数构成的几类空间. 这时，$\mathrm{supp}\varphi \subset\subset \Omega \Leftrightarrow \mathrm{supp}\varphi$ 是有界闭集且 $\mathrm{supp}\varphi \subset \Omega$.

先引进几个记号. 设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是 n 个非负整数组成的向量，则称 α 为 n **重指数**，并记 $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

我们可用多重指数规定一些缩写符号. 例如：

(1) 记 $\boldsymbol{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$，这里 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n$.

(2) 记 $\mathrm{D}^{\alpha} = \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \mathrm{D}_2^{\alpha_2} \cdots \mathrm{D}_n^{\alpha_n}$，这里 $\mathrm{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$，$1 \leqslant j \leqslant n$.

因此 D^{α} 表示 $|\alpha|$ 阶微分算子. 显然，$\mathrm{D}^{(0,0,\cdots,0)}\varphi = \varphi$.

(3) 记 $\alpha! = \alpha_1! \ \alpha_2! \ \cdots \ \alpha_n!$.

(4) 设 α 与 β 是两个 n 重指数，满足 $\alpha_i \leqslant \beta_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则称 $\alpha \leqslant \beta$. 这时 $\beta - \alpha$ 仍是 n 重指数，而且 $|\beta - \alpha| + |\alpha| = |\beta|$.

当 $\alpha \leqslant \beta$ 时，记

$$\binom{\beta}{\alpha} = \frac{\beta!}{\alpha!(\beta - \alpha)!} = \binom{\beta_1}{\alpha_1}\binom{\beta_2}{\alpha_2}\cdots\binom{\beta_n}{\alpha_n}.$$

定义 3.4.16 设 Ω 是 E^n 中的开集，m 是一非负整数. 定义

$C^m(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi: \Omega \to C^1, D^\alpha\varphi$ 在 Ω 上连续，$0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\}$；

$C(\Omega) = C^0(\Omega)$；

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$；

$C_0(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega\}$；

$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega\}$.

因 Ω 是开集，$C^m(\Omega)$ 中的函数本身或某些阶偏导数可以在 Ω 上无界. 如果 $\varphi \in C(\Omega)$ 在 Ω 上有界且一致连续，则在保持有界且一致连续的条件下，φ 在 $\overline{\Omega}$ 上有唯一的延拓. 这样，可把 $C(\Omega)$ 中每个有界且一致连续函数看作定义在 $\overline{\Omega}$ 上，即看作在 Ω 上的延拓. 因此引出下述定义.

定义 3.4.17 集合 $C^m(\overline{\Omega}) \subset C^m(\Omega)$，其定义为

$C^m(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in C^m(\Omega) \mid D^\alpha\varphi$ 在 Ω 上有界且一致连续，$0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\}$.

由定义看出，$C^m(\overline{E^n}) \neq C^m(E^n)$.

若在集合 $C^m(\overline{\Omega})$ 中取范数

$$\|\varphi\|_{C^m} = \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha\varphi(x)|, \tag{3.12}$$

则 $C^m(\overline{\Omega})$ 是巴拿赫空间.

定义 3.4.18 设 $0 < \lambda \leqslant 1$，集合 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^m(\overline{\Omega})$，它由 $C^m(\overline{\Omega})$ 中从 0 到 m 阶偏导数都满足指数为 λ 的赫尔德(Hölder)条件的函数组成. 具体地说，$\varphi \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 是指 $\varphi \in C^m(\overline{\Omega})$ 且存在常数 K，使得

$$|D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)| \leqslant K|x - y|^\lambda, \forall x, y \in \Omega, 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m.$$

在集合 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 中取范数

$$\|\varphi\|_{C^{m,\lambda}} = \|\varphi\|_{C^m} + \max_{|\alpha| = m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha\varphi(x) - D^\alpha\varphi(y)|}{|x-y|^\lambda}, \tag{3.13}$$

便构成巴拿赫空间.

当 $0<\nu<\lambda\leqslant 1$ 时有

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \subsetneqq C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \subsetneqq C^m(\overline{\Omega}). \tag{3.14}$$

下面是一个著名的定理.

定理 3.4.19 (魏尔斯特拉斯(Weierstrass)定理) 设 Ω 是 E^n 中的有界开集,$\varphi\in C(\overline{\Omega})$. 则对任给的 $\varepsilon>0$,存在一个 n 元多项式 $P(x)$,使得

$$\|\varphi - P\|_C = \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

这个定理表明,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的多项式全体所成之集在 $C(\overline{\Omega})$ 中稠密. 然而任一多项式在列紧集上能由有理复数(实部和虚部都是有理数)为系数的多项式一致逼近;这就是说,有理复系数的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的多项式全体所成之集合 Q 也是 $C(\overline{\Omega})$ 的稠密子集. 由于 Q 是可列集,因此 $C(\overline{\Omega})$ 是可分的巴拿赫空间.

3.5 内积 内积空间

3.5.1 内积

在抽象的线性空间中赋予内积结构,便能建立正交性的概念,从而使空间类似于欧几里得空间,具有正交集、正交投影等几何属性. 抽象的内积的定义依据西空间中内积的四条性质.

定义 3.5.1 设 X 是(实的或复的)数域 P 上的线性空间,如果函数 $(\cdot,\cdot): X\times X\to P$ 满足下列条件:

(1) $(x,y)=\overline{(y,x)}$, $\forall\, x,y\in X$;

(2) $(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$, $\forall x,y,z\in X$, $\alpha,\beta \in P$;

(3) $(x,x)\geqslant 0$, 当且仅当 $x=0$ 时 $(x,x)=0$,

则称 $(\cdot,\cdot)$ 为 X 上的**内积**(inner product).

条件(2)等价于

$$(\alpha x,z)=\alpha(x,z),(x+y,z)=(x,z)+(y,z).$$

从条件(1)与(2)可以推出

$$(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}(x,y)+\bar{\beta}(x,z) \tag{3.15}$$

3.5.2 内积空间

定义 3.5.2 如果线性空间 X 中规定了内积 $(\cdot,\cdot)$, 则 X 与 $(\cdot,\cdot)$ 在一起, 称为一个**内积空间**(inner product space), 记作 $(X,(\cdot,\cdot))$ 或简记作 X.

例 3.5.3 $C[a,b]$ 中的函数可以取复值, 通常规定内积为

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t, \quad \forall x,y\in C[a,b]$$

从而 $C[a,b]$ 是一个无限维的内积空间.

关于内积空间与赋范空间的关系, 就 E^n 与 $\mathbf{C}^n$ 来说, 它们既是内积空间, 又是赋范空间, 范数与内积之间的关系如下:

$$\|x\|=(x,x)^{1/2}$$

对于一般的内积空间, 也能如此由内积确定范数. 证明这一事实需先把柯西不等式定理 3.1.6 推广于一般内积空间.

定理 3.5.4 (施瓦茨(Schwarz)不等式) 设 X 是内积空间, 则成立不等式

$$|(x,y)|^2\leqslant(x,x)\cdot(y,y), \forall x,y\in X$$

定理 3.5.5 设 $(\cdot,\cdot)$ 是内积空间 X 的内积, 则

$$\|x\|=(x,x)^{1/2}$$

确定 X 的一个范数 $\|\cdot\|$, 称为内积 $(\cdot,\cdot)$ 的**导出范数**(derived

norm).

验证导出范数满足三角不等式时用到施瓦茨不等式.

每个内积空间按内积的导出范数成为一个赋范线性空间，而且是一类非常重要的赋范线性空间，它们在数学物理、量子论、微分方程及概率论等中有重要应用.

于是，可以在内积空间中讲极限、收敛等概念，以及赋范线性空间中的各种结论，它们都是按导出范数所确定的距离 ρ 而言的.

定理 3.5.6 设$(\cdot,\cdot)$是内积空间 X 的内积，则它关于两个变元都是连续的，即

$$\|x_n - x\| \to 0, \|y_n - y\| \to 0 \Rightarrow (x_n, y_n) \to (x, y).$$

内积空间的导出范数有如下性质：

定理 3.5.7 设$(\cdot,\cdot)$是内积空间 X 的内积，$\|\cdot\|$是导出范数，则范数$\|\cdot\|$成立**平行四边形恒等式**(parallelogram identity)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in X.$$

而且，内积也可用范数来表达，称为**极化恒等式**(polarization identity)：当 X 是实内积空间时，

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2);$$

当 X 是复内积空间时，

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2),$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

图 3.4 为 E^2 中平行四边形恒等式的几何解释——平行四边形的对角线长度的平方和等于四边长度的平方和.

定理 3.5.7 表明，由内积导出的范数必须满足平行四边形恒等式. 因此，如果赋范线性空间 X 的范数$\|\cdot\|$满足平行四边形

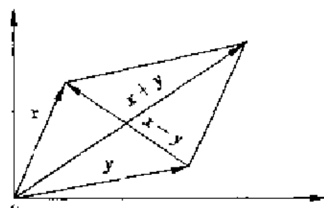


图 3.1

恒等式,则可按极化恒等式由 $\|\cdot\|$ 来定义内积$(\cdot,\cdot)$,并且 $\|\cdot\|$就是$(\cdot,\cdot)$的导出范数.

然而,不是每个赋范线性空间的范数都能满足平行四边形公式,例如$C[0,1]$上的范数 $\|x\|=\max\limits_{0\leq t\leq 1}|x(t)|$就是如此.

3.5.3 希尔伯特空间

定义 3.5.8 如果内积空间 X 作为导出范数下的一个赋范线性空间是完备的,则称 X 为**希尔伯特(Hilbert)空间**.

由定义看出,希尔伯特空间是一类特殊的(即范数是由内积导出的)巴拿赫空间,这类空间是物理学中常见的物理空间的抽象.

例 3.5.9 在电信工程中,信号可看作定义在区间$(-\infty,+\infty)$上的时间 t 的函数 x. 通常考虑能量有穷的信号,即满足 $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty$ 的时间 t 的函数 x. 上述不等式左端积分除一常数因子外表示信号的能量. 满足上述不等式的函数 x 的全体能构成一个内积空间,这是因为能在其中引入内积

$$(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,y(t)\mathrm{d}t.$$

而且这个内积空间是一个希尔伯特空间.

例 3.5.10 $l^2=\{x=(x_n),x_n\mid\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\}$ 按内积 $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$ 构成一个希尔伯特空间. 这是希尔伯特早先研究的一个空间.

3.5.4 正交与投影

现在将空间 E^n 中正交与投影的概念以及有关的基本概念定义 3.1.10, 定义 3.2.10, 定义 3.2.19 推广于一般的内积空间.

定义 3.5.11 设 X 是内积空间, $(\cdot,\cdot)$ 为内积. 如果 X 中两个元素 x 与 y 满足 $(x,y)=0$, 则称 x 与 y **正交**(orthogonal), 记作 $x\perp y$. 设 V 是 X 的子集, $x\in X$. 如果 $x\perp y,\forall y\in V$, 则称 x 与 V **正交**, 记作 $x\perp V$. 集合 $\{x\in X\mid x\perp V\}$ 称为 V 的**正交补**(orthogonal complement), 记作 $V^{\perp}$. 设 V 与 W 是 X 的两个子集, 如果 $x\perp y,\forall x\in V,y\in W$, 则称 V 与 W **正交**, 记作 $V\perp W$.

下述性质由定义直接推出.

定理 3.5.12 (1) $x\perp y\Rightarrow\|x+y\|=\|x-y\|$ 且 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$(广义勾股定理);

(2) $x\perp y,\quad\forall y\in X\Leftrightarrow x=0$;

(3) $V,W\subset X$ 且 $V\perp W\Rightarrow V\subset W^{\perp},W\subset V^{\perp}$;

(4) $V\subset W\subset X\Rightarrow V^{\perp}\supset W^{\perp}$;

(5) $V\subset X\Rightarrow V^{\perp}\cap V=\{0\}$.

定理 3.5.13 设 V 是内积空间 X 的子集, 则 $V^{\perp}$ 是 X 的闭线性子空间.

定义 3.5.14 设 V_1 与 V_2 是内积空间 X 的两个线性子空间, 且 $V_1\perp V_2$, 则称集合

$$V=\{x_1+x_2\mid x_1\in V_1,x_2\in V_2\}$$

为 V_1 与 V_2 的**正交和**(orthogonal sum), 记作 $V=V_1\oplus V_2$.

类似地可以定义有限个线性子空间的正交和.

定义 3.5.15 设 V 是内积空间 X 的线性子空间, $x\in X$. 如果有 $y\in V$, $z\perp V$, 使得 $x=y+z$ 则称 y 是 x 在 V 上的**正交投影**(orthogonal projection)或**投影**, 记作 $y=P_V x$.

一般地说, 对于内积空间 X 的任一向量 x 与任一线性子空间 V, x 在 V 上的投影 $P_V x$ 不一定存在. 如果 $P_V x$ 存在, 由定义看出, $P_V x$ 满足条件

$$(x-P_V x, y)=0, \quad \forall y\in V. \tag{3.16}$$

例如, 内积空间为 $C[-\pi,\pi]$(内积定义见例 3.5.3), 子空间 $V=\mathrm{span}\{\cos nt\}$, 这里 n 是固定的自然数. 现对任一 $x\in C[-\pi,\pi]$ 利用(3.16)得出

$$P_V x=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x(s)\cos ns\mathrm{d}s\right]\cos nt.$$

下面的定理表明当 V 是内积空间的完备子空间时, X 中任何元素 x 在 V 上的投影必存在. 因此, X 可分解为 V 与 $V^{\perp}$ 的正交和.

定理 3.5.16 (投影定理) 设 V 是内积空间 X 的完备线性子空间, 则对任何 $x\in X$, 存在唯一的 $y\in V$, 使得 $y=P_V x$, 而且

$$\|x-y\|=\min_{z\in V}\|x-z\|,$$

即 y 是 V 中距 x 最近的点.

投影定理是希尔伯特空间理论中极为重要的一个基本定理. 它表明用 V 中的元素 z 来逼近 x, 当且仅当 z 等于 x 在 V 上的投影 y 时, 逼近的程度最佳. 因此在逼近论和随机过程理论中, 常用投影的这个性质来研究最佳逼近. 在一般巴拿赫空间中因为没有正交概念, 所以投影定理并不成立.

例 3.5.17 对于在科学实验中得到的离散数据

$$(x_i, y_i),\ i=1,2,\cdots,m,$$

往往要寻找因变量 y 与自变量 x 之间的函数关系 $y=f(x)$. 最小

二乘法是：选定 n 个函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$，在所有形如 $S(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j(x)$ 的线性组合中，寻求一个 $S^*(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^*\varphi_j(x)$，使得

$$\sum_{i=1}^{m}[S^*(x_i)-y_i]^2=\min_{S}\sum_{i=1}^{m}[S(x_i)-y_i]^2,$$

并用 S^* 近似 f.

在函数逼近论中，还用 n 个简单函数（如多项式或三角函数等）$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 的线性组合来逼近定义在区间 $[a,b]$ 上的一般函数 f. 最佳平方逼近的提法是：在所有线性组合 $S(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j(x)$ 中求一个 $S^*(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^*\varphi_j(x)$，使得

$$\int_a^b[f(x)-S^*(x)]^2dx=\min_{S}\int_a^b[f(x)-S(x)]^2dx.$$

在随机过程理论中有完全类似于最佳平方逼近的问题的提法，在那里将由随机变量代替上述的 $f,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$.

上述问题可统一地抽象成如下问题：

设 $V=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是内积空间 X 的一个子空间，$x\in X$. 寻求 n 个数 $\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*$ 使得

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*x_i\right\|=\min_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\right\|.$$

这个问题解法如下：因为 V 是完备的子空间（见定理 3.5.22），因此由定理 3.5.16，必有唯一的 $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*x_i\in V$ 使得 $\|x-y\|$ 达到最小，而且 $(x-y)\perp V$，即 $(x-y,z)=0$，$\forall z\in V$. 这等价于

$$(x-y,x_k)=0,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

或者

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*(x_i,x_k)=(x,x_k),\quad k=1,2,\cdots,n.$$

不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关，则 y 的线性表出是唯一的，即上述 n 元线性代数方程组有唯一解 $\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*$，可用数值方法来求解.

3.5.5 正交集

定义 3.5.18 设 V 是内积空间 X 的非空子集，如果 V 中任何两个向量都正交，则称 V 为 X 的一个**正交集**(orthogonal set). 如果正交集 V 中每个向量的范数均为 1，则称 V 为**规范正交集**(orthonormal set).

例 3.5.19 (1) 在 E^n 中，每一组标准正交基构成规范正交集(定义 3.2.18).

(2) 在实空间 $C[0,2\pi]$ 中，取内积

$$(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)y(t)\mathrm{d}t$$

集合 $V=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,\cdots,\cos nt,\sin nt,\cdots\right\}$ 是规范正交集.

任何由非零向量所成的正交集 V 可以规范化，即集合

$$W=\{\|x\|^{-1}x\mid x\in V\}.$$

如果 $V=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是由非零向量组成的正交序列，则 V 是线性无关的. 反过来，下述定理告诉我们从任何一个线性无关序列能构造出一个规范正交序列.

定理 3.5.20 (格拉姆-施密特(Gram-Schmidt)定理) 规范正交化方法。设 $V=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间中的一个线性无关序列，则按递推公式

$$z_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}(x_n,y_k)y_k,\quad y_n=\|z_n\|^{-1}z_n,\quad n=1,2,\cdots$$

得到一个规范正交序列 $W=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_n\in V\}=\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_n\in W\}.$$

定义 3.5.21 如果定义在数域 P 上的内积空间 X 与 Y 之间存在一个一一对应的映射 $f:X\to Y$,使得

$$f(\alpha x'+\beta x'')=\alpha f(x')+\beta f(x''),\ (f(x'),f(x''))=(x',x''),$$
$$\forall\, x',x''\in X,\ \alpha,\beta\in P,$$

则称 X 与 Y **同构**.

定理 3.5.22 任何实或复的有限维内积空间必定是希尔伯特空间.

实际上,n 维实或复的内积空间必与 E^n 或 C^n 同构,从而与 E^n 或 C^n 具有相同的基本属性.因此,关于内积空间与希尔伯特空间,重点是研究无限维的情形.

定理 3.5.23 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是希尔伯特空间 X 的一个正交序列,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n\text{ 收敛}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty.$$

下面将傅里叶级数理论推广于无限维的内积空间.

定义 3.5.24 设 V 是内积空间 X 的一个规范正交集,$x\in X$,数集 $\{(x,e)\mid e\in V\}$ 称为向量 x 关于 V 的**傅里叶系数集**(Fourier coefficient set),数 (x,e) 称为 x 关于 $e(\in V)$ 的**傅里叶系数**.

例 3.5.25 (1) 对于例 3.5.19 的(2)中的内积空间及规范正交集,每个 $x\in C[0,2\pi]$ 的傅里叶系数为

$$a_0=\left(x,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\mathrm{d}t$$

$$\left.\begin{aligned}a_n&=(x,\cos nt)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos nt\mathrm{d}t\\ b_n&=(x,\sin nt)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin nt\mathrm{d}t\end{aligned}\right\}\quad n=1,2,\cdots.$$

(2) 设 $e_n=\{0,\cdots,0,1,0\cdots\}$,其中 1 在第 n 个位置上,则 $V=$

$\{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$是空间$l^2$(见例 3.5.10)中的规范正交集. 每个$x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^2$的傅里叶系数为

$$(x, e_n) = x_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

定理 3.5.26 设 X 是数域 P 上的内积空间, $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 X 中规范正交集, $V = \mathrm{span}(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, 则对每个 $x \in X$ 成立

(1) $P_V x = y = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$;

(2) $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2$;

(3) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2$;

(4) $\sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \leqslant \|x\|^2$;

(5) $\left\| x - \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|$, $\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in P$, 而且等号成立当且仅当 $\alpha_i = (x, e_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

定理 3.5.27 (贝塞尔(Bessel)不等式) 设$\{e_i\}_{i=1}^\infty$是内积空间 X 的规范正交序列, 则每个 $x \in X$ 的傅里叶系数序列$\{(x, e_i)\}_{i=1}^\infty \in l^2$, 而且满足不等式

$$\sum_{i=1}^\infty |(x, e_i)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

定理 3.5.28 (里斯-费希尔(Riesz-Fischer)定理) 设$\{e_i\}_{i=1}^\infty$是希尔伯特空间 X 的规范正交序列, 则对每个序列 $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^\infty \in l^2$, 存在 $x \in X$ 使得

$$\alpha_i = (x, e_i), \quad i = 1, 2, \cdots, \quad \|\alpha\|_{l^2} = \|x\|.$$

在希尔伯特空间中, 等式 $x = \sum_{i=1}^\infty (x, e_i) e_i$ 能普遍成立的条件, 等价于贝塞尔不等式(定理 3.5.27)何时取等号, 也就是说, $x = \sum_{i=1}^\infty (x, e_i) e_i$ 的充分必要条件是

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2. \tag{3.17}$$

这个等式称为**帕塞瓦尔(Parseval)等式**,其几何意义是向量的长度的平方等于各分量长度的平方和.因此,问题转为讨论帕塞瓦尔等式成立的充要条件.为此,先引入如下概念.

定义 3.5.29 设 $V=\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 的规范正交序列,$x \in X$,级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$ 称为向量 x 关于 V 的**傅里叶级数**(Fourier series)或**傅里叶展开式**(Fourier expansion).如果 $x=\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)e_i$,就说 x **可以展成 V 的傅里叶级数**.

定义 3.5.30 如果 V 是内积空间 X 的规范正交集,而且 $V^{\perp}=\{0\}$ 即 $x \perp V(x \in X)$ 当且仅当 $x=0$,则称 V 为 X 的**完全集**(complete set).

例 3.5.31 例 3.5.25 的(2)中的 V 是 l^2 的完全集,因为若 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ 且 $x \perp V$,则

$$x_n = (x, e_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

于是 $x=\{0, 0, \cdots\}$ 即 l^2 的零元素.

定理 3.5.32(帕塞瓦尔定理) 设 $V=\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是希尔伯特空间 X 中的规范正交序列,则对每个 $x \in X$ 成立帕塞瓦尔等式(3.17),即 x 可展成 V 的傅里叶级数 $\Leftrightarrow$ V 为 X 的完全集.

最后,我们给出关于可分的无限维希尔伯特空间的一个重要结论.

定理 3.5.33 设 X 是一个可分的无限维希尔伯特空间,则 X 与 l^2 同构.

这个定理的意义在于使我们能把所有可分的无限维希尔伯特空间等同起来,而且 l^2 实质上是唯一的可分的无限维希尔伯特空间.定理证明的要点,是先证明可分的无限维希尔伯特空间 X 必

有可列的完全集 V，然后利用每个 $x\in X$ 可以展成 V 的傅里叶级数及贝塞尔不等式，建立 X 与 l^2 之间的同构映射.

3.6 拓扑 拓扑空间

3.6.1 拓扑

前面几节中所涉及的极限理论，以及与极限有关的如开集、闭集、紧集等许多重要概念，都是通过距离而建立的. 除了度量空间中的距离，还包括范数导出的距离、内积导出的范数所导出的距离. 但是，分析数学中有些极限概念一般不能用距离来描述. 例如，定义在集 X 上的实函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 处处收敛于函数 f 的概念(即对所有 $x\in X$ 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$)就是如此，赋范线性空间中点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 弱收敛于点 x 的概念也是如此. 因此需要寻求新的途径，建立更为一般的极限理论.

我们知道，极限概念曾通过距离定义的邻域来刻画的，而邻域本身是一种开集. 如果在一个抽象集合中，直接从定义一族子集为开集出发，并且将定理 3.3.16 中关于一般度量空间的开集应当满足的三条性质，作为规定开集族时所必须遵循的三条公理，那么我们可以完全像在度量空间中那样定义点列的极限及闭集等各种概念，而不再需要利用距离的概念.

定义 3.6.1 如果集合 S 的子集族 τ 满足下列三条公理：

(1) $S,\varnothing\in\tau$；

(2) $A,B\in\tau \Rightarrow A\cap B\in\tau$；

(3) $A_\lambda\in\tau(\lambda\in\Lambda) \Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\in\tau$，

则称 τ 为 S 的一个**拓扑**(topology). τ 中每个元素(集合)称为 S 的**开集**(open set).

现在我们是在十分广泛的意义下来理解“开集”这个词的，只

要能够在一个集合中确切地规定了一个拓扑，那么它的每个成员就是一个开集. 当然，我们不能脱离拓扑来讲单个的开集. 下面是一个简单例子.

例 3.6.2 设集合 $S=\{a,b,c\}$，如下四个子集

$$S,\{a,b\},\{a,c\},\varnothing$$

不能构成 S 的一个拓扑，因为它们不包含子集 $\{a\}$，而 $\{a,b\}\cap\{a,c\}=\{a\}$，所以不符合定义 3.6.1 中公理(2). 如下五个子集

$$S,\{a,b\},\{a,c\},\{a\},\varnothing$$

则构成 S 的一个拓扑，按照这个拓扑，这五个子集而且只有这五个子集是 S 的开集. 显然，在 S 中我们还可以定义其它拓扑.

3.6.2 拓扑空间

定义 3.6.3 设在集合 S 中定义了一个拓扑 τ，则 S 与 τ 一起称为一个**拓扑空间**(topological space)，记作 (S,τ). S 的点、子集、开集与拓扑分别称为空间 (S,τ) 的点、子集、开集与拓扑.

一般，在同一集合中可以定义各种各样的拓扑，构成不同的拓扑空间.

例 3.6.4 设 S 是任一集合，A 是 S 的任一真子集，则 $S,A,\varnothing$ 是 S 的一个拓扑.

S 有两个最极端的拓扑：τ 由 S 与 $\varnothing$ 两个子集组成，开集个数最少，是 S 上最粗的拓扑，称为**平庸拓扑**(trivial topology)；τ 由 S 的所有子集组成，开集个数最多，是 S 上最细的拓扑，称为**离散拓扑**(discrete topology).

设 τ_1 与 τ_2 是 S 的两个拓扑. 如果 $\tau_1\subset\tau_2$，则称 τ_1 为**较弱拓扑**(weaker topology)，称 τ_2 为**较强拓扑**(stronger topology). 显然，最弱拓扑是平庸拓扑，最强拓扑是离散拓扑.

例 3.6.5 实数全体 $\mathbf{R}$ 上所有开区间及 $\varnothing$ 构成的集合不是 $\mathbf{R}$ 的拓扑. 因为虽然两个开区间的并集是通常意义下的开集，但可以

不是开区间，所以不满足拓扑的公理(3).

既然拓扑的三条公理是从度量空间中开集的三条性质抽象出来的，所以每个度量空间的开集全体必定构成一个拓扑. 度量空间是一类特殊的拓扑空间，拓扑空间是度量空间自然而重要的推广.

定义 3.6.6 度量空间(S,ρ)的开集全体构成的集合τ是S的一个拓扑，称为距离ρ的**导出拓扑**(derived topology). 说度量空间(S,ρ)是一个拓扑空间，就是指(S,τ). 反过来，拓扑空间(S,τ)称为**可度量化的**(metrizable)，如果存在S上的一个距离ρ，使τ就是ρ导出的、度量空间(S,ρ)的开集的全体.

例 3.6.7 离散拓扑空间(S,τ)是可度量化的. 因为按照离散度量ρ(见例 3.3.4 的(3))，S的所有子集既是开集又是闭集，所以τ就是离散度量空间(S,ρ)的开集的全体.

平庸拓扑空间(S,τ)包含不止一个点时便不能度量化. 因为假定它可度量化，则在S上有一个距离ρ，使得τ是由ρ导出的开集的集合. 取$x,y\in S$，$x\neq y$，而且$\varepsilon=\frac{1}{2}\rho(x,y)$，于是$B(x,\varepsilon)\cap B(y,\varepsilon)=\varnothing$. 但是邻域$B(x,\varepsilon)$与$B(y,\varepsilon)$都是$(S,\rho)$中的非空开集，它们必须属于$\tau=\{S,\varnothing\}$，即必须有$B(x,\varepsilon)=B(y,\varepsilon)=S$，从而得出$B(x,\varepsilon)\cap B(y,\varepsilon)=S\neq\varnothing$，这是一个矛盾.

以上平庸拓扑空间的例子，用到度量空间的不同点存在互不相交邻域(开集)的事实，同时表明一般拓扑空间可以不具有这样的分离性. 具有这样分离性的拓扑空间有如下专门的名称.

定义 3.6.8 设(S,τ)是一个拓扑空间，如果对于任何两点$x,y\in S$，$x\neq y$，必有开集$A,B\in\tau$，使得$x\in A$，$y\in B$且$A\cap B=\varnothing$，则称(S,τ)是**豪斯多夫空间**(Hausdorff space).

由定义，任何一个度量空间都一定是豪斯多夫空间. 还有一些别的分离性公理，根据这些公理可以定义其它类型的拓扑空间.

3.6.3 拓扑空间的基本概念与性质

定义 3.6.9 拓扑空间的任一开集称为它的每一点及每一子集的一个**邻域**(neighborhood).

依照这一定义，拓扑空间的拓扑既是开集族又是邻域族，从而用非常广泛的"邻域"代替了度量空间的(只是作为球心这一点的)"开球(邻域)". 在这个基础上，依照度量空间，我们可以引出拓扑空间的同名概念的定义.

定义 3.6.10 设 A 是拓扑空间 $X=(S,\tau)$ 的一个子集，$\tau=\{B_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$：

(1) A 与拓扑 $\tau\cap A\triangleq\{B_\lambda\cap A|\lambda\in\Lambda\}$($\tau\cap A$ 明显满足拓扑的三个公理)一起成一个拓扑空间，称为 X 的**子空间**.

(2) 如果存在 $B_\lambda\in\tau$ 使得 $x\in B_\lambda\subset A$，则称 x 为 A 的**内点**. A 的内点全体称为 A 的**内部**，并记作 $\operatorname{int}A$.

(3) 如果 $X-A\in\tau$，即 $X-A$ 为开集，则称 A 为 X 的**闭集**.

(4) 点 $x\in X$，如果 x 的每一邻域 $B_\lambda(\in\tau)$ 都包含 $A-\{x\}$ 的一个点，则称 x 为 A 的**聚点**. A 与其聚点全体的并集称为 A 的**闭包**，记作 $\overline{A}$.

(5) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个点列，点 $x\in X$，如果对于 x 的每一邻域 $B_\lambda(\in\tau)$，存在 $N=N(\lambda)$，使得

$$x_n\in B_\lambda,\ \forall\, n>N,$$

则称 x 为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个**极限点**，或说 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **收敛到点** x.

注意，在拓扑空间 $X=(S,\tau)$ 中，只要点 $x\in X$ 的每一邻域多于一个点时，x 便是 X 的聚点. 因此，X 或其子集是有限集时也可能有聚点. 比如 $S=\{a,b,c\}$，由 S、$\{a,b\}$、$\varnothing$ 组成拓扑 τ，这时 a 与 b 都是子集 $\{a,b\}$ 的聚点，a,b,c 都是 S 的聚点. 特别当 X 是平庸拓扑空间时：只要 X 不止一个点，则 X 的每一点都是聚点，这是因为每一点都只有唯一的邻域 S；而且 X 的每一点都是 X 中任一点

列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的极限点. 相反，当 X 是离散拓扑空间时，因为每一单点集都是该点的邻域，所以每个点都不是聚点，而且任一由无穷多个不同点组成的点列都不收敛. 可以看出，在拓扑空间中，x 是子集 A 的聚点$\not\Rightarrow A-\{x\}$中存在以 x 为极限点的由完全不同点组成的点列，收敛点列的极限点也不一定是唯一的. 以上这些，说明拓扑空间与度量空间有重要区别.

定义 3.6.11 设有拓扑空间 $X=(S_1,\tau_1)$，$Y=(S_2,\tau_2)$，映射 $f: X\to Y$，点 $x_0\in X$. 如果对于 $f(x_0)$的任一邻域 $B_{2\mu}\in\tau_2$，都存在 x_0 的一邻域 $B_{1\lambda}\in\tau_1$，使得

$$x\in B_{1\lambda}\Rightarrow f(x)\in B_{2\mu},$$

或者写成

$$f(B_{1\lambda})\subset B_{2\mu},$$

则称 f **在点** x_0 **连续**. 如果 f 在 X 的每一点连续，则称 $f: X\to Y$ 为**连续映射**.

如果 X 与 Y 存在连续的一一对应的映射 $f: X\to Y$，而且 $f^{-1}: Y\to X$ 也连续，则 X 与 Y 称为**同胚的**(homeomorphic)，记作 $X\simeq Y$. f 称为**拓扑映射**(topological mapping)或**同胚**(homeomorphism). 拓扑空间在拓扑映射下保持不变的性质，称为**拓扑性质**(topological property).

关于度量空间的定理 3.3.17，定理 3.3.21，定理 3.3.27 的大部分及定理 3.3.28，可推广于拓扑空间.

定理 3.6.12 拓扑空间 X 的闭集具有下列三个性质：

(1) X 与$\varnothing$是闭集；

(2) 两个闭集的并集是闭集；

(3) 任意多个闭集的交集是闭集.

定理 3.6.13 拓扑空间的子集与它们的闭包具有下列四个性质：

(1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$；

(2) $A\subset\overline{A}$;

(3) $\overline{\overline{A}}=A$;

(4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

定理 3.6.14 设 X 与 Y 是拓扑空间,对于映射 $f:X\to Y$,下列四个条件两两等价:

(1) f 是连续映射;

(2) Y 的每个开集在 f 下的原象都是 X 的开集;

(3) Y 的每个闭集在 f 下的原象都是 X 的闭集;

(4) $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$, $\forall A\subset X$.

定理 3.6.15 X 与 Y 是拓扑空间,$f:X\to Y$ 连续$\Rightarrow X$ 中的每个以 x 为极限点的收敛点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,象点列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Y 中收敛于 x 的象 $f(x)$.

与度量空间不同(见定理 3.3.27),定理 3.6.13 的逆定理一般不成立.

例 3.6.16 设 $S=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$. 令集合

$$\tau_1=\{S-C|C\text{ 是 }S\text{ 的可列子集}\},$$

利用德·摩根(De Morgan)公式(见定理 1.1.10 的(9)和(10)),容易验证 τ_1 是 S 的一个拓扑,于是有拓扑空间 $X=(S,\tau_1)$. 取 τ_2 是 S 的通常意义下的开子集全体形成的拓扑,因而又有拓扑空间 $Y=(S,\tau_2)$. 现定义映射 $f:X\to Y$, $f(x)=x$. 设 X 中的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 x_0,则因集合

$$S-\{x_n|x_n\neq x_0\}$$

是 x_0 的一个邻域,故必存在自然数 N,使得

$$x_n=x_0,\ \forall n>N.$$

因此象点列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 明显地收敛到 $f(x_0)$. 但是 f 不连续,因为比如令 B 是开区间$(1/4,3/4)$,它是 Y 的开集,然而它在 f 下的原象 $f^{-1}(B)=B$ 不是 X 的开集.

定理 3.6.17 (1) 拓扑空间 X 的恒等映射 $I:X\to X$ 是连续

映射.

(2) 若 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to Z$ 是拓扑空间之间的连续映射,则 $g\circ f:X\to Z$ 也是连续映射.

如果 $f:X\to Y$ 是拓扑映射,那么定理 3.6.14 与定理3.6.15 对 f^{-1} 也成立.这时还有如下结论:

(1) f 将 X 的每个开集映成 Y 的开集,即 A 是 X 的开集$\to f(A)$是 Y 的开集;

(2) f 将 X 的每个闭集映成 Y 的映集,即 A 是 X 的闭集$\to f(A)$是 Y 的闭集;

(3) A 是 X 的任一子集$\Rightarrow f(\bar{A})\supset f\overline{(A)}$,从而 $f(\bar{A})=f\overline{(A)}$;

(4) $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$收敛到点 $f(x_0)\Rightarrow\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛到 x_0.

由此可见,开集、闭集、子集的闭包与收敛点列都是拓扑性质.

下一定理表明,虽然拓扑空间是用开集族 τ 定义的,但同样可以用闭集族来定义.顺便指出,拓扑空间也可以用子集与它的闭包之间的对应来定义.

定理 3.6.18 设 S 是一个集合,σ 是 S 的一个子集族,具有定理 3.6.12 中闭集的三个性质,即

(1) $X,\varnothing\in\sigma$;

(2) $A,B\in\sigma\to A\cup B\in\sigma$;

(3) $A_\lambda\in\sigma(\lambda\in\Lambda)\Rightarrow\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\in\sigma$.

则存在 S 的一个拓扑 τ,使得拓扑空间(S,τ)的闭集族就是 σ.

可见,若把所假设的 σ 称为闭集族,则可把 S 与 σ 一起称为一个拓扑空间,记作(S,σ),作为拓扑空间理论的出发点.

还可以把度量空间中的列紧性与紧性等推广到拓扑空间.

参考文献

1. 江泽涵.拓扑学引论.上海科学技术出版社,1978 年

2. 夏道行，吴卓人，严绍宗，舒五昌. 实变函数论与泛函分析，下册. 1979 年
3. 关肇直，张恭庆，冯德兴. 线性泛函分析入门. 上海科学技术出版社，1979 年
4. I. J. Maddox 著，朱晓亮，张文深译. 泛函分析初步. 人民教育出版社，1981 年

4 线性泛函分析

4.1 引言

泛函分析作为数学的一个分支，形成于本世纪的30年代至40年代.由于其广泛而有效的应用，在短短的几十年中得到了迅速的发展，成为数学领域中影响很大、很有发展前途的一个分支.

泛函分析的基本概念开始建立于本世纪初.当时，人们试图用统一的方法去处理经典分析中各领域分散研究的一些问题，例如变分法、积分方程、正交函数系及逼近论等.这就产生了函数空间以及算子等泛函分析的基本概念.泛函分析用抽象的形式和统一的方法对一些表面上看起来很不相同的对象进行加工，不仅使经典分析中的概念更加一般化，而且能富有成效地解决问题.

泛函分析的方法具有高度的综合性和统一性.它除了使得经典分析的概念和方法更加系统化外，又能使问题的认识得到深化和拓广，从而能够应用于更广泛的对象.泛函分析的思想和结果揭示了数学和物理中许多问题的共同属性和相互联系.掌握泛函分析这个工具，有助于人们从更普遍的角度、更深刻地考察所研究的对象，启发人们更好地理解问题的实质，从而更好地开辟解决问题的途径.

20世纪中叶，由于运用了泛函分析的工具，使得偏微分方程理论、概率论、调和分析等得到了重大发展.近二三十年来，泛函分析已经渗透到许多纯数学及应用数学、物理、力学、现代控制理论、经济学及生物学等领域，在其与多种学科的相互渗透中，正在形成许多新的方法和新的数学分支.

4.2 线性拓扑空间

4.2.1 基本概念

定义 4.2.1 设 X 是一个线性空间,同时又是一个拓扑空间.如果 X 中的线性运算关于 X 上的拓扑是连续的,即由 $X\times X$ 到 X 的映射

$(x,y)\mapsto x+y$

及 $K\times X$ 到 X 的映射

$(\lambda,x)\mapsto \lambda x$

是连续的,则称 X 为**线性拓扑空间**(linear topological space).

其中 K 为实数或复数域,X 是 K 上的线性空间,$\lambda\in K$.

如果 Y 是线性拓扑空间 X 的一个线性子空间,则按照 X 中的线性运算及 X 在 Y 上产生的诱导拓扑,Y 也是一个线性拓扑空间.

定理 4.2.2 设 X 是线性拓扑空间,则

(1) 对任意确定的 $x_0\in X$ 及任意开集 $G\subset X$,集合 $x_0+G\triangleq\{x_0+x \mid x\in G\}$ 是 X 中的开集.

(2) 对任意的 $\lambda\in K$(实数或复数域),$\lambda\neq 0$ 及任意开集 $G\subseteq X$,集合 $\lambda G\triangleq\{\lambda x \mid x\in G\}$ 是 X 中的开集.

(3) 对任意的 $x_0\in X$,它的任意邻域具有形式 x_0+V,其中 V 是 X 中零元素 θ 的一个邻域.

定义 4.2.3 设 x_0 为线性拓扑空间 X 中的任一元素,$\mathscr{U}$ 是由 x_0 的某些邻域构成的集合族.如果对于 x_0 的每个邻域 V,总存在 $U\in\mathscr{U}$,使得 $U\subseteq V$,则称 $\mathscr{U}$ 是 x_0 的一个邻域基底(base of neighborhoods),或基本邻域系(basic neighborhood system).

由定理 4.2.2 可以推出,若 $\mathscr{U}$ 是零元素 θ 的一个邻域基底,

则对任意的 $x_0\in X$，集合族 $\mathscr{U}_{x_0}\triangleq\{x_0+U|U\in\mathscr{U}\}$ 是 x_0 的一个邻域基底.

定义 4.2.4 设 X 是 K 上的线性空间，$S\subset X$. 如果对任意的 $x\in S$ 及任意满足 $|\alpha|\leqslant 1$ 的 $\alpha\in K$，都有 $\alpha x\in S$，则称集合 S 是**平衡的**(balanced).

设 $S\subset X$ 为任意集合，所有包含 S 的平衡集的交集称为 S 的**平衡包**(balanced hull). 这是所有包含 S 的平衡集中最小的一个(在包含的意义下).

定义 4.2.5 设 X 是 K 上的线性空间，$S\subset X$. 如果对任意的 $x\in X$，总存在正数 δ，使得对所有满足 $0\leqslant|\alpha|<\delta$ 的 $\alpha\in K$ 都有 $\alpha x\in S$，则称 S 是**吸收的**(absorbing).

S 为吸收集的一个等价命题是：对每个 $x\in X$，存在正数 r，使得对每个满足 $|\alpha|\geqslant r$ 的 $\alpha\in K$，都有 $x\in\alpha S$.

定理 4.2.6 设 X 为线性拓扑空间，则它的零元素 θ 具有满足下列条件的邻域基底 $\mathscr{U}$：

(1) $\mathscr{U}$ 的每个元素都是一个平衡的、吸收的集合；

(2) 对每个 $U\in\mathscr{U}$，都存在 $V\in\mathscr{U}$，满足

$$V+V\triangleq\{x+y|x\in V,y\in V\}\subset U$$

(3) 对任意的 $U_1\in\mathscr{U}$，$U_2\in\mathscr{U}$，存在 $V\in\mathscr{U}$，满足 $V\subset U_1\cap U_2$.

这个定理的证明可以参阅文献[5].

定义 4.2.7 设 X 为线性空间，$A\subset X$. 所有包含 A 的凸集的交集称为 A 的**凸包**(convex hull)，记作 $C(A)$.

$C(A)$ 是所有包含 A 的凸集中最小的一个，它由所有形如 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$ 的元组成，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是在 A 中任取的元，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ 的任意一组非负实数，n 为任意自然数.

$C_o(A)$的闭包$\overline{C_o(A)}$称为 A 的**凸闭包**(closed convex hull). 这是所有包含 A 的闭凸集中最小的一个,也是所有包含 A 的闭凸集的交集.

定理 4.2.8 设 X 为线性拓扑空间,$A\subset X$.

(1) 若 A 是凸的,则 A 的闭包 $\bar{A}$ 与由 A 的所有内点构成的集合$\mathring{A}$都是凸集;

(2) 若 A 是平衡的,则 $\bar{A}$ 也是平衡的;

(3) 若 A 是吸收的凸集,则 $\overline{A}$、$\mathring{A}$也是吸收的凸集.

定义 4.2.9 设 X 为线性拓扑空间,$A\subset X$. 如果对于零元素 θ 的每个邻域 U,都存在正数 λ,使得 $A\subset\lambda U$,则称 A 是 X 中的一个**有界集**(bounded set).

4.2.2 局部凸空间

定义 4.2.10 设 X 是一个具有豪斯多夫拓扑的线性拓扑空间. 如果零元素 θ 具有一个凸的邻域基底,即 θ 的每个邻域都包含 θ 的某个凸邻域,则称 X 是一个**局部凸空间**(locally convex space).

如果 X 是局部凸空间,则 X 中的每个元都有一个凸的邻域基底.

定义 4.2.11 设 X 是一个线性空间,$\mathscr{P}$ 是 X 上的一族半范数. 如果对每个 $x\in X,x\neq\theta$,总存在 $p\in\mathscr{P}$,使得 $p(x)\neq 0$,则称半范数族 $\mathscr{P}$ 满足**可分公理**(axiom of separation).

定理 4.2.12 设 X 是线性空间,$\mathscr{P}$ 是 X 上的满足可分公理的一族半范数. 在 $\mathscr{P}$ 中任取有限个半范数 $p_1,\cdots,p_n$ 及一组任意的正数 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$,令

$$U=\{x\in X\mid p_i(x)\leqslant\varepsilon_i,i=1,\cdots,n\},$$

则 U 是零元素 θ 的一个凸的、平衡的、吸收的邻域. 所有这样得到

的邻域的集合记为 $\mathscr{U}$，则 $\mathscr{U}$ 是 θ 的一个邻域基底. 按照这个拓扑，X 是一个局部凸空间.

定义 4.2.13 设 X 是线性空间，$A\subset X$ 是一个凸的、吸收的集合. 对任意 $x\in X$，令

$$M_A(x) = \inf\left\{\alpha \mid \alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in A\right\},$$

称 M_A 为集合 A 的**闵可夫斯基泛函**(Minkowski functional).

定理 4.2.14 设 A 是线性空间 X 中的一个凸的、平衡的、吸收的集合，则 A 的闵可夫斯基泛函是 X 上的一个半范数.

定理 4.2.15 设 X 是一个局部凸空间，则其零元素 θ 的所有凸的、平衡的、吸收的开邻域所产生的闵可夫斯基泛函所构成的半范数族满足可分公理，并且由这个半范数族按照定理 4.2.14 构造的拓扑与 X 上原有拓扑一致.

4.2.3 弗雷歇空间

定义 4.2.16 设 X 是线性空间. 对每个 $x\in X$，指定一个实数 $\|x\|$ 与其对应，如果这个对应关系满足下列条件：

(1) $\|x\|\geqslant 0$, $\forall x\in X$. 当且仅当 $x=\theta$ 时有 $\|x\|=0$.

(2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, $\forall x,y\in X$.

(3) $\|-x\|=\|x\|$, $\forall x\in X$.

(4) $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0$，其中 $x\in X$ 为任意元素，$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为任意数列.

(5) $\lim\limits_{x_n\to\theta}\|\alpha x_n\|=0$，其中 α 为任一确定的数，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 中的任意序列. 则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个**拟范数**(quasi norm)，并称 X 是一个**赋拟范线性空间**(quasi normed linear space).

定义 4.2.17 设 X 是一个赋拟范线性空间. 如果 X 是完备的，即对任意的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n\|=0$，则存在 x

$\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$$

那么，称 X 是一个**弗雷歇**(Fréchet)**空间**. 也就是说弗雷歇空间就是完备的赋拟范线性空间.

例 4.2.18 设 X 为所有定义在某个拓扑空间 Y 上的连续实(或复)值函数构成的线性空间. 对于 Y 中的每个紧集 K，令

$$p_K(x) = \sup_{y\in K}|x(y)|, \quad \forall x \in X.$$

则 p_K 是 X 上的一个半范数. 当 K 取遍 Y 中所有紧集时，得到的半范数族 $\mathscr{P}$ 按定理 4.2.12 在 X 上产生的拓扑使 X 成为一个局部凸空间.

按照这个拓扑，X 中的序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛于 $x_0\in X$ 的充分必要条件是：在 Y 的任意一个紧集上，$\{x_n(y)\}_{n=1}^\infty$ 一致收敛于 $x_0(y)$.

定理 4.2.19 设 X 是一个线性空间，$\{p_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 上的一列半范数. 如果由 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ 按照定理 4.2.14 确定的拓扑使 X 成为局部凸空间，那么若对每个 $x\in X$，令 $\|x\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}p_n(x)$，则 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个拟范数.

例 4.2.20 设 S 为所有的实(或复)数列构成的线性空间. 对每个 $x=\{\xi_n\}_{n=1}^\infty\in S$，令

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|},$$

则 $\|\cdot\|$ 是 S 上的一个拟范数.

例 4.2.21 设 E 是一个勒贝格(Lebesgue)可测集，$mE<+\infty$. 记 S 为 E 上的所有几乎处处有限的实值可测函数构成的线性空间. 对每个 $x\in S$，令 $\|x\| = \int_E \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\mathrm{d}m$，则 S 是一个弗雷歇空间，但不是局部凸空间.

定义 4.2.22 设 X 是一个线性空间，$\{X_n\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的一列线

性子空间，满足

$$X_n \subset X_{n+1}, \quad n = 1,2,\cdots,$$

$$X = \bigcup_n X_n.$$

又设每个 X_n 都是局部凸空间，并且对每个自然数 n，X_{n+1} 上的拓扑在 X_n 上的诱导拓扑恰好与 X_n 的原有拓扑一致.

记 $\mathscr{U}$ 为 X 中所有平衡吸收的凸集构成的集合族，对每个 $U \in \mathscr{U}$，设 $U \cap X_n$ 是 X_n 中的开集 $(n=1,2,\cdots)$. 则 $\mathscr{U}$ 具有下列性质：

(1) $\mathscr{U}$ 是 $\theta \in X$ 的一个邻域基底，使得 X 成为一个局部凸空间；

(2) 这个拓扑在每个 X_n 上的限制与 X_n 上原有拓扑一致；

(3) 如果每个 X_n 是完备的，则 X 也是完备的.

这时，称 X 为 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 的**严格归纳极限**(strict inductive limit).

4.3 有界线性算子

4.3.1 定义与基本性质

定义 4.3.1 设 X、Y 是两个线性空间. 定义在 X 中的某个集合 Ω 上、取值于 Y 的映射 T 称为算子(operator). $\Omega \subset X$ 称为 T 的**定义域**(domain)，记作 $\mathscr{D}(T)$；$\mathscr{D}(T)$ 的像集：$\{y \in Y \mid y = Tx, x \in \mathscr{D}(T)\}$ 称为 T 的**值域**(range)，记作 $\mathscr{R}(T)$.

通常用记号 $T: \mathscr{D}(T) \subset X \mapsto Y$ 表示 T 的定义域是 X 中的一个子集，T 的值域含于 Y 中.

如果对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(T)$，有

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2,$$

则称 T 是**可加的**(additive).

如果对任意的$x\in\mathscr{D}(T)$，及任意的数α，总有

$$T(\alpha x)=\alpha Tx,$$

则称T是**齐次的**(homogeneous).

可加的、齐次的算子称为**线性算子**(linear operator).

T为线性算子的充要条件是：对任意的$x_1,x_2\in\mathscr{D}(T)$及任意的数α,β，有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2.$$

定义 4.3.2 设X,Y是赋范线性空间，分别具有范数$\|\cdot\|_X$，$\|\cdot\|_Y$. 又设

$$T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$$

是一个线性算子. 如果存在常数M，使得对所有的$x\in\mathscr{D}(T)$，都有

$$\|Tx\|_Y\leqslant M\|x\|_X$$

则称T是一个**有界线性算子**(bounded linear operator).

定理 4.3.3 设X,Y是赋范线性空间，又设

$$T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y,$$

是一线性算子，则：

(1) T为有界线性算子的充分必要条件是：T将X中的任意有界集映为Y中的有界集.

(2) T有界的充分必要条件是：存在一个元素$x_0\in X$，及某个正数r，使得

$$\sup\{\|Tx\|_Y\mid\|x-x_0\|=r\}<+\infty.$$

定理 4.3.4 设X,Y为赋范线性空间，又设

$$T:\mathscr{D}(T)=X\to Y$$

为线性算子. 如果T在一点连续，则T在整个X上连续.

事实上，由于T的线性，可以不妨设T在零点θ连续，即对任意的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，只要$\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n\|=0$，就有

$$\lim_{n\to+\infty}\|Tx_n - T\theta\| = \lim_{n\to+\infty}\|Tx_n\| = 0.$$

设 $x_0\in X$ 为任一点,序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$,使 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|y_n - x_0\| = 0$,则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|y_n - x_0 - \theta\| = 0$,于是,若令 $x_n = y_n - x_0$,$n=1,2,\cdots$,则由 T 在 θ 点的连续性就推出

$$\lim_{n\to+\infty}\|Ty_n - Tx_0\| = \lim_{n\to+\infty}\|T(y_n - x_0)\| = 0.$$

即 T 在 x_0 处也是连续的.

定理 4.3.5 设 X,Y,T 同定理 4.3.4,则 T 有界的充分必要条件是 T 在 X 上连续.

事实上,若 T 在零点 θ 连续,则对于 $\varepsilon=1$,存在正数 δ,只要 $\|x\|\leqslant\delta$,就有 $\|Tx\|_Y\leqslant 1$. 于是 $\sup\{\|Tx\|_Y : \|x-\theta\|=\delta\}\leqslant 1$. 由定理 4.3.3 的(2),$T$ 是有界线性算子.

反之,若 T 有界,即存在正数 M,使得对所有的 $x\in X$,有 $\|Tx\|_Y\leqslant M\|x\|_X$,则对任意的正数 ε,只要 $\|x\|_X<\dfrac{\varepsilon}{M}$,就有

$$\|Tx\|_Y\leqslant M\|x\|_X<\varepsilon.$$

因此 T 在 θ 点连续,再由定理 4.3.4,便知 T 在整个 X 上连续.

4.3.2 有界线性算子空间

定义 4.3.6 设 X,Y 为赋范线性空间. 考虑由所有的定义域 $\mathscr{D}(T)=X$,值域 $\mathscr{R}(T)\subset Y$ 的有界线性算子 T 构成的集合 $\mathscr{L}(X,Y)$. 对于任意的 $T_1,T_2\in\mathscr{L}(X,Y)$ 及任意的数 α,β,令

$$(\alpha T_1+\beta T_2)x=\alpha T_1x+\beta T_2x,\quad \forall x\in X.$$

则 $\mathscr{L}(X,Y)$ 成为一个线性空间.

又对任意的 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$,令

$$\|T\|=\sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} : x\in X,\ \|x\|\neq 0\right\}$$

则这是一个范数，称为 T 的**算子范数**. 于是 $\mathscr{L}(X,Y)$ 是一个赋范线性空间，称为由 X 到 Y 的**有界线性算子空间**(space of bounded linear operators).

当 $Y=X$ 时，$\mathscr{L}(X,X)$ 简记为 $\mathscr{L}(X)$.

容易验证，有

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_Y \mid x\in X,\ \|x\|_X=1\}\\ &= \inf\{M \mid \|Tx\|_Y\leqslant M\|x\|_X,\ \forall x\in X\}.\end{aligned}$$

定义 4.3.7 设 X,Y 同上，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathscr{L}(X,Y)$ 中的一列元素，$T\in\mathscr{L}(X,Y)$. 如果

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_n-T\|=0,$$

则称 $\{T_n\}$ **按算子范数收敛于** T.

如果 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按算子范数收敛于 T，则在 X 中的任意有界集上，

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_nx-Tx\|=0$$

一致成立. 因此，按算子范数收敛又称为一致收敛.

定理 4.3.8 设 $X,Y,\mathscr{L}(X,Y)$ 同定义 4.3.6，如果 Y 是巴拿赫(Banach)空间，则 $\mathscr{L}(X,Y)$ 也是巴拿赫空间. 也就是说，如果 $\mathscr{L}(X,Y)$ 中的序列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{m,n\to+\infty}\|T_m-T_n\|=0,$$

则必存在 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$，使

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_n-T\|=0.$$

定义 4.3.9 设 X,Y 是赋范线性空间，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{L}(X,Y)$ 中的一个序列，如果对每一个 $x\in X$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_nx-Tx\|=0,$$

则称序列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ **强收敛**(strong convergence)于 T. 记为 $\lim\limits_{n\to+\infty} sT_n$

$\to T$,或 $T_n \xrightarrow{s} T$,$(n\to+\infty)$.

定理 4.3.10 有界线性算子序列的按范数收敛可以推出强收敛;反之则不然.

例 4.3.11 设 X 为赋范线性空间,对任意 $x\in X$,令 $Ix=x$,称 I 为 X 上的**恒同算子**(identical operator).显然,有 $\|I\|=1$.

例 4.3.12 对任意 $f\in C[0,1]$,令

$$P_n(t)\triangleq\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i},\ n=1,2,\cdots$$

则由定理 2.8.8,$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在$[0,1]$上一致收敛于 f.令

$$T_nf=P_n,\ f\in C[0,1],\ n=1,2,\cdots$$

于是$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$是 $C[0,1]$到自身的一列有界线性算子,并且强收敛于 $C[0,1]$上的恒同算子 I.

但是,$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$并不按算子范数收敛于 I.事实上,任意固定 $n\geqslant1$,构造$[0,1]$上的一个连续函数 f_n 如下:

$$f_n(t)=\begin{cases}1, & t=\dfrac{1}{2n};\\ 0, & t\in\left[\dfrac{1}{n},1\right]\text{及 } t=0;\\ \text{线性联结,其它.}\end{cases}$$

易见$(T_nf_n)(t)=P_n(t)\equiv0$,但是

$$\|T_nf_n-If_n\|=\|P_n-f_n\|\geqslant\left|P_n\left(\frac{1}{2n}\right)-f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|$$

$$=f_n\left(\frac{1}{2n}\right)=1.$$

注意到 $\|f_n\|=1$,所以

$$\|T_n-I\|\geqslant\|T_nf-If\|=1.$$

这说明$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$不按算子范数收敛于恒同算子 I.

例 4.3.13 设 K 是定义在矩形 $a\leqslant t,s\leqslant b$ 上的可测函数,满足

$$\iint |K(t,s)|^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}s < +\infty,$$

对任意的 $x \in L^2(a,b)$，若令

$$y(t) = (Tx)(t) \triangleq \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

则 $y \in L^2(a,b)$. 并且

$$\|y\| \leqslant \left(\iint |K(t,s)|^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|.$$

因此 T 是 $L^2(a,b)$ 到自身的一个有界线性算子. 这个算子称为**积分算子**(intergral operator). 函数 K 称为算子 T 的**积分核**(kernel of integral).

例 4.3.14 设 $X = C[0,2\pi]$，令

$$(Tx)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t),$$

则 T 是一个线性算子，它的定义域是 $C[0,2\pi]$ 中的那些具有连续导数的函数构成的子空间. 算子 T 称为**微分算子**(derivative operator). 算子 T 是无界的，例如令 $x_n(t) = \sin nt\ (n = 1,2,\cdots)$，则 $\|x_n\| = 1$. 但是 $\|Tx_n\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} |n\cos nt| = n$.

定理 4.3.15 设 X,Y 都是巴拿赫空间，则 $L(X,Y)$ 在算子强收敛意义下是完备的. 即若 $L(X,Y)$ 中的序列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n,m\to\infty} \|T_m x - T_n x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

则必存在 $T \in L(X,Y)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0, \quad \forall x \in X,$$

并且还有

$$\|T\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

定理 4.3.16 设 X,Y 都是巴拿赫空间，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L(X,Y)$ 中的一个序列. 则序列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 强收敛于某个 $T \in L(X,Y)$ 的充分必要条件是：

(1) $\sup_n \{\|T_n\|\} < +\infty$;

(2) 存在 X 中的某个稠集 E，使得对每个 $x \in E$，$\lim_{n\to\infty} T_n x$ 存在.

4.3.3 算子乘法与逆算子

定义 4.3.17 设 X,Y,Z 都是赋范线性空间，$T \in \mathscr{L}(X,Y)$，$S \in \mathscr{L}(Y,Z)$. 则 T 与 S 的乘积 ST(multiplication)是 $\mathscr{L}(X,Z)$中的元素，使得

$$(ST)x = S(Tx), \quad \forall x \in X.$$

定理 4.3.18 算子乘法有下列性质：

(1) 若 X,Y,Z,W 都是赋范线性空间，$T \in \mathscr{L}(X,Y)$，$S \in \mathscr{L}(Y,Z)$，$R \in \mathscr{L}(Z,W)$. 则有

$$RST = R(ST) = (RS)T.$$

(2) 若 $T_1,T_2 \in \mathscr{L}(X,Y)$，$S \in \mathscr{L}(Y,Z)$，则有

$$S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2.$$

(3) 若 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$，$S_1,S_2 \in \mathscr{L}(Y,Z)$，则有

$$(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T.$$

(4) 若 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$，$S \in \mathscr{L}(Y,Z)$，则对任意的数 α,β，有

$$(\alpha S)(\beta T) = (\alpha\beta)ST.$$

(5) 若 $T \in \mathscr{L}(X,Y)$，$S \in \mathscr{L}(Y,Z)$，则

$$\|ST\| \leqslant \|S\| \|T\|.$$

定义 4.3.19 设 X 为赋范线性空间，$T_1,T_2 \in \mathscr{L}(X)$，如果 $T_1T_2 = T_2T_1$，则称 T_1 与 T_2 是**可交换的**(comutative).

定义 4.3.20 设 X 为赋范线性空间，对任意的 $T \in \mathscr{L}(X)$，规定 $T^0 = I$，$T^1 = T$，$T^{n+1} = T \cdot T^n$. ($n = 1,2,\cdots$.).

定义 4.3.21 设 X 是赋范线性空间，$T \in \mathscr{L}(X)$，如果 T 是 $\mathscr{D}(T) = X$ 到 $\mathscr{R}(T)$的一个一一对应，则 T 的逆算子 T^{-1}存在，如

果 $T^{-1}\in\mathscr{L}(X)$，则称 T 是**有界可逆的**(bounded invertible).

定理 4.3.22 设 X 为赋范线性空间，$T\in\mathscr{L}(X)$. 如果存在 $S\in\mathscr{L}(X)$，使得对所有的 $x\in X$，有

$$TSx = STx = x,$$

则 T 是有界可逆的，并且 $T^{-1}=S$.

定理 4.3.23 设 X 为赋范线性空间，$T\in\mathscr{L}(X)$满足 $\|T\|<1$，则算子级数 $\sum_{n=0}^{\infty}T^n$ 按算子范数收敛，即当 $n\to+\infty$ 时，$S_n\triangleq\sum_{i=0}^{n}T^i$ 按算子范数收敛于某个 $S\in\mathscr{L}(X)$. 这时算子$(I-T)$有界可逆，并且

$$(I-T)^{-1}=S,\ \|(I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|T\|}.$$

定理 4.3.24 设 X 为赋范线性空间，$T\in\mathscr{L}(X)$，设 T 有界可逆，则对任意满足 $\|S\|<\|T^{-1}\|^{-1}$的 $S\in\mathscr{L}(X)$，$T+S$ 也是有界可逆的，并且

$$(T+S)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-T^{-1}S)^nT^{-1}.$$

4.4 连续线性泛函

4.4.1 基本概念与性质

定义 4.4.1 设 X 是(实或复)数 K 上的赋范线性空间. 定义在 X 上而取值于 K 的算子称为**泛函**(functional). 因此，定义在 X 上而取值于 K 的有界线性算子就称为有界线性泛函，或**连续线性泛函**(continuous linear functional). 连续线性泛函常用小写字母 f，g 等表示.

对于每个连续线性泛函 f，令

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|_X} \middle| x \in X, \|x\| \neq 0\right\},$$

则 X 上的所有连续线性泛函构成一个赋范线性空间，这是有界线性算子空间的一个特殊情形.

由于数域 K 本身是一个巴拿赫空间，所以，X 上所有连续线性泛函构成的赋范线性空间是一个巴拿赫空间. 称这个空间为 X 的**共轭空间**(conjugate space)，记为 X^*. 有些文献也称 X^* 为**对偶空间**(dual space)或**伴随空间**(adjoint space).

定义 4.4.2 设 X 是一个线性空间，P 是定义在 X 上的一个实泛函，满足下列条件：

(1) 对任意的 $x,y\in X$，有

$$P(x+y) \leqslant P(x) + P(y),$$

这个性质称为**次可加性**(subadditivity).

(2) 对任意的 $x\in X$ 及非负数 α，有

$$P(\alpha x) = \alpha P(x),$$

则称 P 是 X 上的一个**凸泛函**(convex functional).

定理 4.4.3 (汉恩-巴拿赫定理) 设 X 是一个实线性空间，P 是 X 上的一个凸泛函，V 是 X 的一个线性子空间. 如果在 V 上有一个线性泛函 f_0，满足

$$f_0(v) \leqslant p(v), \quad \forall v \in V,$$

则存在一个 X 上的线性泛函 f，满足：

(1) $f(v)=f_0(v)$, $\forall v\in V$.

(2) $f(x)\leqslant p(x)$, $\forall x\in X$.

这个定理称为实线性空间上的汉恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理.

定理 4.4.3 有明显的几何意义(见图 4.1). 设 $X=\mathbf{R}^2$，$V=\mathbf{R}$，又设 P 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个凸泛函，其图象恰好是以原点为顶点的凸锥面. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的线性泛函 f_0，其图象是 (v,z) 平面上的一条

过原点的直线，按照定理条件，这条直线位于凸锥面的下方. 定理结论告诉我们，这时必存在一个过原点的平面，它包含上述直线而同时又完全位于锥面的下方.

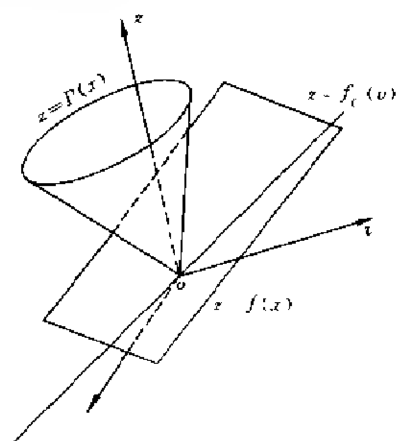


图 4.1

定理 4.4.4 设 X 是复线性空间，P 是 X 上的一个半范数，V 是 X 的一个线性子空间，又设在 V 上定义了一个线性泛函 f_0，满足

$$|f_0(v)| \leqslant P(v), \qquad \forall v \in V.$$

则存在一个 X 上的线性泛函 f，满足

(1) $f(v)=f_0(v), \qquad \forall v\in V,$

(2) $f(x) \leqslant P(x), \qquad \forall x\in X.$

这个定理称为复线性空间上的汉恩-巴拿赫定理.

定理 4.4.5 设 X 为(实或复)赋范线性空间，V 是 X 的一个线性子空间，f_0 是 V 上的一个连续线性泛函. 则存在 X 上的连续线性泛函 f，满足

(1) $f(v)=f_0(v)$, $\quad \forall v\in V$.

(2) $\|f\|=\|f_0\|_V$.

其中 $\|f_0\|_V$ 表示 f_0 作为 V 上的连续线性泛函所具有的范数.

这个定理表明,在赋范线性空间上,定义在一个子空间上的连续线性泛函可以保范延拓到整个空间上去.

定理 4.4.6 设 X 为赋范线性空间,$x_0\in X$ 为任一元素,则存在 X 上的连续线性泛函 f,使得 $\|f\|=1$,$f(x_0)=\|x_0\|$.

这个定理可以换一种叙述形式:对任意的非零元 $x_0\in X$,存在 $f\in X^*$,满足 $f(x_0)=1$,并且 $\|f\|=\|x_0\|^{-1}$.

定理 4.4.6 说明,在赋范线性空间上存在"足够多"的连续线性泛函,可以"分离"任意不同的元素,即若 $x,y\in X$,$x\neq y$,则存在 $f\in X^*$,使 $f(x)\neq f(y)$.

定理 4.4.7 设 X 是赋范线性空间,V 是 X 的一个线性子空间,$x_0\in X$ 为一元素. 如果

$$d=d(x_0,V)\triangleq\inf\{\|x_0-v\|\,\big|\,v\in V\}>0,$$

则存在 $f\in X^*$,满足

$$\|f\|=\frac{1}{d},\quad f(x_0)=1,$$

并且对于所有的 $v\in V$,有 $f(v)=0$.

这个定理也可以换一种叙述方式:存在 $f\in X^*$,使 $\|f\|=1$,$f(x_0)=d$,并且对所有的 $v\in V$,有 $f(v)=0$.

定理 4.4.8 设 V 是赋范线性空间 X 的一个子空间,则 V 在 X 中稠密的充分必要条件是:对任意的 $f\in X^*$,如果 f 限制在 V 上恒为零,则 f 一定是 X 上的零泛函,即$\forall x\in X$,有 $f(x)=0$.

定理 4.4.9 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是赋范线性空间 X 中的 n 个已知元素,则对任意的 $x\in X$,有

$$\min\left\{\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\| \alpha_1,\cdots,\alpha_n \text{为任意数}\right\}$$
$$=\sup\{f(x) \mid f\in X^*, \|f\|=1, f(e_1)=\cdots=f(e_n)=0\}.$$

也就是说,在 X 上的一个最佳逼近问题可以化为共轭空间 X^* 上的一个求极值的问题.

4.4.2 连续线性泛函的一般形式

定义 4.4.10 设 X,Y 是两个赋范线性空间,又设 T 是一个定义域 $\mathscr{D}(T)=X$,值域 $\mathscr{R}(T)=Y$ 的一一对应的线性算子,则称 T 是 X 到 Y 的一个**同构映射**(isomorphic mapping). 如果对于任意的 $x\in X$,还有 $\|Tx\|_Y=\|x\|_X$,则称 T 是一个**等距的同构映射**(isometrically isomorphic mapping). 这时我们称 X 与 Y 互相(等距)**同构**.

定理 4.4.11 设 $1<p<+\infty$,(a,b)是一个任意的(有限或无限的)区间. 则对于 $L^p(a,b)$上的任一个连续线性泛函 f,必存在唯一的一个 $u\in L^q(a,b)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$,使得

$$f(x)=\int_{(a,b)} xu\mathrm{d}m, \quad \forall\, x\in L^p(a,b).$$

并且有

$$\|f\|=\|u\|_q,$$

其中等式左端是连续线性泛函 f 的范数,右端是 u 作为 $L^q(a,b)$ 中元素的 q 范数.

这个定理表明,$L^p(a,b)^*$ 中的每个元素 f 都对应唯一的一个 $u\in L^q(a,b)$. 显然,不同的 f 对应不同的 u,并且这个对应关系保持范数不变. 另外,若 f_1,f_2 分别对应于 u_1,u_2,则对于任意的数 α,β,泛函 $\alpha f_1+\beta f_2$ 对应于函数 $\alpha u_1+\beta u_2$. 也就是说,这个对应关系是线性的. 因此,$L^p(a,b)^*$ 与 $L^q(a,b)$是互相等距同构的. 在这个

意义之下，可认定 $L^p(a,b)^* = L^q(a,b)$.

定理 4.4.12 设 $1<p<+\infty$，记 l^p 为所有满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < +\infty,$$

的(实或复)数列 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 所组成的巴拿赫空间，对每个这样的数列 $x \triangleq \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$，它的范数是

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

则 $(l^p)^* = l^q$，$\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

也就是说，对于每个 $f \in (l^p)^*$，存在唯一的 $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^q$，使得对任意的元素 $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$，有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n,$$

并且

$$\|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

反之，由任意的 $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^q$，由式 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n$ 唯一地确定了一个 l^p 上的连续线性泛函 f.

定理 4.4.13 对于任意的区间 (a,b)，有 $L(a,b)^* = L^{\infty}(a,b)$. 其中 $L(a,b)$ 为 (a,b) 上的所有勒贝格可积函数构成的巴拿赫空间；$L^{\infty}(a,b)$ 是所有的有界可测函数构成的巴拿赫空间.

定理 4.4.14 $(l^1)^* = l^{\infty}$，也就是说，对于任意的一个 l^1 上的连续线性泛函 f，存在唯一的 $y \triangleq \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}$，使得对于任意的 $x \triangleq \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$，有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n.$$

并且

$$\|f\| = \sup_n |\eta_n|.$$

定理 4.4.15 对于$C[a,b]$上的每个连续线性泛函f,存在$[a,b]$上的有界变差函数V,使得对所有$x\in C[a,b]$,有

$$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t),$$

并且

$$\|f\| = \overset{b}{\underset{a}{V}}(v).$$

定理 4.4.16 设X是希尔伯特(Hilbert)空间,那么

(1) 对于X上的每个连续线性泛函f,存在唯一的元素$u\in X$,使得对所有的$x\in X$,有

$$f(x) = (x,u)$$

并且

$$\|f\| = \|u\|_X.$$

(2) 设$u\in X$为任一元素,则由

$$f(x) = (x,u)$$

确定了X上的一个连续线性泛函f,并且$\|f\| = \|u\|_X$.

这就是说,X^*与X之间确定了一个保范(因而等距)的对应.这个对应满足

(1) 若泛函f_1,f_2分别对应元素u_1,u_2,则f_1+f_2对应于u_1+u_2.

(2) 若泛函f对应于元素u,则对于任意的数α,泛函αf对应于$\bar{\alpha}u$.

这种对应关系称为**共轭线性的**(conjugate linear).也就是说,在X^*与X之间,建立了一个(共轭)线性同构等距的对应关系.在这个意义下,我们认定$X^*=X$.当X为实希尔伯特空间时,X^*与X的对应关系是一个真正的线性同构.

定理 4.4.16 称为**里斯表现定理**(Riesz representation theo-

rem).

4.4.3 凸集分离定理

定义 4.4.17 设 X 是一个线性空间,f 是 X 上的一个实值线性泛函,对任意的实数 a,X 中的集合 $L_f(a) \triangleq \{x \in X \mid f(x) = a\}$ 称为 X 中的一个**超平面**(hyperplan).

定义 4.4.18 设 A,B 是局部凸空间 X 中两个任意的集合.如果存在 X 上的连续线性泛函 f,及实数 a,使得

$$f(x) \leqslant a, \quad \forall x \in A,$$
$$f(x) \geqslant a, \quad \forall x \in B,$$

则称超平面 $L_f(a)$**分离**(separate)A 与 B.

如果满足

$$f(x) < a, \quad \forall x \in A,$$
$$f(x) > a, \quad \forall x \in B,$$

则称超平面 $L_f(a)$**严格分离**(strictly separate)A 与 B.

如果又存在正数 ε,使得

$$f(x) \leqslant a, \quad \forall x \in A,$$
$$f(x) > a + \varepsilon, \quad \forall x \in B,$$

则称超平面 $L_f(a)$**强分离**(strong separate)A 与 B.

定理 4.4.19 设 X 是一个局部凸空间,A 与 B 是 X 中的两个非空凸集,那么

(1) 若 A,B 中至少有一个有内点(例如其中之一为开集),则有超平面分离 A,B.

(2) 若 A,B 都是开集,则存在超平面严格分离 A,B.

(3) 若 A 是紧集,B 是闭集,则存在超平面强分离 A,B.

4.5 有界线性算子的基本定理

定义 4.5.1 设X,Y是两个集合,T是定义在X上而取值于Y的一个映射.如果对每个$y\in\mathscr{R}(T)$,至多有一个$x\in\mathscr{D}(T)$,满足$Tx=y$,则称T是一个**单射**(injective);如果对任意的$y\in Y$,至少存在一个$x\in\mathscr{D}(T)$,使$Tx=y$,即$\mathscr{R}(T)=Y$,则称T是一个**满射**(surjective).

定义 4.5.2 设X,Y是两个拓扑空间,T是定义在$\mathscr{D}(T)=X$,取值于Y的一个映射.如果T将X中的任意开集映为Y中的开集,则称T为**开映射**(open mapping).

定理 4.5.3 设X,Y是两个巴拿赫空间,T是$\mathscr{D}(T)=X$到Y的一个有界线性算子,如果T是一个满射,则T是一个开映射.

这个定理称为**开映射定理**(open mapping theorem).

定理 4.5.4 设X,Y是两个巴拿赫空间,$T\in\mathscr{L}(X,Y)$.如果T既是单射,又是满射,则$T^{-1}\in\mathscr{L}(Y,X)$.

这个定理称为**巴拿赫逆算子定理**(Banach inverse operator theorem).

定义 4.5.5 设X、Y是两个赋范线性空间,T是定义在$\mathscr{D}(T)\subset X$、取值于Y的一个映射,则称$X\times Y$中的集合$\{(x,y)\mid(x,y)\in X\times Y,x\in\mathscr{D}(T),y=Tx\}$为$T$的**图象**(graph),记为$G(T)$.

定义 4.5.6 设X,Y是两个赋范线性空间,则$X\times Y$也是一个赋范线性空间.设T是一个$\mathscr{D}(T)\subset X$到Y的线性算子,如果T的图象$G(T)$是$X\times Y$中的一个闭集,则称T为**闭算子**(closed operator).

定理 4.5.7 设X,Y是赋范线性空间,$T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$是一个线性算子,则$T$为闭算子的充分必要条件是:对于$\mathscr{D}(T)$中

的任意序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果存在$x\in X$，$y\in Y$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n-y\|=0$，则必有$x\in\mathscr{D}(T)$，并且$Tx=y$.

定理 4.5.8 设X、Y是两个巴拿赫空间，T是$\mathscr{D}(T)=X$到Y的一个线性算子，如果T是闭的，则T是有界的.

这个定理称为**闭图象定理**(closed graph theorem).

定理 4.5.9 设X、Y是巴拿赫空间，则

(1) 若$T\in\mathscr{L}(X,Y)$，则T是闭算子.

(2) 设$T:D(T)\subset X\mapsto Y$是一个闭算子，如果T^{-1}存在，则T^{-1}也是闭算子.

例 4.5.10 考虑常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right]+q(t)x(t)=y(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$x(0)=x'(0)=0.$$

其中p在$[0,1]$上具有连续的一阶导数，并且满足$p(t)>0$，$(0\leqslant t\leqslant 1.)$ $q\in C[0,1]$. 在常微分方程理论中已经知道，对任意的在$[0,1]$上连续的函数y，这个方程有唯一的解x. 下面证明方程的解对右端的连续依赖性.

用$C^1[0,1]$表示所有的在$[0,1]$上连续可微的函数构成的线性空间，对其中每个函数x，令$\|x\|_1=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|$，则$C^1[0,1]$构成一个巴拿赫空间. 又令

$$C_0^1[0,1]=\{x\in C^1[0,1]\mid x(0)=x'(0)=0\},$$

则$C_0^1[0,1]$是$C^1[0,1]$的一个闭子空间，因而其本身也是一个巴拿赫空间.

对于每个$x\in C_0^1[0,1]$，令

$$(Tx)(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right]+q(t)x(t)$$

则T是$C_0^1[0,1]$到$C[0,1]$的一个闭线性算子. 由于上述微分方程

对所有的 $y\in C[0,1]$ 都存在唯一解，所以 T^{-1} 存在，并且是定义在整个 $C[0,1]$ 上的闭线性算子. 由闭图象定理，T^{-1} 是有界线性算子. 因此，当微分方程的右端 y 有一个增量 Δy 时，解 x 的增量 Δx 满足 $\|\Delta x\|\leqslant\|T^{-1}\|\|\Delta y\|$，这就是说，微分方程的解关于右端项是连续依赖的.

定理 4.5.11 设 X 是巴拿赫空间，Y 是赋范线性空间，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathscr{L}(X,Y)$ 中的一列有界线性算子. 如果对每个 $x\in X$，都有

$$\sup_n\|T_n x\|<+\infty,$$

则

$$\sup_n\|T_n\|<+\infty.$$

这个定理称为**一致有界原理**(uniform boundedness principle)，也称为**共鸣定理**(resonance theorem).

例 4.5.12 傅里叶级数的发散问题：对于 $\mathbf{R}^1$ 中的任意一点 t_0，是否存在一个以 2π 为周期的连续函数 x，使得 x 的傅里叶级数在 t_0 发散？为了弄清这个问题，数学家们曾经付出了很大的努力. 但是，应用共鸣定理可以很容易地解决这个问题.

解 记 $C_{2\pi}$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的所有以 2π 为周期的连续函数构成的巴拿赫空间，其中的范数规定为

$$\|x\|=\max_{-\infty<t<\infty}|x(t)|,\quad\forall x\in C_{2\pi}.$$

x 的傅里叶级数为

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\,\mathrm{d}t,\quad k=0,1,2,\cdots$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\,\mathrm{d}t,\quad k=1,2,\cdots$$

下面用共鸣定理证明：对于任意一点 $t_0\in\mathbf{R}$，存在 $x\in C_{2\pi}$，使得 x 的傅里叶级数在 t_0 发散.

由于函数的周期性，不妨设 $t_0=0$. 对于任意的 $x\in C_{2\pi}$，令

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)x(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots\end{aligned}$$

则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C_{2\pi}$ 上的一列连续线性泛函，并且

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|\mathrm{d}t\to+\infty,\quad(n\to+\infty).$$

由共鸣定理知，至少存在一个 $x_0\in C_{2\pi}$，使得 $\sup\limits_{n}|f_n(x_0)|=+\infty$. 即

$$\sup_{n}\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=+\infty.$$

于是级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 0+b_k\sin 0)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 发散，即 x_0 的傅里叶级数在点 $t=0$ 发散.

4.6 共轭空间与共轭算子

4.6.1 弱收敛与弱*收敛

定义 4.6.1 设 X 是赋范线性空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的一列元素，$x_0\in X$，如果对每一个 $f\in X^*$，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

则称序列$\{x_n\}$**弱收敛**(weakly converge)于x_0. x_0称为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的**弱极限**,记为$w-\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$.

定理 4.6.2 弱收敛有下列性质:

(1) 弱收敛的极限是唯一的;

(2) 弱收敛列必有界;

(3) 如果序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛于x_0,则序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$必弱收敛于x_0. 但逆命题不成立.

例 4.6.3 在l^2中考虑一列元素$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,其中

$$x_1 = (1,0,0,\cdots), \quad x_2 = (0,1,0,\cdots), \cdots,$$

$$x_n = (0,\cdots 0,1,0,\cdots), \cdots.$$

则容易验证$w-\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \theta$. 这里$\theta$是$l^2$中的零元素. 但是由于$\|x_n\| = 1, (n = 1,2,\cdots)$. 显然$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$并不强收敛于$\theta$.

定义 4.6.4 设X为赋范线性空间,$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是X上的一列连续线性泛函,$f_0 \in X^*$. 如果对每个$x \in X$,都有

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f_0(x),$$

则称序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$**弱*收敛**(weak* converge)于f_0. 这时称f_0为$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$的弱*收敛的极限,并记为

$$w^* - \lim_{n\to+\infty} f_n = f_0.$$

定理 4.6.5 弱*收敛具有下列性质:

(1) 弱*收敛的极限是唯一的;

(2) 如果序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$按范数收敛于$f_0 \in X^*$,则$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$必弱*收敛于f_0,但逆命题不成立;

(3) 弱*收敛的序列必有界.

弱*收敛的序列不一定按范数收敛. 在例 4.6.3 中,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$可以看作空间l^2上的一列连续线性泛函. 显然$w^*-\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \theta$,但

是这列泛函并不是按范数收敛的序列.

定理 4.6.6 设 X 是巴拿赫空间，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X^*$，则存在 $f\in X^*$ 使得 $w^*-\lim\limits_{n\to+\infty} f_n=f$ 的充分必要条件是下列二命题同时成立：

(1) $\sup\limits_n \|f_n\|<+\infty$；

(2) 存在 X 中的一个稠集 E，使得对每个 $x\in E$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ 存在.

4.6.2 自反巴拿赫空间

定义 4.6.7 设 X 是赋范线性空间，则它的共轭空间 X^* 是一个巴拿赫空间. 因此，X^* 也有其共轭空间 $(X^*)^*$，用 X^{**} 表示这个空间，称 X^{**} 为 X 的**二次共轭空间**. 类似地，对任意正整数 n，X 可以有 n 次共轭空间 $X^{\overbrace{*\cdots*}^{n}}$.

定义 4.6.8 设 X 是赋范线性空间，$A\subset X$ 为一集合，如果在 A 中的每个无穷序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中都存在一个弱收敛列的子序列，则称集合 A 是**弱列紧的**(sequential weak compact).

又若 $B\subset X^*$ 为一集合，如果在 B 中的任一个无穷序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中都存在一个弱*收敛的子序列，则称 B 是**弱*列紧的**(sequential weak* compact).

定理 4.6.9 设 X 为任意的赋范线性空间，则它的共轭空间 X^* 中的任意有界集是弱*列紧的.

定义 4.6.10 设 X 是赋范线性空间，x 为 X 中的任意确定的元素. 对任意的 $f\in X^*$，令

$$F_x(f)=f(x),$$

则 F_x 是 X^* 上的一个连续线性泛函，若记

$$F_x=Jx,$$

则 J 是一个 X 到 X^{**} 的映射. 这个映射是线性的，并且对任意的

$x \in X$,有

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$$

因此,在映射 J 之下,X 的像 JX 是 X^{**} 中的一个子空间,并且 J 是 X 到 $JX \subseteq X^{**}$ 的一个等距同构映射. 在这个意义下,也可以认为 $JX = X$. 称 J 为**自然映射**(natural mapping).

一般情况下,有 $JX \subset X^{**}$. 如果 $JX = X^{**}$,则称 X 是**自反的**(reflexive)赋范线性空间. 由于 X^{**} 一定是巴拿赫空间,因此,自反的赋范线性空间一定是巴拿赫空间. 当 X 自反时,也可以认为 $X^{**} = X$(见图 4.2).

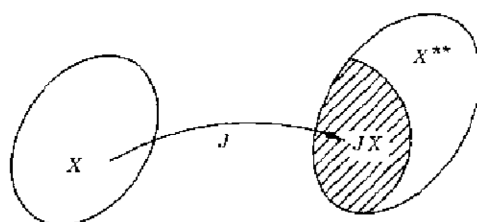


图 4.2

例 4.6.11 空间 $L^p(a,b)$,$(p>1)$;l^p,$(p>1)$都是自反的巴拿赫空间. $L(a,b)$,$L^\infty(a,b)$,l^1,l^∞ 及 $C[a,b]$都不是自反的.

任意希尔伯特空间 X 是自共轭的,即 $X^* = X$,因而是自反的.

定理 4.6.12 设 X 是赋范线性空间,如果它的共轭空间 X^* 是可分的,则 X 也是可分的.

例 4.6.13 设(a,b)为任意区间,则 $L(a,b)$是可分的巴拿赫空间. 但是它的共轭空间 $L^\infty(a,b)$不是可分的.

定理 4.6.14 若巴拿赫空间 X 是自反的,则 X 的任意闭子空间也是自反的.

定理 4.6.15 设 X 是一个巴拿赫空间，则下述两个命题互相等价：

(1) X 是自反的；

(2) X 中的任意有界集是弱列紧的.

4.6.3 共轭算子

定义 4.6.16 设 X,Y 是赋范线性空间，$T\in\mathscr{L}(X,Y)$. 对任意的 $g\in Y^*$，由式

$$f(x)=g(Tx),\qquad \forall x\in X.$$

唯一地确定了一个 $f\in X^*$，记成 $f=T^*g$. 则有 $T^*\in\mathscr{L}(Y^*,X^*)$，称 T^* 为 T 的**共轭算子**(conjugate operator).

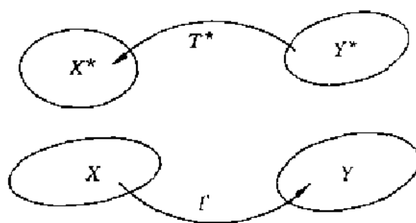


图 4.3

定理 4.6.17 共轭算子具有如下性质：

(1) 若 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$，则 $T^*\in\mathscr{L}(Y^*,X^*)$，并且 $\|T^*\|=\|T\|$.

(2) 若 $T_1,T_2\in\mathscr{L}(X,Y)$，$\alpha,\beta$ 为任意的数，则 $(\alpha T_1+\beta T_2)^*=\alpha T_1^*+\beta T_2^*$.

(3) 设 X,Y,Z 为赋范线性空间，$T_1\in\mathscr{L}(X,Y)$，$T_2\in\mathscr{L}(Y,Z)$，则 $(T_2T_1)^*=T_1^*T_2^*\in\mathscr{L}(Z^*,X^*)$.

(4) 设 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$ 且 $T^{-1}\in\mathscr{L}(Y,X)$，则 $(T^*)^{-1}$ 存在，并且 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

(5) $T^{**} \triangleq (T^*)^*$ 是 T 在 X^{**} 上的延拓，即 T^{**} 在 X 上的限制与 T 相等.

定义 4.6.18 设 X 是一个希尔伯特空间，于是 $X^* = X$. 又设 $T \in \mathscr{L}(X)$，对每个确定的 $y \in X$，由式

$$f(x) = (Tx, y), \forall\, x \in X.$$

确定一个 X 上的连续线性泛函 f. 由定理 4.4.16，存在唯一地 $u \in X$，使得

$$f(x) = (x, u), \qquad \forall\, x \in X.$$

其中 u 是由 y 唯一确定的，所以记

$$u = T'y.$$

T' 是 X 上的一个线性算子，称 T' 为 T 的**伴随算子**(adjoint operator).

定理 4.6.19 伴随算子有下列性质：

(1) 若 $T \in \mathscr{L}(X)$，则 $T' \in \mathscr{L}(X)$，且 $\|T'\| = \|T\|$.

(2) 若 $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(X)$，$\alpha, \beta$ 为任意的数，则 $(\alpha T_1 + \beta T_2)' = \bar{\alpha} T_1' + \bar{\beta} T_2'$.

(3) 若 $T \in \mathscr{L}(X)$，则 $T'' = T$.

(4) 若 $T \in \mathscr{L}(X)$，$T^{-1} \in \mathscr{L}(X)$，则 $(T')^{-1}$ 存在，并且 $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

当 X 为希尔伯特空间，$T \in \mathscr{L}(X)$ 时，T 的共轭算子与伴随算子只有形式上的差别而无实质的不同. 在今后，仍用 T^* 而不是 T' 表示 T 的伴随算子.

例 4.6.20 设 $X = L^2(a,b)$，$T \in \mathscr{L}(X)$ 由下式确定：

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \ \forall\, x \in X$$

其中 K 是矩形 $\triangle \triangleq \{(t,s) \mid a < t < b, a < s < b.\}$ 上的平方可积函数. 则 T 的共轭算子 $T^* \in \mathscr{L}(X)$ 由下式确定：

$$(T^* y)(t) = \int_a^b K(s,t)y(s)\mathrm{d}s, \quad \forall\, y \in X.$$

而 T 的伴随算子由下式确定：

$$(T^* y)(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}\, y(s)\mathrm{d}s \quad \forall\, y \in X.$$

4.6.4 无界算子的伴随算子

定义 4.6.21 设 X 为希尔伯特空间，T 是定义在 X 的某个稠线性子空间 $\mathscr{D}(T)$ 上而取值于 X 中的线性算子. 任取 $y \in X$，由式

$$f(x) = (Tx, y), \qquad \forall\, x \in \mathscr{D}(T).$$

确定了线性子空间 $\mathscr{D}(T)$ 的一个线性泛函. 但由于 T 不是有界算子，故这个线性泛函一般不是连续的.

如果对某个 $y \in X$，由上式确定的 f 是 $\mathscr{D}(T)$ 上的一个连续线性泛函，则由汉恩-巴拿赫定理，可以将 f 连续地延拓到整个 X 上去，成为 X 上的一个连续线性泛函. 由于 $\mathscr{D}(T)$ 是 X 的一个稠子集，所以延拓是唯一的. 于是由里斯表现定理，存在唯一的 $y^* \in X$，满足

$$(Tx, y) = (x, y^*), \quad \forall\, x \in \mathscr{D}(T).$$

其中 y^* 是由 y 唯一确定的，所以可表示为

$$y^* = T^* y.$$

称 T^* 为 T 的伴随算子. 一般情形，T^* 的定义域 $\mathscr{D}(T^*)$ 不是整个 X，而是 X 的一个线性子空间. 但 $\mathscr{D}(T^*)$ 非空，例如对 $\theta \in X$，就有 $\theta \in \mathscr{D}(T^*)$，并且 $T^* \theta = \theta$.

定义 4.6.22 设 T_1, T_2 分别是定义在希尔伯特空间 X 中的线性子空间 $\mathscr{D}(T_1), \mathscr{D}(T_2)$ 上而取值于 X 中的线性算子. 如果它们的定义域满足

$$\mathscr{D}(T_1) \subset \mathscr{D}(T_2),$$

并且对任意的 $x\in\mathscr{D}(T_1)$，有

$$T_2x=T_1x,$$

则称 $T_1\subset T_2$.

定理 4.6.23 伴随算子有下列性质：

(1) $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$，其中 α 为任意复数；

(2) $(T_1+T_2)^*\supseteq T_1^*+T_2^*$；

(3) $(T_1T_2)^*\supseteq T_2^*T_1^*$；

(4) 若 $T_1\subset T_2$，则 $T_1^*\supset T_2^*$.

定理 4.6.24 设 T 是定义在希尔伯特空间 X 的线性子空间 $\mathscr{D}(T)$ 上，取值于 X 的线性算子. 如果 T 的伴随算子 T^* 存在，则 T^* 必为闭算子.

定义 4.6.25 设 X 为希尔伯特空间，T_1,T_2 是定义在其定义域上而取值于 X 的线性算子. 如果 $T_1\subset T_2$，则称 T_2 是 T_1 的一个**扩张**(extension)；如果 T_2 还是闭算子，则称 T_2 是 T_1 的一个**闭扩张**(closed extension).

设 T_2 是 T 的一个闭扩张，如果对于 T 的每个闭扩张 T_1，都有 $T_2\subset T_1$，则称 T_2 是 T 的**最小闭扩张**(minimal closed extension).

定理 4.6.26 设 X 为希尔伯特空间，T 是定义在 $\mathscr{D}(T)\subseteq X$、取值于 X 的线性算子，$\mathscr{D}(T)$ 在 X 中稠密，于是 T^* 存在. 如果 $\mathscr{D}(T^*)$ 也是 X 中的稠集，则 T^* 的伴随算子 T^{**} 也存在，并且 T^{**} 是 T 的最小闭扩张. 如果 T 是闭算子，则 $T^{**}=T$.

例 4.6.27 设 $X=L^2(0,1)$，$(Tx)(t)=\mathrm{i}x'(t)$. 其中 $\mathscr{D}(T)=\{x\in L^2(0,1)\mid x$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续，$x'\in L^2(0,1)$，并满足 $x(0)=x(1)=0.\}$

求 T^* 与 T^{**}.

解 T 是对称算子. 这是因为，对任意的 $x,y\in\mathscr{D}(T)$，有

$$(Tx,y)-(x,Ty)=\mathrm{i}\int_0^1(x'\overline{y}+x\overline{y}')\mathrm{d}t=\mathrm{i}[x\overline{y}]\Big|_0^1=0$$

其次，T 为闭算子. 这是因为，对于 $\mathscr{D}(T)$ 中的任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果按 $L^2(0,1)$ 中的范数有 $x_n\to x\in L^2(0,1)$ 及 $Tx_n=\mathrm{i}x_n'\to y\in L^2(0,1)$，则在逐点收敛的意义下有

$$\mathrm{i}x_n(t)=\mathrm{i}\int_0^t x_n'(\tau)\mathrm{d}\tau\to\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad\forall\, t\in[0,1].$$

这又推出

$$\mathrm{i}x(t)=\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad\forall\, t\in[0,1].$$

即

$$y(t)=\mathrm{i}x'(t),\qquad\forall\, t\in[0,1].$$

或者

$$y=Tx.$$

由定理 4.5.7，T 是闭算子，再由定理 4.6.26，知 $T^{**}=T$.

现在求 T^*. 假设对某个 $y\in L^2(0,1)$，可以确定 $y^*\in L^2(0,1)$，满足

$$(\mathrm{i}x',y)=(x,y^*),\quad\forall\, x\in\mathscr{D}(T).$$

用 u 表示 y^* 的原函数，则由分部积分法并利用上式可以得到

$$\mathrm{i}\int_0^1 x'(\overline{y}+\mathrm{i}u)\mathrm{d}t=0,\qquad\forall\, x\in\mathscr{D}(T).$$

但是，此式成立的充分必要条件是函数 $v(t)\triangleq y(t)+\mathrm{i}u(t)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处等于某个常数. 这个条件的充分性是显然的，下面是必要性：

取 $x_0\in L^2(0,1)$，使得在 $(0,1)$ 上几乎处处成立着 $x_0'(t)=v(t)-c$，其中 $c=\int_0^1 v(\tau)\mathrm{d}\tau$. 则 $x_0\in\mathscr{D}(T)$，并且

$$\int_0^1|v(t)-c|^2\mathrm{d}t=\int_0^1[v(t)-c]\overline{v(t)}\mathrm{d}t-\overline{c}\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t+c\overline{c}$$

$$= \int_0^1 x_0'(t)\,\overline{v(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x_0'(t)[\bar{y} + \mathrm{i}u]\mathrm{d}t = 0$$

这说明

$$v(t) = c, \qquad \text{a.e.},$$

即

$$y(t) + \mathrm{i}u(t) = c, \quad t \in (0,1).$$

或者

$$y'(t) + \mathrm{i}y^*(t) = 0, \quad t \in (0,1).$$

这推出 $y' \in L^2(0,1)$，并且

$$y^*(t) = (T^*y)(t) = \mathrm{i}y'(t).$$

因此，$\mathscr{D}(T^*) = \{y \in L^2(0,1) \mid y$ 绝对连续，$y' \in L^2(0,1).\}$ 并且 $T^*y = \mathrm{i}y'$.

4.7 各类算子

4.7.1 酉算子与正规算子

定义 4.7.1 设 X,Y 为希尔伯特空间，$U \in \mathscr{L}(X,Y)$，如果 $U^*U = I_X$（X 上的恒同算子）并且 $UU^* = I_Y$（Y 上的恒同算子），则称 U 为**酉算子**(unitary operator).

定理 4.7.2 设 X,Y 为希尔伯特空间，$U \in \mathscr{L}(X,Y)$，则下列命题等价：

(1) U 是酉算子；

(2) U 的值域 $\mathscr{R}(U) = Y$，并且对任意的 $x_1, x_2 \in X$，有 $(Ux_1, Ux_2) = (x_1, x_2)$；

(3) U 是 X 到 Y 的等距映射，即对任意的 $x_1, x_2 \in X$，有 $\|Ux_1 - Ux_2\| = \|x_1 - x_2\|$.

定义 4.7.3 设 X 为希尔伯特空间，$T \in \mathscr{L}(X)$，如果 $TT^* = T^*T$，则称 T 为**正规算子**(normal operator).

定理 4.7.4 设 X 为希尔伯特空间，$T\in\mathscr{L}(X)$，则下列命题等价：

(1) T 为正规算子.

(2) 对任意的 $x\in X$，有 $\|T^*x\|=\|Tx\|$.

4.7.2 自伴算子

定义 4.7.5 设 X 为希尔伯特空间，T 是定义在 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 而取值于 X 的线性算子，T^* 存在. 如果 $T\subset T^*$，则称 T 为**对称算子**(symmetric operator)；如果 $T^*=T$，则称 T 为**自伴算子**(self-adjoint operator).

例 4.7.6 在例 4.6.20 中，如果积分核函数 K 满足

$$\overline{K(s,t)}=K(t,s),\qquad \text{a.e.},$$

则 T 是有界自伴算子.

定理 4.7.7 若 T 为自伴算子，则 $T^{**}=T$.

定理 4.7.8 若 T 自伴，则 T 为对称算子；若 T 为有界线性算子，则 T 自伴的充要条件为 T 是对称算子.

例 4.7.9 在例 4.6.27 中，如果将 T 的定义域扩充为 $\mathscr{D}(T)=\{x\in L^2(0,1)\mid x$ 绝对连续，$x'\in L^2(0,1)$，并且 $x(0)=x(1).\}$，则 T 是一个自伴算子.

解 与例 4.6.27 相同，可以证明对任意的 $y\in\mathscr{D}(T^*)$，有 $T^*y=\mathrm{i}y'$.

另外，若取 $x_0(t)\equiv 1$，则 $x_0\in\mathscr{D}(T)$. 于是应有

$$(\mathrm{i}x_0',y)=(x_0,y^*)=(x_0,T^*y).$$

由此得到

$$\int_0^1 (T^*y)(t)\mathrm{d}t=0,$$

即
$$\int_0^1 y'(t)\mathrm{d}t=0,$$

因此 $$y(0)=y(1).$$

这就是说，任意 $y\in\mathscr{D}(T^*)$必须满足

$y(0)=y(1)$. 于是 $\mathscr{D}(T^*)=\mathscr{D}(T)$，从而 $T^*=T$.

定理 4.7.10 T 为自伴算子的充分必要条件是：对所有的 $x\in\mathscr{D}(T)$，(Tx,x)为实数.

定理 4.7.11 设 X 为希尔伯特空间，$T\in\mathscr{L}(X)$为有界自伴算子，令

$$m=\inf_{\|x\|=1}(Tx,x),\qquad M=\sup_{\|x\|=1}(Tx,x).$$

则 $$\|T\|=\max\{|m|,|M|\}.$$

定义 4.7.12 设 T 为定义在希尔伯特空间 X 的某个线性子空间 $D(T)$ 上而取值于 X 的线性算子. 如果对每个 $x\in D(T)$，$(Tx,x)\geqslant 0$，则称 T 为**正算子**(positive operator)，记作 $T\geqslant\theta$.

定义 4.7.13 设 T_1,T_2 是希尔伯特空间 X 上的两个有界自伴算子，如果 $T_2-T_1\geqslant\theta$，则称 $T_1\leqslant T_2$.

定理 4.7.14 若 T 为正算子，则 T 为自伴算子.

定理 4.7.15 设 T 为有界正算子，则 T 有唯一的正平方根，即存在唯一的正算子 S，使得 $T=S^2$. 并且每个与 T 可交换的有界线性算子都与 S 可交换.

4.7.3 投影算子

定义 4.7.16 设 X 为希尔伯特空间，U 为 X 的一个闭子空间，$U^\perp$ 是 U 的直交补. 对任意的 $x\in X$，可做直交分解，即存在唯一的 $u\in U$，$v\in U^\perp$，使得 $x=u+v$. 令 $Px=u$，则 P 是 X 上的一个有界线性算子，称 P 为 X 到 U 的**直交投影算子**，简称**投影算子**或**投影**(projection).

定理 4.7.17 投影算子有下列性质：

(1) 若投影算子 P 的值域 $\mathscr{R}(T)\neq\{\theta\}$，则 $\|P\|=1$.

(2) 若 P 是 X 到它的闭子空间 U 的投影算子，则 $I-P$ 是 X

到 U 的投影算子.

(3) 投影算子是正算子,从而也是自伴算子.

(4) 设 P 是希尔伯特空间 X 上的有界线性算子,则 P 为投影算子的充分必要条件是下列二条件同时成立:

P 是自伴算子;

P 是幂等的,即 $P^2=P$.

定理 4.7.18 设 P_1,P_2 是希尔伯特空间 X 上的投影算子,$\mathscr{R}(P_1)$、$\mathscr{R}(P_2)$ 为 P_1、P_2 的值域.

(1) P_1+P_2 仍是投影算子的充分必要条件是下列二条件之一成立:

$$P_1P_2=\theta \quad (\text{或 } P_2P_1=\theta)$$

$$\mathscr{R}(T_1)\perp\mathscr{R}(T_2)$$

当 P_1+P_2 为投影算子时,有

$$\mathscr{R}(P_1+P_2)=\mathscr{R}(T_1)\oplus\mathscr{R}(T_2)$$

(2) P_1P_2 为投影算子的充分必要条件是 $P_1P_2=P_2P_1$. 当 P_1P_2 为投影算子时,它的值域是 $\mathscr{R}(P_1P_2)=\mathscr{R}(P_1)\cap\mathscr{R}(P_2)$.

定义 4.7.19 设 P_1,P_2 是希尔伯特空间上的投影算子,如果它们的值域满足 $\mathscr{R}(P_1)\subset\mathscr{R}(P_2)$,则称 P_1 是 P_2 的**部分投影算子**.

定理 4.7.20 P_1 为 P_2 的部分投影算子的充分必要条件是下列条件之一成立:

(1) $P_1P_2=P_2P_1=P_1$.

(2) 对任意的 $x\in X$, $\|P_1x\|\leqslant\|P_2x\|$

(3) $P_1\leqslant P_2$

定理 4.7.21 设 P_1、P_2 是希尔伯特空间上的投影算子. 则 P_2-P_1 仍为投影算子的充分必要条件是: P_1 为 P_2 的部分投影算子.

4.7.4 全连续线性算子

定义 4.7.22 设 X,Y 为巴拿赫空间，$T\in L(X,Y)$. 如果 T 将 X 中任意有界集映成 Y 中的列紧集，则称 T 为**紧线性算子**(compact linear operator)，或**全连续线性算子**(complete continuous linear operator).

定理 4.7.23 全连续线性算子具有下列性质：

(1) 全连续线性算子是有界的.

(2) 所有由巴拿赫空间 X 到巴拿赫空间 Y 的全连续线性算子构成的集合是 $\mathscr{L}(X,Y)$中的一个闭子空间. 即：

若 $T_1,T_2\in\mathscr{L}(X,Y)$为全连续线性算子，则对于任意的实(或复)数 α,β，算子 $\alpha T_1+\beta T_2$ 也是全连续线性算子.

若$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L(X,Y)$是一列全连续算子，$T\in\mathscr{L}(X,Y)$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$，则 T 也是全连续算子.

(3) 设 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$为全连续算子，则 T 将 X 中的任意弱收敛列映成 Y 中的强收敛列. 如果 X 是自反巴拿赫空间，则 $T\in\mathscr{L}(X,Y)$为全连续算子的充分必要条件是：T 将 X 中的任意弱收敛列映成 Y 中的强收敛列.

(4) 若 T 为全连续算子，则 T^* 也是全连续算子，反之亦然.

例 4.7.24 设 $K(t,s)$是$[a,b]\times[a,b]$上的连续函数，对任意的 $x\in C[a,b]$，令

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

则 T 是 $C[a,b]$到自身的全连续线性算子.

解 T 的线性是显然的. 现在证明 T 是紧算子，即需要证明：对于 $C[a,b]$中的任意有界集 A，它的像 TA 是 $C[a,b]$中的列紧集. 为此，只须证明 TA 中的函数是一致有界并等度连续.

由于 A 有界，所以存在正数 M，使得

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\leqslant M,\qquad \forall\, x\in A.$$

因此

$$|(Tx)(t)|=\left|\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant M\cdot\max_{a\leqslant t\leqslant b}\int_a^b|K(t,s)|\mathrm{d}s\qquad (a\leqslant t\leqslant b).$$

即 TA 中的连续函数是一致有界的.

另一方面,对任意的 $x\in A$ 及任意的 $t_1,t_2\in[a,b]$,有

$$|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)|=\left|\int_a^b[K(t_1,s)-K(t_2,s)]x(s)\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant M\int_a^b|K(t_1,s)-K(t_2,s)|\mathrm{d}s,$$

由于 K 在$[a,b]\times[a,b]$上一致连续,所以对任意正数 ε,存在正数 δ,只要 $|t_1-t_2|<\delta$,就有 $|K(t_1,s)-K(t_2,s)|<\varepsilon/M$,$(a\leqslant s\leqslant b)$,此时就有

$$|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)|\leqslant M\int_a^b|K(t_1,s)-K(t_2,s)|\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon.$$

因此 TA 中的函数是等度连续的.

4.7.5 弗雷德霍姆算子

定义 4.7.25 设 X,Y 为巴拿赫空间,$T\in\mathscr{L}(X,Y)$. 集合$\{x\in X\mid Tx=\theta.\}$是 X 中的一个闭子空间,称其为算子 T 的**核**(kernel),记作 $\ker T$.

另一方面,T 的值域 $\mathscr{R}(T)$的闭包$\overline{\mathscr{R}(T)}$是 Y 中的一个闭子空间,如果存在 Y 中的另一个闭子空间 Y_0,使得 $Y=Y_0\oplus\overline{\mathscr{R}(T)}$,则称 Y_0 是算子 T 的余核(cokernel),记作 $\operatorname{coker} T$. 如果 $\ker T$ 和 $\operatorname{coker} T$ 都是有穷维子空间,并且 $\mathscr{R}(T)$是闭的,则称 T 为有界的弗雷德霍姆(Fredholm)算子,并称 $\operatorname{ind}T\triangleq\dim(\ker T)-\dim(\operatorname{coker} T)$为 T 的**指数**(index).

定理 4.7.26 设 X 为巴拿赫空间，$T\in\mathscr{L}(X)$ 为全连续线性算子，则 $I-T$ 为弗雷德霍姆算子，并且 $\mathrm{ind}\ T=0$.

定理 4.7.27 设 X,Y,Z 为巴拿赫空间，$T_1\in\mathscr{L}(X,Y)$，$T_2\in\mathscr{L}(Y,Z)$ 为弗雷德霍姆算子，则 T_2T_1 也是弗雷德霍姆算子，并且

$$\mathrm{ind}(T_2T_1)=\mathrm{ind}T_1+\mathrm{ind}T_2.$$

4.7.6 希尔伯特-施密特算子

定义 4.7.28 设 X 为希尔伯特空间，$A\in L(X)$ 为一正算子. 在 X 中任取一个完备的标准直交系 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，令

$$\mathrm{tr}A\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}(e_n,Ae_n)$$

这是一个非负数，它与直交系 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的选取无关. 称 $\mathrm{tr}A$ 为算子 A 的**迹**(trace).

定义 4.7.29 设 X 为希尔伯特空间，$A\in L(X)$，如果 $\mathrm{tr}(A^*A)<+\infty$，则称 A 为希尔伯特-施密特(Hilbert-Schmidt)算子.

当 A 为希尔伯特-施密特算子时，称

$$\|A\|_{HS}\triangleq(\mathrm{tr}A^*A)^{\frac{1}{2}}$$

为 A 的**希尔伯特-施密特范数**.

定理 4.7.30 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为一开区域，$X=L^2(\Omega)$，$A\in L(X)$. 则 A 为希尔伯特-施密特算子的充分必要条件是存在 $\Omega\times\Omega$ 上的平方可积函数 K，使得对任意的 $f\in L^2(\Omega)$，有

$$(Af)(x)=\int_{\Omega}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

同时又有

$$\|A\|_{HS}^2=\int_{\Omega\times\Omega}|K(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定理 4.7.31 每个希尔伯特-施密特算子都是全连续线性算子. 反之，设 A 为希尔伯特空间 X 上的一个全连续线性算子，则 A

为希尔伯特-施密特算子的充分必要条件是它的本征值序列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<+\infty$.

4.7.7 拉克斯-米尔格拉姆定理

定义 4.7.32 设 X 是一个复线性空间，Φ 是定义在 $X\times X$ 上、取值于复数域 $\mathbf{C}$ 的一个映射. 如果 Φ 具有下列性质：

(1) 对任意的 $x_1,x_2,y\in X$ 及任意复数 α_1,α_2，有

$$\Phi(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y)=\alpha_1\Phi(x_1,y)+\alpha_2\Phi(x_2,y).$$

(2) 对任意的 $x,y_1,y_2\in X$ 及任意复数 α_1,α_2，有

$$\Phi(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=\overline{\alpha_1}\Phi(x,y_1)+\overline{\alpha_2}\Phi(x,y_2).$$

则称 Φ 是 $X\times X$ 上的一个**共轭双线性泛函**(conjugate bilinear function).

定理 4.7.33(拉克斯-米尔格拉姆(Lax-Milgram)定理) 设 X 是希尔伯特空间，Φ 是定义在 $X\times X$ 上的一个共轭双线性泛函，满足下列条件：

(1) 存在正数 M，使得对所有的 $x,y\in X$，都有

$$|\Phi(x,y)|\leqslant M\|x\|\|y\|;$$

(2) 存在正数 m，使得对任意 $x\in X$，有

$$\Phi(x,x)\geqslant m\|x\|^2,$$

则存在唯一的有界可逆的算子 $T\in\mathscr{L}(X)$，满足

$$\Phi(x,y)=(x,Ty),\quad \forall x,y\in X.$$

并且

$$\|T\|\leqslant M,\quad \|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{m}.$$

如果 Φ 还满足

(3) $\Phi(y,x)=\overline{\Phi(x,y)}$，$\forall x,y\in X$，则 T 是自伴算子.

4.8 线性算子的谱

4.8.1 谱的概念与基本性质

定义 4.8.1 设 X 是一个复巴拿赫空间，T 是定义在 X 的某个稠子集 $D(T)$ 上、取值于 X 的线性算子. 对任意的复数 λ，如果算子 $T_\lambda=\lambda I-T$ 的逆算子 $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在，并且 $(\lambda I-T)^{-1}\in\mathscr{L}(X)$，则称 λ 是算子 T 的一个**正则值**. T 的所有正则值的集合记为 $\rho(T)$. 称 $\rho(T)$ 为 T 的**预解集**(resolvent set). 当 $\lambda\in\rho(T)$ 时，称 $R(\lambda;T)\triangleq(\lambda I-T)^{-1}$ 为算子 T 在 λ 处的**预解式**(resolvent)，或**预解算子**(resolvent operator).

所有不属于 $\rho(T)$ 的复数构成的集合称为 T 的**谱**(spectrum)，记作 $\sigma(T)$. 谱又分以下三种情形：

(1) 所有使方程

$$\lambda x-Tx=\theta$$

有非零解的复数 λ 构成的集合称为 T 的**点谱**(point spectrum)，记作 $\sigma_p(T)$. 当 $\lambda\in\sigma_p(T)$ 时，也称 λ 是 T 的一个**本征值**(eigenvalue). 当 λ 是 T 的本征值时，T_λ 的逆算子 T_λ^{-1} 不存在. 对每个 $\lambda\in\sigma_p(T)$，方程 $\lambda x-Tx=\theta$ 的每个非零解称为算子 T 对应于本征值 λ 的**本征向量**(eigenvector)；对应于本征值 λ 的所有本征向量张成的线性子空间称为算子 T 对应于本征值 λ 的**本征空间**(eigenspace). 这个空间的维数称为 λ 的(几何)**重数**(multiplicity). λ 的代数重数，指算子 T_λ 的不变子空间的维数.

(2) T 的**连续谱**(continuous spectrum)是由满足下列条件的复数 λ 构成的集合：

(i) T_λ 的逆算子 T_λ^{-1} 存在，即方程

$$\lambda x-Tx=\theta$$

无非零解；

(ii) T_λ 的值域 $\mathscr{R}(T_\lambda)$ 在 X 中稠；

(iii) T_λ^{-1} 无界.

T 的连续谱记作 $\sigma_c(T)$.

(3) T 的**剩余谱**(residual spectrum)是由所有满足下列条件的复数 λ 组成的集合：

(i) T_λ^{-1} 存在；

(ii) $\mathscr{R}(T_\lambda)$ 在 X 中不稠.

T 的剩余谱记作 $\sigma_r(T)$.

例 4.8.2 设 $X=E^n$，T 是 X 上的一个线性变换，于是存在一个唯一的 $n\times n$ 阵 (t_{ij})，使得对于每个 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in E^n$，有

$$Tx=\begin{pmatrix} t_{11},\cdots,t_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_{n1},\cdots,t_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix}.$$

如果 λ_0 是矩阵 (t_{ij}) 的一个特征值，则方程

$$\lambda_0 x-Tx=\theta$$

在 E^n 中有非零解，因此 λ_0 是 T 的一个点谱. 除点谱外，T 没有其它的谱.

例 4.8.3 设 $X=L^2(0,1)$，$T\in\mathscr{L}(X)$ 由下式确定：

$$(Tx)(t)=tx(t),\qquad \forall\, x\in L^2(0,1).$$

则
$$\sigma(T)=\sigma_c(T)=[0,1].$$

解 当 $\lambda\bar{\in}[0,1]$ 时，若令

$$(S_\lambda x)(t)=\frac{x(t)}{\lambda-t},\quad \forall\, x\in X,$$

则可以直接验证，$S_\lambda\in\mathscr{L}(X)$，并且 $S_\lambda=T_\lambda^{-1}$，因此 $\lambda\in\rho(T)$.

当 $\lambda\in[0,1]$ 时，为了证明 $\lambda\in\sigma_c(T)$，我们只需指出三点：

(1) 方程

$$\lambda x-Tx=\theta$$

没有非零解. 事实上，如果 $\lambda x-Tx=\theta$，即 $(\lambda-t)x(t)$ 在 $(0,1)$ 上几

乎处处为零，则 $x(t)$ 在 $(0,1)$ 上几乎处处为零，即 $x=\theta$.

(2) $R(T_\lambda)$ 在 X 中稠. 事实上，不妨设 $\lambda\in(0,1)$. 这时，对任意的 $y\in X$ 及任意的正数 ε，由于积分的绝对连续性，存在正数 δ，使得

$$\left\{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta}|y(t)|^2\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}<\varepsilon.$$

令

$$y_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t\in(\lambda-\delta,\lambda+\delta),\\ y(t), & t\notin(\lambda-\delta,\lambda+\delta).\end{cases}$$

则若令 $x(t)=\dfrac{y_\varepsilon(t)}{\lambda-t}$，就有 $y_\varepsilon=(\lambda-T)x$，即 $y_\varepsilon\in R(T_\lambda)$，并且

$$\|y-y_\varepsilon\|<\varepsilon$$

这说明 $R(T_\lambda)$ 在 X 中稠.

(3) T_λ^{-1} 无界. 只须证明，存在 $\{x_n\}_{n\geq1}\subset X$，满足 $\|x_n\|=1$ $(n=1,2,\cdots)$，但是却有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_\lambda x_n\|=0$. 仍不妨设 $\lambda\in(0,1)$，令

$$x_n(t)=\begin{cases}\sqrt{n}, & t\in\left(\lambda-\dfrac{1}{2n},\lambda+\dfrac{1}{2n}\right), n=1,2,\cdots\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则当 n 充分大时，就有 $x_n\in X$，并且 $\|x_n\|=1$.

$$\|T_\lambda x_n\|=\left\{\int_0^1|(\lambda-t)x_n(t)|^2\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\int_{\lambda-\frac{1}{2n}}^{\lambda+\frac{1}{2n}}n|\lambda-t|^2\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2\sqrt{n}}\to0,\ (n\to\infty)$$

因此 T_λ^{-1} 是无界的.

定理 4.8.4 设 X 为一个复巴拿赫空间，则对任意的 $T\in\mathscr{B}(X)$，有 $\sigma(T)\neq\varnothing$.

定理 4.8.5 设 X 为复巴拿赫空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，则

(1) $\sigma(T)$是复平面上的有界闭集.

(2) 极限 $\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ 存在，并且

$$\sup\{|\lambda| \mid \lambda\in\sigma(T)\} = \lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|T\|.$$

称 $r_\sigma(T)\triangleq\sup\{|\lambda| \mid \lambda\in\sigma(T)\}$ 为 T 的**谱半径**(spectral radius).

定理 4.8.6 设 X 为巴拿赫空间，$T\in\mathscr{L}(X)$，则复数 λ 满足 $|\lambda|>r_\sigma(T)$ 时，预解式 R_λ 可以展成级数形式：

$$R_\lambda=(\lambda I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-(n+1)}T^n,$$

这个级数按算子范数收敛，并且

$$\|R_\lambda\|\leqslant(|\lambda|-r_\sigma(T))^{-1}.$$

定理 4.8.7 设 X 为复巴拿赫空间，$T\in\mathscr{L}(X)$. 又设 p 是任一多项式，则算子 $p(T)$ 的谱集为

$$\sigma(p(T))=\{p(\lambda) \mid \lambda\in\sigma(T)\}.$$

4.8.2 自伴算子的谱

定理 4.8.8 设 X 为复希尔伯特空间，T 是定义在 $D(T)\subset X$ 上，取值于 X 的自伴算子，则 T 的谱具有下列性质

(1) $\sigma(T)\subset\mathbf{R}$；

(2) $\sigma(T)\neq\varnothing$；

(3) 对应于不同本征值的本征元互相直交，即若 λ,μ 是 T 的两个不相等的本征值，e_1,e_2 分别是对应于 λ,μ 的本征元，则 $(e_1,e_2)=0$.

(4) 若 $T\in\mathscr{L}(X)$，则 $m=\inf_{\|x\|=1}(Tx,x)$ 与 $M=\sup_{\|x\|=1}(Tx,x)$ 都是 T 的谱值，并且

$$\sigma(T)\subset[m,M].$$

(5) T 的值域 $\mathscr{R}(T)$ 的闭包 $\overline{\mathscr{R}(T)}$ 与 T 的零空间 $N(T)$

$\in X; Tx=\theta\}$互为直交补，即

$$X = \mathscr{R}(T) \oplus N(T).$$

定理 4.8.9 若 T 为正算子，则 T 的谱除了具有定理 4.8.8 所列性质外，还有

$$\sigma(T) \subset [0, +\infty).$$

定理 4.8.10 设 T 是投影算子，则

$$\sigma(T) \subset \{0,1\}.$$

若 $R(T)=\{\theta\}$，则 $\sigma(T)=\sigma_p(T)=\{0\}$；若 $R(T)=X$，则 $\sigma(T)=\sigma_p(T)=\{1\}$；若 $R(T)$ 是 X 的真子空间，则 $\sigma(T)=\sigma_p(T)=\{0,1\}$.

定义 4.8.11 设 X 为希尔伯特空间，$\{E_\lambda\}(-\infty<\lambda<+\infty)$ 是 X 上的一族依赖于实数 λ 的投影算子，满足下列条件：

(1) 单调增加性，即当 $\lambda>\mu$ 时，$E_\lambda \geqslant E_\mu$.

(2) 在强收敛意义下的右连续性，即对任意的 $x\in X$ 及任意的 $\lambda_0\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0+0} E_\lambda x = E_{\lambda_0} x.$$

(3) 对任意的 $x\in X$，有

$$\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda x = \theta, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda x = x.$$

则称 $\{E_\lambda\}(-\infty<\lambda<+\infty)$ 为 X 上的一个**谱族**(spectral family)，或**单位分解**(partition of unity).

定理 4.8.12 设 T 是希尔伯特空间上的有界自伴算子，记 $m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Tx,x)$，$M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Tx,x)$，则由算子 T 唯一地确定了一个谱族 $\{E_\lambda\}(-\infty<\lambda<+\infty)$，满足 $E_\lambda=\theta$，$(\lambda<m)$ 及 $E_\lambda=I$，$(\lambda\geqslant M)$，并且 $T=\int_{m-0}^{M}\lambda \mathrm{d}E_\lambda$；

$$Tx=\int_{m-0}^{M}\lambda \mathrm{d}(E_\lambda x), \quad \forall x\in X;$$

$$(Tx,y)=\int_{m-0}^{M}\lambda \mathrm{d}(E_\lambda x,y),\qquad \forall x,y\in X.$$

其中，每一个积分是和式

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k(E_{\lambda_k}-E_{\lambda_{k-1}})\quad(\lambda_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant\lambda_k,\ k=1,2,\cdots,n)$$

当 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\lambda_k-\lambda_{k-1}|\to 0$ 时按算子范数收敛的极限. 第二式是和式

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k(E_{\lambda_k}x-E_{\lambda_{k-1}}x)$$

当 $\max|\lambda_k-\lambda_{k-1}|\to 0$ 时在强收敛意义下的极限. 而最后一式是通常意义下的黎曼-斯蒂尔切斯(Riemann Stieltjes)积分.

定理 4.8.13 设 X 是希尔伯特空间，T 是定义在 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 上取值于 X 的无界自伴算子，则存在一个由 T 唯一确定的谱族 $\{E_\lambda\}(-\infty<\lambda<+\infty)$，使得对每个 $x\in\mathscr{D}(T)$，有

$$Tx=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda \mathrm{d}(E_\lambda x),$$

当 $x\in\mathscr{D}(T)$ 时，有

$$\|Tx\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2\mathrm{d}\|E_\lambda x\|^2<+\infty.$$

定义 4.8.14 设 T 是希尔伯特空间 X 上的有界自伴算子，$m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Tx,x)$，$M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Tx,x)$. 又设 $\{E_\lambda\}(-\infty<\lambda<+\infty)$ 是 T 的谱族，则对 $[m,M]$ 上的任意连续函数，定义 T 的算子函数 $f(T)$ 为

$$f(T)=\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda,$$

它是和式

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(E_{\lambda_k}-E_{\lambda_{k-1}}),\ \lambda_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant\lambda_k,\ k=1,2,\cdots,n$$

当 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\lambda_k-\lambda_{k-1}|\to 0$ 时按算子范数收敛的极限.

定理 4.8.15 设 T 是希尔伯特空间 X 上的有界自伴算子，

$\{E_\lambda\}$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$是 T 的谱族. 又设

$$m = \inf_{\|x\|=1}(Tx,x),\quad M = \sup_{\|x\|=1}(Tx,x).$$

如果 f,g 都是$[m,M]$上的连续函数,则:

(1) $(\alpha f+\beta g)(T)=\alpha f(T)+\beta g(T)$, α,β 为实数

即

$$\int_{m-0}^{M}[\alpha f(\lambda)+\beta g(\lambda)]\mathrm{d}E_\lambda=\alpha\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda+\beta\int_{m-0}^{M}g(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda;$$

(2) $(f\cdot g)(T)=f(T)g(T)$,

即

$$\int_{m-0}^{M}f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda=\left(\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\right)\left(\int_{m-0}^{M}g(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\right);$$

(3) $[f(T)]^*=\overline{f}(T)$,

即

$$\left(\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\right)^*=\int_{m-0}^{M}\overline{f(\lambda)}\mathrm{d}E_\lambda;$$

(4) $\|f(T)\|\leqslant\max_{m\leqslant\lambda\leqslant M}|f(\lambda)|$;

(5) $\|f(T)x\|^2=\int_{m-0}^{M}|f(\lambda)|^2\mathrm{d}\|E_\lambda x\|^2$, $\forall x\in X$;

(6) $\sigma(f(T))=\{f(\lambda);\ \lambda\in\sigma(T).\}$

定理 4.8.16 设 T 是希尔伯特空间上的自伴算子, $\{E_\lambda\}$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$是 T 的谱族,则:

(1) $\lambda_0\in(-\infty,+\infty)$为 T 的本征值的充要条件——λ_0 是 E_λ 的一个不连续点. 这时,λ_0 的所有本征元构成的子空间等于投影算子 $E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}$的值域.

(2) $\lambda_0\in(-\infty,+\infty)$为 T 的连续谱的充要条件——λ_0 是 E_λ 的一个连续点,并且对任意的正数 ε, $E_{\lambda_0+\varepsilon}-E_{\lambda_0-\varepsilon}\neq 0$.

(3) $\lambda_0\in(-\infty,+\infty)$为 T 的正则值的充要条件——存在正数 ε,使得 E_λ 在$(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)$上取常值,此时有

$$R_\lambda = \int_{m-0}^{M} \frac{dE_\lambda}{\lambda_0 - \lambda}.$$

例 4.8.17 设 $X = L^2(0,1)$，$(Tx)(t) = tx(t)$，$\forall x \in L^2(0,1)$，则 T 为有界自伴算子，并且

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x) = 0, \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) = 1.$$

定义投影算子族如下：$\forall x \in L^2(0,1)$，

$$(E_\lambda x)(t) = 0, \qquad \lambda \leqslant 0,$$

$$(E_\lambda x)(t) = \begin{cases} x(t), & 0 < t \leqslant \lambda \\ 0, & t > \lambda \end{cases} \qquad 0 < \lambda \leqslant 1,$$

$$(E_\lambda x)(t) = x(t), \qquad \lambda > 1.$$

则 $\{E_\lambda\}(-\infty < \lambda < +\infty)$ 是 T 的谱族.

4.8.3 全连续算子的谱

定理 4.8.18 设 X 为巴拿赫空间，$T \in \mathscr{L}(X)$ 为全连续算子，则 T 的谱具有如下性质：

(1) 除 0 之外，对任意的复数 λ，或者 $\lambda \in \rho(T)$，或者 $\lambda \in \sigma_p(T)$.

(2) $\sigma(T)$ 是复平面上一个有限集或可列集，最多有一个极限点 $\lambda = 0$.

(3) $\sigma(T^*) = \sigma(T)$. 如果 $\lambda \neq 0$ 是 T 的一个本征值，则 λ 也是 T^* 的本征值，并且 λ 作为 T 和 T^* 的本征值的重数相同；

(4) T 的每个本征值是有限重的.

定理 4.8.19 设 X 为巴拿赫空间，$T \in \mathscr{L}(X)$ 为全连续算子，对任意非零复数 λ，考虑方程

(1) $\lambda x - Tx = y$, $\qquad y \in X$,

(2) $\lambda x - Tx = \theta$,

(3) $\lambda f - T^* f = g$, $\qquad g \in X^*$,

(4) $\lambda f - T^* f = \theta$

则

(i) 方程(1)有解的充分必要条件是：对于方程(4)的任意解 f，都有 $f(y)=0$.

(ii) 方程(3)有解的充分必要条件是：对于方程(2)的所有的解 x，都有 $g(x)=0$.

(iii) 方程(1)对所有的 $y\in X$ 都有唯一解的充分必要条件是：方程(2)只有零解.

(iv) 方程(3)对所有的 $g\in X^*$ 有唯一解的充分必要条件是：方程(4)只有零解.

(v) 方程(2)与方程(4)同时有非零解，并且线性无关解的个数相同.

定理 4.8.20 设 X 为希尔伯特空间，$T\in\mathscr{L}(X)$为自伴全连续算子，则

(1) $\sigma(T)$是区间$[-\|T\|,\|T\|]$中的一个可列集或有限集，至多有一个极限点 0；

(2) 对应于不同本征值的本征元互相直交. 如果将 T 的所有非零本征值按照绝对值递降顺序排列为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$并不妨设每个本征值是单重的(例如 k 重本征值在其中可出现 k 次)，又设它们对应的本征元序列为 $e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots$并设 $\|e_n\|=1,(n=1,2,\cdots)$，则$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是 X 中的一个标准直交系.

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$为完备系的充分必要条件是 0 不为 T 的本征值，即不存在 X 中的非零元 x，使 $Tx=\theta$.

(3) 对任意的 $x\in X$，有

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)e_n,$$

当 $\lambda\neq\lambda_n(n=1,2,\cdots)$，$\lambda\neq 0$ 时，方程

$$\lambda x-Tx=y$$

对任意的 $y\in X$ 都有唯一解，并且解可表为

$$x = \sum_{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_n}(y, e_n)e_n + x_0.$$

其中 x_0 是一个与所有 $e_n(n=1,2,\cdots)$ 都直交的元素. 当 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 完备时,解可表为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \lambda_n}(y, e_n)e_n.$$

例 4.8.21 设 $X=L^2(0,1)$, $\mathscr{D}(T)=\{x\in L^2(0,1): x$ 绝对连续, $x'\in L^2(0,1)$, 并且满足 $x(0)=x(1)=0\}$, $(Tx)(t)=\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$, 求 T 的谱.

解 T 是 $\mathscr{D}(T)$ 到 $L^2(0,1)$ 的一个无界线性算子, 为了求 T 的本征值, 考虑二阶微分方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} - \lambda x(t) = f(t), & f \in L^2(0,1) \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

相应的齐次方程有非零解的充分必要条件是 $\lambda=n^2\pi^2(n=1,2,\cdots)$, 相应的非零解是 $x_n(t)=\sin n\pi t$, $(n=1,2,\cdots)$. 因此, 微分算子的本征值是 $\pi^2, 2^2\pi^2, \cdots, n^2\pi^2, \cdots$, 所有本征值都是单重的.

当 $\lambda\neq n^2\pi^2(n=1,2,\cdots)$ 时, 由微分方程理论已知, 对任意连续函数 f, 上述微分方程的边值问题有解, 于是算子 $T-\lambda I$ 的值域在 $X=L^2(0,1)$ 中稠密, 因此任意复数 λ 不是 T 的剩余谱.

当 $\lambda\neq n^2\pi^2(n=1,2,\cdots)$ 时, 上述边值问题的格林函数 g 是矩形 $\Delta\triangleq\{(t,s)|0\leqslant t,s\leqslant 1\}$ 上的实值对称连续函数, 所以积分算子

$$(Ax)(t) \triangleq \int_0^1 g(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \quad \forall\, x \in L^2(0,1)$$

是 $L^2(0,1)$ 上的一个自伴全连续算子. 同时, 当 f 是连续函数时, 求解上述边值问题等价于求解积分方程

$$x(t) = \int_0^1 g(t,s)f(s)\mathrm{d}s,$$

因此，若限制在 $\mathscr{D}(T)$ 上，积分算子 A 与 $(T-\lambda I)^{-1}$ 是一致的，又由于 $R(T)$ 在 $L^2(0,1)$ 中稠，故由 A 有界可推出 $(T-\lambda I)$ 也有界，因此，这意味着当 $\lambda\neq n\pi(n=1,2,\cdots)$ 时，$\lambda\notin\sigma_c(T)$. 因而，对任意的 $\lambda\neq n^2\pi^2(n=1,2,\cdots)$，必有 $\lambda\in\rho(T)$.

4.9 算子半群

4.9.1 一致连续半群与强连续半群

定义 4.9.1 设 X 为巴拿赫空间，$T(t)(0\leqslant t<+\infty)$ 是 $\mathscr{B}(X)$ 中的一族算子. 如果满足

(1) $T(0)=I$

(2) $T(t)T(s)=T(t+s),\quad \forall\, t,s\in[0,+\infty)$

则称 $T(t)(t\geqslant 0)$ 为一单参数**算子半群**(semigroup of operator).

如果条件(1)对所有的 $t,s\in(-\infty,+\infty)$ 成立，则称 $T(t)(-\infty<t<+\infty)$ 为一**算子群**.

当算子值函数 $T(t)(t\geqslant 0)$ 为一致连续，即满足

$$\lim_{t\to t_0}\|T(t)-T(t_0)\|=0,\qquad \forall\, t_0\in[0,+\infty)$$

时，称 $T(t)(t\geqslant 0)$ 为**一致连续**(uniform continuous)半群.

$T(t)(t\geqslant 0)$ 为一致连续半群的充分必要条件是

$$\lim_{t\to 0}\|T(t)-I\|=0.$$

如果对每个 $x\in X$ 和每个 $t_0\in[0,+\infty)$，有

$$\lim_{t\to t_0}\|T(t)x-T(t_0)x\|=0,$$

则称 $T(t)(t\geqslant 0)$ 为**强连续**(strong continuous)半群. 强连续半群又称为 **C_0 类半群**.

$T(t)(t\geqslant 0)$ 为 C_0 类半群的充分必要条件是对每个 $x\in X$，有

$$\lim_{t\to 0}\|T(t)x-x\|=0.$$

一致连续的算子半群一定是 C_0 类半群.

定义 4.9.2 设 $T(t)(t\geqslant 0)$ 为算子半群. 考虑由 X 中的所有使极限 $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(T(h)x-x)$ 存在的元素 x 组成的集合 $\mathscr{D}$, 这是 X 中的一个线性子空间. 对每个 $x\in\mathscr{D}$, 令

$$Ax=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(T(h)x-x)$$

则 A 是定义在 $\mathscr{D}(A)=\mathscr{D}$ 上的一个线性算子, 称 A 为半群 $T(t)$ $(t\geqslant 0)$ 的**无穷小生成元**(infinitesimal generator).

定理 4.9.3 设 $T(t)(t\geqslant 0)$ 是一致连续半群, 则其无穷小生成元是一个有界线性算子.

反之, 设 $A\in\mathscr{L}(X)$, 若令

$$T(t)\triangleq e^{tA}\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!},\quad t\geqslant 0$$

则 $T(t)(t\geqslant 0)$ 是一个一致连续的算子半群.

定理 4.9.4 一致连续半群由它的无穷小生成元唯一确定. 即若两个一致连续半群 $T(t)$ 与 $S(t)(t\geqslant 0)$ 具有相同的无穷小生成元, 则必有 $T(t)=S(t)$, $(t\geqslant 0)$.

定理 4.9.5 设 $T(t)(t\geqslant 0)$ 是一个一致连续半群, 则存在唯一的有界线性算子 A, 使得

$$T(t)=e^{tA},\qquad t\geqslant 0.$$

其中 A 是 $T(t)$ 的无穷小生成元.

映射 $t\to T(t)$ 按算子范数拓扑是可微的, 并且有

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=AT(t)=T(t)A.$$

定理 4.9.6 设 $T(t)(t\geqslant 0)$ 为一 C_0 半群, 则

(1) 存在常数 M,ω, 使得

$$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t},\quad 0\leqslant t<+\infty.$$

(2) 对任意的 $x\in X$, 映射 $t\to T(t)x$ 连续可微, 对任意 $x\in\mathscr{D}(A)$, 有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x=AT(t)x=T(t)Ax$.

(3) $T(t)(t\geqslant 0)$的无穷小生成元 A 的定义域在 X 中稠，并且 A 是闭算子.

(4) 对任意的 $x\in\mathscr{D}(A)$，有 $T(t)x\in\mathscr{D}(A)(t\geqslant 0)$，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x=AT(t)x=T(t)Ax.$$

(5) 用 $\mathscr{D}(A^n)$ 表示算子 $A^n(n=1,2,\cdots)$ 的定义域，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{D}(A^n)$ 在 X 中稠.

(6) 半群 $T(t)(t\geqslant 0)$由其无穷小生成元唯一确定.

定理 4.9.7 设 A 是定义在巴拿赫空间 X 的某个子集上、取值于 X 的一个线性算子，则 A 为某个满足 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 的 C_0 半群 $T(t)$的无穷小生成元的充分必要条件是：

(1) A 的定义域 $\mathscr{D}(A)$在 X 中稠，并且 A 是闭算子；

(2) A 的预解集 $\rho(A)$包含$[\omega,+\infty)$，并且对任意的 $\lambda>\omega$ 及任意自然数 m，有

$$\|R_\lambda^m\|=\|(\lambda I-A)^{-m}\|\leqslant\frac{M}{(\lambda-\omega)^m}.$$

A 是某个满足 $\|T(t)\|\leqslant M$ 的 C_0 半群的无穷小生成元的充分必要条件为：

(3) $\mathscr{D}(A)$在 X 中稠，并且 A 为闭算子；

(4) $\rho(A)$包含$[0,+\infty)$，并且对任意正数 λ 及任意自然数 m，有

$$\|R_\lambda^m\|\leqslant\frac{M}{\lambda^m}.$$

定理 4.9.8 设 A 是某个 C_0 半群 $T(t)(t\geqslant 0)$的无穷小生成元，对每个 $\lambda>0$，称算子

$$A_\lambda\triangleq\lambda AR_\lambda=\lambda^2R_\lambda-\lambda I$$

为 A 的**吉田耕作(Yosida)逼近**(Yosida approximation).

对任意的 $x\in\mathscr{D}(A)$，有

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda x = Ax$$

对任意 $x\in X$ 及 $t\geqslant 0$，有

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x.$$

这个结论称为 C_0 半群的表示定理，它的证明见[5].

例 4.9.9 设 X 为定义在$(-\infty,\infty)$上的所有一致连续、有界的实值函数构成的巴拿赫空间. 任意 $f\in X$ 的范数是

$$\|f\| \triangleq \sup_{-\infty<s<\infty} |f(s)|$$

对任意的 $t\geqslant 0$，令

$$(T(t)f)(s) \triangleq f(s+t),$$

则 $T(t)\ (t\geqslant 0)$是一个 C_0 半群. 其无穷小生成元 A 的定义域为

$$\mathscr{D}(A) = \{f\in X \mid f'\in X\},$$

并且对任意的 $f\in\mathscr{D}(A)$，有$(Af)(s) = f'(s)$.

4.9.2 压缩半群与耗散算子

定义 4.9.10 设 $T(t)\ (t\geqslant 0)$为一C_0 算子半群，由定理 4.9.6，存在常数 M,ω，使得

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \qquad t\geqslant 0.$$

如果可以取 $\omega=0$，则称 $T(t)$为**一致有界**的(uniformly bounded).

如果可以取 $\omega=0$，并且 $M=1$，则称 $T(t)$为**压缩半群**(semigroup of contractions).

定理 4.9.11 设 A 是定义在某个巴拿赫空间 X 的某子集上而取值于 X 的一个线性算子，则 A 是某个压缩半群 $T(t)$的无穷小生成元的充分必要条件为：

(1) A 的定义域在 X 中稠；

(2) A 的正则集 $\rho(A)$包含实正半轴 $\mathbf{R}^+$，并且对任意的正数 λ，有

$$\|R_\lambda\| = \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

定义 4.9.12 设 X 为巴拿赫空间，X^* 为其对偶空间. 对任意 $x^* \in X^*$，x^* 在 $x \in X$ 上的作用记为 $\langle x, x^* \rangle$.

对任意的 $x \in X$，令

$$F(x) \triangleq \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

由汉恩-巴拿赫定理，$F(x)$ 非空.

设 A 是 X 上的一个线性算子，如果对每个 $x \in \mathscr{D}(A)$，总存在 $x^* \in F(x)$，使得 $\mathrm{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leqslant 0$，则称 A 是一个**耗散算子** (dissipative operator).

定理 4.9.13 线性算子 A 为耗散算子的充分必要条件是对所有的 $x \in \mathscr{D}(A)$ 和 $\lambda > 0$，有

$$\|(\lambda I - A)x\| \geqslant \lambda \|x\|.$$

定理 4.9.14（鲁默-菲利普斯(Lumer-Phillips)定理） 设 A 是巴拿赫空间，A 是 X 上的一个线性算子，其定义域 $\mathscr{D}(A)$ 在 X 中稠.

(1) 如果 A 是耗散算子，并且存在正数 λ_0，使得算子 $\lambda_0 I - A$ 的值域 $\mathscr{R}(\lambda_0 I - A)$ 等于 X，则 A 是某个压缩 C_0 半群的无穷小生成元.

(2) 如果 A 是某个压缩 C_0 半群的无穷小生成元，则 A 是耗散算子，并且对所有正数 λ，有 $\mathscr{R}(\lambda I - A) = X$. 另外，对每一个 $x \in \mathscr{D}(A)$ 和每一个 $x^* \in F(x)$，有 $\mathrm{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leqslant 0$.

定义 4.9.15 设 X 是一个巴拿赫空间，A 是定义在 $D(A) \subset X$，取值于 X 的线性算子. 对于任意给定的 $x \in X$，考虑方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = x. \end{cases}$$

如果定义在 $[0, +\infty)$ 而取值于 X 的函数 u 满足:

(1) $u(t)$在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$上可微.

(2) 对任意$t>0$，$u(t)\in\mathscr{D}(A)$.

并且$u(t)$满足上述方程，则称u是此方程的解. 求这个方程解的问题就称为**抽象柯西问题**.

定理 4.9.16 设X为巴拿赫空间，T是$\mathscr{D}(T)\subset X$到X的线性算子，其定义域$\mathscr{D}(T)$在X中稠，并且A的预解集$\rho(A)$非空，则下述二命题互相等价：

(1) 对任意的$x\in\mathscr{D}(A)$，抽象柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=Au(t),\\ u(0)=x.\end{cases}$$

有唯一解$u(t)$，这个解在$[0,+\infty)$上连续可微.

(2) A是某个C_0半群$T(t)$的无穷小生成元，而上述抽象柯西问题的解就是$u(t)=T(t)x$.

例 4.9.17 设$X=L^2(-\infty,+\infty)$，对任意$f\in X$，令

$$(Af)(t)\triangleq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t),$$

则A是$L^2(-\infty,+\infty)$上的一个闭线性算子，A的定义域$\mathscr{D}(A)$由$L^2(-\infty,+\infty)$中那些导数仍属于$L^2(-\infty,+\infty)$的函数构成的子空间. $\mathscr{D}(A)$是$L^2(-\infty,+\infty)$中的稠集.

算子A没有本征值，因为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+\lambda f=0$$

的解为$f(0)\mathrm{e}^{-\lambda t}$，而这个函数对任意复数$\lambda$都不属于$L^2(-\infty,+\infty)$.

对于任意的$g\in L^2(-\infty,+\infty)$，考虑非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+\lambda f=g,$$

对此方程两端作傅里叶变换，得到

$$\mathrm{i}\omega\hat{f}(\omega) + \lambda\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega),$$

即

$$\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)/(\lambda + \mathrm{i}\omega),$$

再取傅里叶逆变换，就由 g 得到 f. 因此，当 $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$ 时，$\lambda \in \rho(A)$. 这就是说，$[0, +\infty) \subseteq \rho(A)$.

另一方面，对任意 $g \in L^2(-\infty, +\infty)$ 及 $\lambda > 0$,

$$\| R_\lambda g \|^2 = \| (\lambda I - A)^{-1} g \|^2 = \| \widehat{(\lambda I - A)^{-1} g} \|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{\lambda^2 + \omega^2} \mathrm{d}\omega \leqslant \frac{\|\hat{g}\|^2}{\lambda^2} = \frac{\|g\|^2}{\lambda^2}.$$

于是对任意 $\lambda > 0$，有

$$\| R_\lambda \| \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

于是由定理 4.9.11，A 是某个 C_0 压缩半群 $T(t)$ 的无穷小生成元.

算子 A 的 Yosida 逼近为

$$A_\lambda = \lambda^2 R_\lambda - \lambda I, \qquad (\lambda > 0.)$$

由定理 4.9.8，对任意 $f \in \mathscr{D}(A)$，有

$$T(t)f = \lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{e}^{t(\lambda^2 R_\lambda - \lambda I)} f.$$

对上式右端作傅里叶变换，得

$$\mathrm{e}^{t(\lambda^2/(\lambda + \mathrm{i}\omega) - \lambda)} \hat{f}(\omega) = \mathrm{e}^{-t[\mathrm{i}\lambda\omega/(\lambda + \mathrm{i}\omega)]} \hat{f}(\omega),$$

当 $\lambda \to +\infty$ 时，它的极限是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\hat{f}(\omega)$，这恰好是 $h(s) \triangleq f(s-t)$ 的傅里叶变换，因此

$$T(t)f = h.$$

于是由此得到了算子 A 产生的 C_0 半群.

4.10 巴拿赫代数

4.10.1 概念与例

定义 4.10.1 设 A 是一个复线性空间，又对 A 中的任意两个元素 x,y，定义了它们的乘法 xy，这种乘法运算满足下列法则（其中 x,y,z 是 A 中的任意元素，λ 为任意复数）：

(1) $(xy)z=x(yz)$；

(2) $(x+y)z=xz+yz$

$x(y+z)=xy+xz$；

(3) $\lambda(xy)=(\lambda x)y=x(\lambda y)$.

则称 A 是一个**代数**(algebra).

如果对任意的 $x,y\in A$，还有

$$xy=yx,$$

则称 A 是**可交换的**(commutative).

如果 A 中的元素 e 对于任意的 $x\in A$ 都有

$$ex=xe=x,$$

则称 e 是 A 中的一个**单位元**(unit).

设 B 是 A 的一个子集，如果按照 A 中的线性运算和乘法也构成一个代数，则称 B 是 A 的一个**子代数**(subalgebra).

如果 A 是一个赋范线性空间，并且 A 中的乘法满足

(4) $\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|$，$\forall x,y\in A$

则称 A 是一个**赋范代数**(normed algebra).

如果 A 还是巴拿赫空间，则称 A 是一个**巴拿赫代数**(Banach algebra).

定义 4.10.2 设 A 是一个巴拿赫代数，e 是 A 中的单位元. $x,y\in A$. 如果 $xy=e$，则称 y 是 x 的**右逆**(right inverse)，x 是 y 的**左逆**(left inverse). 如果 y 既是 x 的左逆，又是 x 的右逆，则称 y

是 x 的逆(inverse). 如果 $x\in A$ 有逆,则称 x 为 X 中的**正则元**(regular element). x 的逆记作 x^{-1}.

例 4.10.3 设 Δ 是复平面上的闭单位圆盘,即

$$\Delta=\{z\in \mathbf{C},\ |z|\leqslant 1\}.$$

又用 $C(\Delta)$表示所有定义在 Δ 上的复值连续函数构成的巴拿赫空间,其中的范数是这样定义的:$\forall\ f\in C(\Delta)$,令

$$\|f\|\triangleq\max_{z\in\Delta}|f(z)|.$$

如果在$C(\Delta)$中规定乘法,任意两个函数相乘即为通常意义下两个函数的逐点相乘,则 $C(\Delta)$就成为一个巴拿赫代数. 函数 $f(z)=1(z\in\Delta)$就是 A 中的单位元.

若记 $A(\Delta)$为所有在 Δ 上解析的复值函数构成的子空间,则易见 $A(\Delta)$是 $C(\Delta)$的一个子代数.

又若令 $A\triangleq L(\mathbf{R})$为所有$(-\infty,\infty)$上勒贝格可积的复值函数构成的巴拿赫空间. 在 A 中定义乘法

$$fg\triangleq f*g,$$

即

$$(fg)(t)=(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)g(s)\mathrm{d}s$$

则 A 是一个巴拿赫代数.

例 4.10.4 设 X 为巴拿赫空间,$\mathscr{L}(X)$为 X 上的有界线性算子空间. 按通常的算子乘法,$\mathscr{L}(X)$构成一个非交换的巴拿赫代数.

记 $\mathscr{L}_c(X)$为 $\mathscr{L}(X)$中所有全连续算子构成的子空间,则 $\mathscr{L}_c(X)$是$\mathscr{L}(X)$的一个子代数.

定义 4.10.5 设 A 是一个巴拿赫代数(赋范代数). 所谓**对合运算**(involution),是 A 到自身的一个映射 $x\mapsto x^*$,它具有以下性质:

(1) $(x^*)^* = x$, $\forall x \in A$;

(2) $(x+y)^* = x^* + y^*$, $\forall x, y \in A$;

(3) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$, $\forall x \in A, \lambda \in \mathbf{C}$;

(4) $(xy)^* = y^* x^*$, $\forall x, y \in A$.

这时,称 x^* 为 x 的**伴随**(adjoint).

如果 $x \in A$ 满足 $x^* = x$,则称 x 是**自伴的**(self-adjoint);如果满足 $xx^* = x^* x$,则称 x 是**正规的**(normal).

设 A 是一个巴拿赫代数(赋范代数),如果在 A 上定义了上述的对合运算,则称 A 是一个 **B*-代数**(Banach* algebra),即赋范*代数(Normed* algebra).

设 A 是一个 **B*** 代数,如果对每个 $x \in A$,都有 $\|x^* x\| = \|x\|^2$,则称 A 为 **C* 代数**(C* algebra).

例 4.10.6 设 H 是一个希尔伯特空间,$\mathscr{L}(H)$ 为所有定义在 H 上并取值于 H 的有界线性算子构成的巴拿赫空间,则按照通常的算子运算(包括线性运算和乘法运算)及伴随算子 $T \to T^*$ 的运算,$\mathscr{L}(H)$ 构成一个 C* 代数.

定义 4.10.7 设 A, B 是两个 C*-代数,$\varphi: A \to B$ 是一个代数同态. 如果对任意的 $x \in A$,有

$$\varphi(a^*) = \varphi(a)^*,$$

则称 φ 是一个 * **同态**(*-homomorphism).

设 A 为一C*-代数,H 为希尔伯特空间. 由 A 到 $\mathscr{L}(H)$ 的一个 *-同态 $\varphi: A \to \mathscr{L}(H)$ 称为 A 在 H 上的一个 * **表示**(* representation). 如果这个 *-同态 φ 将 A 中的单位元(如果 A 中有单位元的话)映为 $\mathscr{L}(H)$ 中的单位元(即 H 上的恒同算子),则称这个 * 表示 φ 为**单位的**(unital).

定理 4.10.8 (盖尔范德-奈马克(Gelfand Naimark)定理) 设 A 是一个有单位元的 C*-代数,则必存在一个希尔伯特空间和一个单位 * 同态 $\varphi: A \to \mathscr{L}(H)$.

4.10.2 预解集与谱

定义 4.10.9 设 A 是一个巴拿赫代数，$e\in A$ 为单位元. 对任意的 $x\in A$，所有使得 $\lambda e-x$ 可逆的复数 λ 构成的集合称为 x 的**预解集**. x 的预解集记作 $\rho(x)$. 其余的复数构成的集合，即 $\rho(x)$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 中的余集称为 x 的**谱**. x 的谱集记作 $\sigma(x)$.

这里的 $\rho(x)$ 与 $\sigma(x)$ 与巴拿赫代数 A 有关，所以也可以将 $x\in A$ 的预解集 $\rho(x)$ 和谱 $\sigma(x)$ 写作 $\rho_A(x)$ 与 $\sigma_A(x)$.

定理 4.10.10 设 A 是一个巴拿赫代数，则对任意的 $x\in A$，$\sigma(x)\neq\varnothing$.

定理 4.10.11 设 A 是一个有单位元的(复)巴拿赫代数. 如果 A 中的每个非零元都是可逆的，则 A 必与复数构成的巴拿赫代数等距同构.

证明 任取 $x\in A$，由定理 4.10.10，$\sigma(x)$ 非空，所以存在 $\lambda\in\sigma(x)$，使 $\lambda e-x$ 不是可逆的，其中 e 是 A 中的单位元. 由本定理假设得到 $\lambda e-x=\theta$(零元)，于是 $x=\lambda e$. 于是 A 与复数 $\mathbf{C}$ 是一一对应的同构关系. 另外，又有 $\|x\|=\|\lambda e\|=|\lambda|\,\|e\|=|\lambda|$，因此这个对应还是等距的.

定义 4.10.12 设 A 是一个有单位元的巴拿赫代数，对于任意的 $x\in A$，x 的谱半径为

$$r_\sigma(x)=\sup\{|\lambda|\,\big|\,\lambda\in\sigma(x)\}$$

定理 4.10.13 设 A 为巴拿赫代数，对于任意 $x\in A$，有

$$r_\sigma(x)=\lim_{n\to+\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\|x\|.$$

定理 4.10.14 设 B 是巴拿赫代数 A 的一个闭子代数，并包含单位元 e，则对任意 $x\in B$，有

$$\sigma_A(x)\subset\sigma_B(x)$$

4.10.3 理想与同态

定义 4.10.15 设 A 是一个巴拿赫代数，J 是 A 的一个线性子空间. 如果对于任意的 $x\in A$ 和 $y\in J$，总有 $yx\in J(xy\in J)$，则称 J 是 A 的一个**左(右)理想**；如果 J 既是左理想，又是右理想，则称 J 是一个**理想**(ideal).

A 本身及仅由零元 θ 组成的子空间都是 A 的理想. 这两个理想称为**平凡的**(trivil)，其余称为非平凡理想或**真理想**.

设 J 是 A 的一个真理想，如果对于 A 的任意真理想 J_1，由 $J\subset J_1$ 可以推出 $J=J_1$，则称 J 是一个**极大**(maximal)理想.

定义 4.10.16 设 A、B 是两个巴拿赫代数，Φ 是 A 到 B 的一个线性映射. 如果对任意的 $x_1,x_2\in A$，有 $\Phi(x_1x_2)=\Phi(x_1)\Phi(x_2)$，则称 Φ 是 A 到 B 的一个**同态**(homomorphisms).

同态 Φ 的零空间，即 A 中的线性子空间 $\{x\in A\,|\,\Phi(x)=\theta\in B.\}$ 称为 Φ 的**核**(kernel).

任意同态 Φ 的核是 A 的一个理想.

例 4.10.17 设 X 是一个紧的豪斯多夫空间，E 是 X 中的一个闭子集，$C(X)$ 表示 X 上所有连续函数构成的巴拿赫空间. 按照通常的乘法，$C(X)$ 是一个巴拿赫代数. 而集合

$$\{f\in C(X)\,|\,f(t)=0,\forall\, t\in E.\}$$

是 $C(X)$ 中的一个理想. 当 E 由 X 中的一点构成时，这是一个极大理想.

例 4.10.18 设 X 是一个无穷维的(可分的)希尔伯特空间，$\mathscr{L}(X)$ 构成一个巴拿赫代数，而 $L_c(X)$ 是其中一个唯一的闭理想，这是一个极大理想.

定理 4.10.19 每个非平凡理想必含于某一个极大理想之中；每个极大理想都是闭集.

定义 4.10.20 设 J 是巴拿赫代数 A 中的一个理想，则商空

间 A/J 也是巴拿赫代数，称为 A 关于 J 的**商代数**(quotient algebra).

定理 4.10.21 设 A 是一个巴拿赫代数，Φ 是 A 到复数域 $\mathbf{C}$ 的一个同态，则只要 Φ 不恒等零，就有 $\|\Phi\|=1$. 这里 $\|\Phi\|$ 表示 Φ 作为 A 上的线性泛函所具有的范数.

定理 4.10.22 设 A 为任一巴拿赫代数，Φ 是 A 到 $\mathbf{C}$ 的一个不恒等于零的同态，则对任意的 $x\in A$，有 $\Phi(x)\in\sigma(x)$.

证明 巴拿赫代数中的任一非平凡理想 J 不可能包含可逆元. 这是因为，若 $x\in J$ 可逆，则 $x^{-1}x=e\in J$. 由此又推出对所有的 $y\in A$，有 $y=ye\in J$，于是 $J=A$.

由于同态 Φ 不恒为零，所以它的核是 A 中的一个非平凡理想. 对任意 $x\in A$，元素 $\Phi(x)e-x$ 属于这个理想，因此这个元是不可逆的，即 $\Phi(x)\in\sigma(x)$.

4.10.4 交换巴拿赫代数

定义 4.10.23 设 A 是一个有单位元的可交换的巴拿赫代数(以下同). 由 A 到复数构成的巴拿赫代数的同态映射 Φ 称为 A 上的**乘法**(multiplicative)**线性泛函**. 由于 Φ 是同态，故对任意的 $x,y\in A$，有 $\Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)$；如果 Φ 不恒等于零，则 $\Phi(e)=1$，其中 e 是 A 中的单位元.

A 上的所有乘法线性泛函构成的集合称为 A 的**承载空间**(carrier space)，记作 $\mathscr{M}$(或 $\mathscr{M}_A$). $\mathscr{M}$ 上的拓扑结构是逐点收敛的拓扑(即 $\Phi_n\to\Phi$ 意指对每个 $x\in A$ 都有 $\Phi_n(x)\to\Phi(x)$).

对任意 $x\in A$，由 x 可以产生 $\mathscr{M}$ 上的一个函数 $\hat{x}$，它的定义为：

$$\hat{x}(\Phi)=\Phi(x),\quad \forall\,\Phi\in\mathscr{M}.$$

注意到每个 $\Phi\in\mathscr{M}$ 是 A 上的连续线性泛函，并且其范数 $\|\Phi\|=1$(参阅定理 4.10.19，因此，$\mathscr{M}$ 是 A 的共轭空间 A^* 中单

位球的一个子集，并且 $\mathscr{M}$ 中的逐点收敛拓扑恰好是 A^* 中的 $*$ 弱拓扑. 由此可以推出每个 $\hat{x}$ 是 $\mathscr{M}$ 上的连续有界函数，即 $\hat{x}\in C(\mathscr{M})$.

称上面的 $\hat{x}$ 为 $x\in A$ 的**盖尔范德变换**(Gelfand transform)，并称由 x 到 $\hat{x}$ 的对应关系为 A 的**盖尔范德表示**(Gelfand representation).

这个映射是线性的，而且是乘法的. 因此是 A 到 $C(\mathscr{M})$ 的某个子代数的一个同态映射. 这个映射是连续的.

定理 4.10.24 若 A 是一个有单位元的交换巴拿赫代数，则 A 的承载空间 $\mathscr{M}$ 是一个紧的豪斯多夫空间.

定理 4.10.25 设 A 是一个有单位元的交换巴拿赫代数，J 是 A 中的一个理想，则 J 为极大理想的充分必要条件是：J 是 A 上某个乘法线性泛函的核.

定理 4.10.26 设 A 同定理 4.10.23. 则对每个 $x\in A$，有

$$\sigma(x)=\{\hat{x}(\Phi)\mid\Phi\in\mathscr{M}\},$$

$$r_\sigma(x)=\sup_{\Phi\in\mathscr{M}}|\hat{x}(\Phi)|.$$

定理 4.10.27 设 A 是一个有单位元的交换巴拿赫代数，$\mathscr{M}$ 是 A 的承载空间. 则 A 的盖尔范德表示 $x\mapsto\hat{x}$ 是 A 映满 $\hat{A}$ 的一个同态映射，其中 $\hat{A}$ 是 $C(\mathscr{M})$ 的某个子代数. 这个映射是连续的，作为线性算子，其范数为 1，并且

(1) $\hat{e}(\Phi)=1,\quad\forall\,\Phi\in\mathscr{M}$；

(2) $\hat{A}$ 中包含 $\mathscr{M}$ 上的常值函数，并能分离 $\mathscr{M}$ 中的点，即对任意的 $\Phi_1,\Phi_2\in\mathscr{M}$，若 $\Phi_1\neq\Phi_2$，则存在 $x\in A$，使 $\hat{x}(\Phi_1)\neq\hat{x}(\Phi_2)$；

(3) $\hat{x}$ 在 $C(\mathscr{M})$ 中为可逆元的充分必要条件是 x 在 A 中可逆；

(4) $\|\hat{x}\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$

(5) $\hat{A}$与 A 同构的充分必要条件是：A 中所有极大理想的交集仅含零元素.

参考文献

1. Taylor E. Introduction to functional analysis
2. 康托洛维奇. 赋范空间中的泛函分析
3. Pazy A, Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations
4. 吉田耕作. 泛函分析

5 广义函数

5.1 引言

在物理、力学及技术科学文献中，经常遇到狄拉克(Dirac)δ 函数 $\delta(x)$或者 $\delta(x-\xi)$. δ 函数是由物理学家狄拉克引进的. 按照他原先的定义，δ 函数具有下列性质

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0.\\ 0, & x\neq 0.\end{cases} \tag{5.1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1. \tag{5.2}$$

但是按照经典积分理论(包括勒贝格积分理论)，$\delta(x)$既然只在一点 $x=0$ 不为零，那么它在任意(有限或无限)区间上的积分应当为零，故上面的两条性质是互相冲突的. 因而，狄拉克函数并不是通常意义下的函数，更无法用经典的方法对它进行代数和分析的运算. 然而，狄拉克函数确实能反映许多为经典函数不能反映的客观现象. 例如，考察电容充电问题：如图 5.1 所示. 假设电池电动势及电容量都等于 1，并忽略导线电阻及电源电阻. 设当 $t\leqslant 0$ 时电容器 C 不带电，因而这时电容器两端电压为零. 如果在时刻

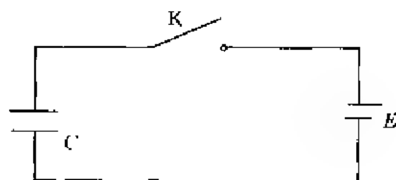


图 5.1

$t=0$ 突然合上开关 K，则电容器 C 两端电压 V 可以用赫维赛德函数

$$H(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

来描述. 同时，电路中的电流强度 I 满足

$$I(t)=\begin{cases}+\infty, & t=0,\\ 0, & t\neq 0.\end{cases}$$

另外，按照通常的电压、电流的关系，又有（$a>0$）

$$\int_{-a}^{a} I(t)\mathrm{d}t=V(a)=1.$$

其中 a 为任意正数，由于 $I(t)$ 的性质，又得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(t)\mathrm{d}t=1.$$

这就是说，电流强度 I 是一个 δ 函数. 显然不能用经典的函数概念和积分理论来理解(5.1)和(5.2)式. 为了使这些奇异的性质得到合理解释，并且在实际应用中能对其进行正确的运算，就必须拓广函数概念. 这就促成了广义函数理论的产生.

广义函数的概念产生以后，在物理、力学及技术科学中得到了广泛的应用. 特别是广义函数可以任意求微商，这就冲破了经典的函数在应用中所受到的一个巨大限制. 本世纪 30 年代，前苏联数学家索伯列夫(Sobolev)引入了广义微商的概念，并将这一概念应用于偏微分方程的研究，使偏微分方程理论获得重大进展. 在 40 年代，法国数学家施瓦兹(L. Schwartz)又为广义函数奠定了严格的理论基础. 近年来，由于广义函数理论的发展和广泛应用，使它已经成为应用数学、物理学及许多技术科学中的一个强有力的工具.

5.2 检验函数

定义 5.2.1 设 n 是一个正整数，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为非负整数. 称 $k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 为一个 n **重指标**(multiindex of order n)，并规定

$|k|=k_1+k_2+\cdots+k_n$，

$x^k=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$，　　（其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$），

$k!=k_1!k_2!\cdots k_n!$.

$$D^k=\frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}=\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}=D_1^{k_1}D_2^{k_2}\cdots D_n^{k_n}$$

其中　$D_j=\dfrac{\partial}{\partial x_j}$　　$(j=1,2,\cdots,n)$

另外称

$$L=\sum_{|k|\leqslant m}a_k(x)D^k$$

为(m 阶)**微分算子**(differential operator). 其中 $a_k(x)$($|k|\leqslant m$)为已知函数，k 为 n 重指标.

定义 5.2.2 设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的一个函数. 集合 $\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)\neq 0\}$ 的闭包称为 f 的**支集**(support)，并记作 $\text{supp}(f)$. 这是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭集.

定义 5.2.3 设 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ 为一开区域，φ 是定义在 Ω 上的一个实或复值函数，具有下列性质：

(1) φ 在 Ω 中每点都有任意阶的导数，

(2) $\text{supp}(\varphi)$ 是 Ω 中的紧集，

则称 φ 是 Ω 上的一个**检验函数**(test function).

Ω 上所有检验函数构成的集合称为**检验函数空间**，记作

$\mathscr{D}(\Omega)$.

定理 5.2.4 $\mathscr{D}(\Omega)$有下列性质：

(1) $\mathscr{D}(\Omega)$是线性空间.

(2) 若$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，则对任意的$n$重指标$k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，有$D^k\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$.

(3) 若ψ是Ω上的无穷次可微函数，则对任意$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，有$\varphi\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$.

如果$\Omega=\mathbf{R}^n$，则还有

(4) 设$\varphi(x_1,\cdots,x_m)$与$\psi(x_{m+1},\cdots,x_n)$分别是$\mathbf{R}^m$与$\mathbf{R}^{n-m}$上的检验函数，若令

$$(\varphi\psi)(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq\varphi(x_1,\cdots,x_m)\cdot\psi(x_{m+1},\cdots,x_n),$$

则$\varphi\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$.

例 5.2.5 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x\leqslant -1,\\ x+1, & -1<x<0,\\ 1-x, & -1\leqslant x<1,\\ 0, & 1\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

则$\mathrm{supp}\{f\}=[-1,1]$，这是$\mathbf{R}$中的一个紧集.但是$f$在点$x=0$不可微，因此$f\notin\mathscr{D}(\mathbf{R})$.

例 5.2.6 在$\mathbf{R}^n$上定义

$$\psi(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x\|^2}\right), & \|x\|<1,\\ 0, & \|x\|\geqslant 1,\end{cases}$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\|x\|=\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.则$\psi$在$\mathbf{R}^n$每点无穷次可微，并且$\mathrm{supp}\{\psi\}=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$为$\mathbf{R}^n$中的紧集.因此$\psi$是$\mathbf{R}^n$上的一个检验函数.

若令 $c = \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)\mathrm{d}x$，及 $\varphi(x) = \frac{1}{c}\psi(x)$，则 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，并且

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1.$$

当 $n=1$ 时，φ 的图形如图 5.2 所示.

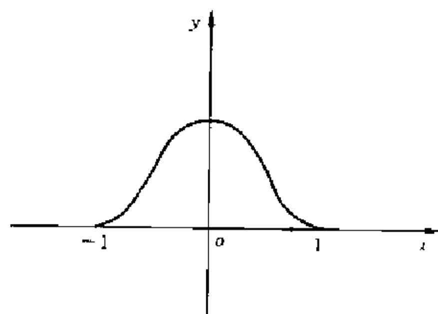


图 5.2

又如果对任意正数 ε，令

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{C_\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$= \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}\right), & \|x\| < \varepsilon, \\ 0, & \|x\| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

其中 $C_\varepsilon = \int_{\|x\|<\varepsilon} \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}\right)\mathrm{d}x$.

则有 $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，$\mathrm{supp}\{\varphi_\varepsilon\} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leqslant \varepsilon\}$，

并且

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1.$$

当 $n=1$ 时，φ_ε、$\varphi_{\varepsilon/2}$ 的图形如图 5.3 所示.

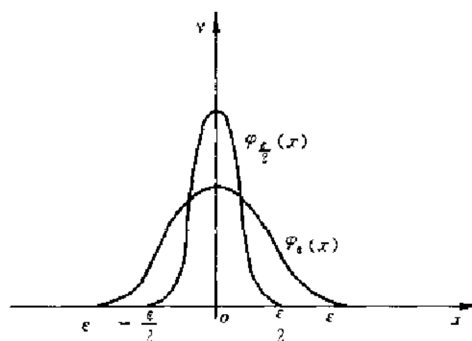


图 5.3

定义 5.2.7 设$\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$为$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$中的一个序列，$\varphi_0\in D(\mathbf{R}^n)$.如果

(1) 存在$\mathbf{R}^n$中的紧集F，使得

$$\operatorname{supp}\{\varphi_m\}\subset F,\qquad m=0,1,2,\cdots$$

(2) 对任意n重指标$k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，

$$\lim_{m\to\infty}D^k\varphi_m(x)=D^k\varphi_0(x)$$

在$\mathbf{R}^n$上一致成立.

则称序列$\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$(在$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$中)收敛于$\varphi_0$，记为$\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m=\varphi_0$.

如果$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$中的序列$\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$收敛于零，则称$\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$为**零序列**(null sequence).

例 5.2.8 设φ同例5.2.6，令

$$\varphi_m(x)=\frac{1}{m}\varphi(x),\qquad x\in\mathbf{R}^n,\ m=1,2,\cdots$$

则序列$\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$收敛于恒等于零的检验函数$\theta$.因此$\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$为零序列.

又若令

$$\varphi_m(x)=\frac{1}{m}\varphi\left(\frac{x}{m}\right),\qquad x\in\mathbf{R}^n,\quad m=1,2,\cdots$$

则序列$\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$不是零序列. 因为这时$\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$的支集$\text{supp}\,\varphi_m\}=\{x\in\mathbf{R}^n\mid |x|\leqslant m\}$不可能同时被包含在任一紧集之内.

5.3 广义函数

5.3.1 定义及例

定义 5.3.1 设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$为任意开区域, f是线性空间$\mathscr{D}(\Omega)$上的一个线性泛函. 对于任意的$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, f在φ上的取值记作$\langle f,\varphi\rangle$.

如果对于任意的序列$\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty\subset\mathscr{D}(\Omega)$及$\varphi_0\in\mathscr{D}(\Omega)$, 由$\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m=\varphi_0$可以推出

$$\lim_{m\to\infty}\langle f,\varphi_m\rangle=\langle f,\varphi_0\rangle$$

则称f是$\mathscr{D}(\Omega)$上的一个连续线性泛函.

$\mathscr{D}(\Omega)$上的连续线性泛函称为Ω上的**广义函数**(generalized function), 或Ω上的**分布**(distribution).

Ω上所有分布构成的集合记作$\mathscr{D}'(\Omega)$, 这是一个线性空间. 当$\Omega=\mathbf{R}^n$时, 记作$\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

定义 5.3.2 设$\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$为任一开区域, f是定义在Ω上的实或复值函数. 如果f在Ω内的每个有界区域上都是勒贝格可积的, 则称f是Ω上的一个**局部可积函数**(locally integrable function), 记作$f\in L_{\text{loc}}(\Omega)$.

设f是Ω上的一个局部可积函数. 如果对每个$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, 令

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

则f是$\mathscr{D}(\Omega)$上的一个连续线性泛函, 即每个Ω上的局部可积函数都可以按照上式确定一个Ω上的分布. 为简单计, 由局部可积

函数确定的分布仍记作 f，这时可写作

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\qquad\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$$

由局部可积函数所产生的分布称为**正则**(regular)分布，或**函数型**分布.

例 5.3.3 对于任意的 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，令

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0),$$

则

$$\delta\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n).$$

δ 不是正则分布，这可以用反证法证明. 若对于任意的自然数 m，令

$$\psi_m(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-\|x\|^2}\right), & \|x\|<\dfrac{1}{n},\\[2ex] 0, & \|x\|\geqslant\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

则由 δ 分布的定义得到

$$\langle\delta,\psi_m\rangle=\psi_m(0)=e^{-1},\qquad m=1,2,\cdots$$

如果存在 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数 f，使得对任意的 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，有

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

则应有

$$\begin{aligned}|\langle\delta,\psi_m\rangle|&=\left|\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_{\|x\|<\frac{1}{m}}f(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_{\|x\|<\frac{1}{m}}|f(x)|\mathrm{d}x\to0,\quad(m\to+\infty.)\end{aligned}$$

这与 $\langle\delta,\psi_m\rangle=1$ 冲突，因此 δ 不是正则分布.

但是为了形式上的方便，有时仍将 δ 分布在检验函数上的作用表为积分形式：

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

称 δ 为**狄拉克分布**.

狄拉克分布可以分解为平面波，即当 n 为奇数时，有

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \delta(x_1, \cdots, x_n) \\ &= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_S \delta^{(n-1)}(s_1x_1 + \cdots + s_nx_n)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

当 n 为偶数时，有

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \delta(x_1, \cdots, x_n) \\ &= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n-1)!}{(2\pi)^n} \int_S (s_1x_1 + \cdots + s_nx_n)^{-n}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面，$(s_1, \cdots, s_n) \in S$.

例 5.3.4 令

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

H 是 $\mathbf{R}$ 上的一个局部可积函数，称为**赫维赛德函数**. 由该函数产生 $\mathbf{R}$ 上一个正则分布：

$$\begin{aligned}\langle H, \varphi \rangle &= \int_{\mathbf{R}} H(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})\end{aligned}$$

称这个分布为**赫维赛德分布**.

例 5.3.5 $f(x) = \frac{1}{x}$ 不是 $\mathbf{R}$ 上的局部可积函数，因此不能直接由积分 $\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 产生一个 $\mathbf{R}$ 上的分布. 但是可以借助于黎曼广义积分的柯西主值概念来产生一个分布，即对任意的 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$，令

$$\langle f,\varphi\rangle \triangleq \lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\right).$$

这个极限是存在的. 事实上,由于 φ 可微,存在连续函数 ψ,使得

$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\psi(x)$$

又因 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$,存在正数 M,使得对所有满足 $|x|>M$ 的实数 x,恒有 $\varphi(x)=0$. 因此当 $\varepsilon\to 0_+$ 时,有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\\
=&\int_{-M}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{M}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\\
=&\int_{-M}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(0)}{x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{M}\frac{\varphi(0)}{x}\mathrm{d}x+\int_{-M}^{-\varepsilon}\psi(x)\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{M}\psi(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_{-M}^{-\varepsilon}\psi(x)\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{M}\psi(x)\mathrm{d}x\to\int_{-M}^{M}\psi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

于是由式

$$\langle f,\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0_+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x$$

确定了 $\mathbf{R}$ 上的一个分布,记作 $Pf\left(\frac{1}{x}\right)$,这是一个非正则分布.

5.3.2 分布的代数运算

定义 5.3.6 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为任意开区域. 如果 $f,g\in\mathscr{D}'(\Omega)$,则对任意的复数 $\alpha,\beta,\alpha f+\beta g$ 也是 Ω 上的一个分布,它由下式确定:

$$\langle\alpha f+\beta g,\varphi\rangle=\alpha\langle f,\varphi\rangle+\beta\langle g,\varphi\rangle,\quad\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$$

因此 $\mathscr{D}'(\Omega)$是一个线性空间,其中的零元正是在 $\mathscr{D}(\Omega)$上恒为零的分布.

定义 5.3.7 设 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$是由局部可积函数 f 产生的分布. 又设 A 是一个 $n\times n$ 非奇异矩阵,$a\in\mathbf{R}^n$,则由

$$x=Ly=Ay-a,\qquad\forall\,y\in\mathbf{R}^n.$$

确定了一个 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的可逆变换.

对于 $\mathbf{R}^n$ 上的任意局部可积函数 f，函数 $f(Ay+a)$ 仍是局部可积函数，由这个局部可积函数产生的分布记作 Lf，对任意的 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$，有

$$\begin{aligned}
\langle Lf,\varphi\rangle &= \int_{\mathbf{R}^n} f(Ay+a)\varphi(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(L^{-1}(y))\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(A^{-1}(x-a))\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

若记 $(L^{-1}\varphi)(x)=\varphi(A^{-1}(x-a))$，则上式意味着

$$\langle Lf,\varphi\rangle = \frac{1}{|\det A|}\langle f, L^{-1}\varphi\rangle,$$

其中 $\quad (L^{-1}\varphi)(x)=\varphi(L^{-1}x), \qquad \forall x\in\mathbf{R}^n.$

特别，当 A 为单位矩阵 I 并且 f 为局部可积函数时，有

$$\langle Lf,\varphi\rangle = \langle f, L^{-1}\varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi(x-a)\mathrm{d}x.$$

例 5.3.8 对于狄拉克分布 δ，设 $Lx=x-a$，则

$$\langle \delta_a,\varphi\rangle \triangleq \langle L\delta,\varphi\rangle = \langle \delta, L^{-1}\varphi\rangle = \varphi(a)$$

在纯粹的形式上，上式也可写作

$$\begin{aligned}
\langle \delta_a,\varphi\rangle = \langle \delta, L^{-1}\varphi\rangle &= \int_{\mathbf{R}^n}\delta(x)\varphi(x+a)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbf{R}}\delta(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(a), \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n).
\end{aligned}$$

例 5.3.9 设 c 为常数，$Lx=cx \quad (\forall x\in\mathbf{R}^n)$. 又设 f 为局部可积函数，则

$$\begin{aligned}
\langle Lf,\varphi\rangle &= \frac{1}{|c^n|}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\varphi\left(\frac{x}{c}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} f(cx)\varphi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

例 5.3.10 对于狄拉克分布 δ，设 $Lx=cx\,(x\in\mathbf{R}^n)$，则有

$$\langle L\delta,\varphi\rangle=\frac{1}{|c^n|}\left\langle\delta,\varphi\left(\frac{x}{c}\right)\right\rangle=\frac{1}{|c^n|}\varphi(0)$$
$$=\frac{1}{|c^n|}\langle\delta,\varphi\rangle$$

回到狄拉克函数的形式，则得

$$\int_{\mathbf{R}^n}\delta(cx)\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|c^n|}\int_{\mathbf{R}^n}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

或者

$$\delta(cx)=\frac{1}{|c^n|}\delta(x).$$

特别，取 $c=-1$，则有

$$\delta(-x)=\delta(x)$$

这就是说，狄拉克函数是一个偶函数.

定义 5.3.11 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为任开区域，$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，ψ 是 Ω 上的一个无穷次可微函数，则 ψf 也是 Ω 上的一个分布，它由式

$$\langle\psi f,\varphi\rangle=\langle f,\psi\varphi\rangle,\qquad\forall\,\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$$

确定.

特别，对任意常数 c 及任意分布 f，cf 仍是一个分布，对任意的 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，有

$$\langle cf,\varphi\rangle=c\langle f,\varphi\rangle$$

例 5.3.12 设 δ 为狄拉克分布，ψ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的无穷次可微函数，则对任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，有

$$\langle\psi\delta,\varphi\rangle=\langle\delta,\psi\varphi\rangle=\psi(0)\varphi(0)$$
$$=\psi(0)\delta(\varphi),$$

即

$$\psi\delta=\psi(0)\delta.$$

5.3.3 分布的支集

定义 5.3.13 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为开区域，$f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，$x\in\mathbf{R}^n$，$U(x)$

为 x 的一个邻域. 如果对所有 $\operatorname{supp}(\varphi)\subset U(x)$ 的 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，都有 $f(\varphi)=0$，则称 f 在 $U(x)$ 中为零. 如果对于 x 的任一邻域 $U(x)$，f 在 $U(x)$ 不为零，则称 x 是分布 f 的一个**本性点**(essential point). f 的所有本性点构成的集合称为 f 的**支集**，记作 $\operatorname{supp}(f)$，这是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭集.

在上述意义下，Ω 上的一个分布 f 在 Ω 上的不同点有不同的性态，因此有时为了方便也常把一个非函数型分布 f 写为函数的形式 $f(x)$. 于是任一分布 f 在检验函数 φ 上的作用也可以写为

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

如果分布 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 的支集与 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ 的支集不相交，则 $\langle f,\varphi\rangle=0$.

当 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 是一个连续函数产生的正则分布时，f 作为分布的支集与它作为函数的支集相同.

例 5.3.14 狄拉克分布 δ 的支集是 $x=0$ 一点；赫维赛德分布的支集是 $[0,+\infty)$.

定理 5.3.15 设 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$，ψ 为 Ω 上的无穷次可微函数，则

$$\operatorname{supp}(\psi f)=\operatorname{supp}(\psi)\cap\operatorname{supp}(f).$$

5.3.4 分布序列的收敛

定义 5.3.16 设 $\{f_m\}_{m=1}^\infty$，f 都是 Ω 上的分布. 如果对每个 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，都有

$$\lim_{m\to+\infty}\langle f_m,\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle,$$

则称分布序列 $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ **弱收敛于分布** f，或简称收敛于 f，并记作 $\lim\limits_{m\to+\infty}f_m=f$.

定理 5.3.17 设 $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ 与 f 都是 Ω 上的局部可积函数，如果在 Ω 上几乎处处有

$$\lim_{m\to+\infty}f_m(x)=f(x)$$

并且存在 Ω 上的局部可积函数 g，使得

$$|f_m(x)| \leqslant g(x), \quad m=1,2,\cdots$$

几乎处处成立，则广义函数序列 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 收敛于广义函数 f.

定义 5.3.18 设 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上一列局部可积函数，如果作为 $\mathbf{R}^n$ 上的分布序列收敛于狄拉克分布 δ，则称 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 为一个 **δ-序列**.

定理 5.3.19 设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个非负可积函数，满足

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

对任意正数 α，令

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^n} f\left(\frac{x}{\alpha}\right),$$

如果仍用 f_α 表示由这个局部可积函数产生的分布，则有

$$\lim_{\alpha\to 0} f_\alpha = \delta$$

例 5.3.20 在例 5.2.6 中的函数

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}\right), & \|x\| < \varepsilon, \\ 0, & \|x\| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

作为分布，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varphi_\varepsilon = \delta.$$

例 5.3.21 在 $\mathbf{R}$ 上定义一列函数

$$f_m(x) = \begin{cases} m, & \|x\| \leqslant \dfrac{1}{2m}, \\ 0, & \|x\| > \dfrac{1}{2m}. \end{cases} \quad m = 1,2,\cdots$$

则 f_m 是一个 δ 序列.

例 5.3.22 在 $\mathbf{R}$ 上定义

$$s_m(x) = \frac{\sin mx}{\pi x}, \quad m = 1,2,\cdots$$

则$\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$为 δ 序列. 当 $m=3,6$ 时, s_m 的图形如图 5.4 所示.

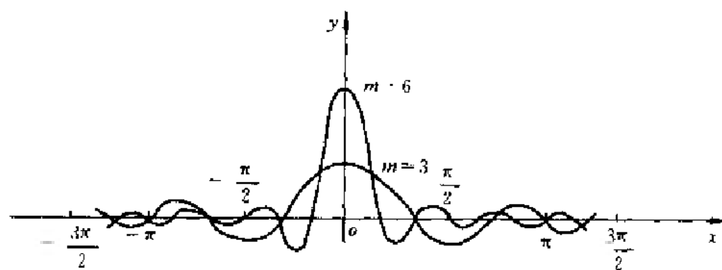


图 5.4

例 5.3.23 在 $\mathbf{R}$ 上定义

$$s_m(x)=\frac{1}{\pi}\frac{m}{1+m^2x^2},\qquad m=1,2,\cdots$$

则$\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$为 δ-序列. s_m 的图形如图 5.5.

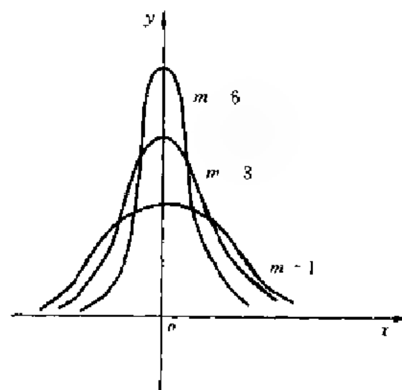


图 5.5

例 5.3.24 $\mathbf{R}^n$ 上的克希霍夫(Kirchhoff)函数

$$K_\lambda(x) = \lambda^n \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-\lambda^2 \|x\|^2}$$

当 $\lambda \to 0_+$ 时收敛于 $\delta(x)$（作为分布的收敛）.

$\mathbf{R}^n$ 上的开尔文(Kelvin)热源函数

$$u_t(x) = (4\pi\mu t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\mu t}}$$

当 $t \to 0_+$ 时收敛于狄拉克分布 δ.

定理 5.3.25 设 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 为一分布序列，如果对于每个检验函数 φ，数列 $\{\langle f_m, \varphi\rangle\}_{m=1}^{\infty}$ 收敛，则存在分布 f，使得 $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m = f$. 这称为分布空间的**弱完备性**(weak completeness).

5.4 分布导数

为了说明如何引入分布导数，考察一个在 $\mathbf{R}$ 上连续可微的函数 f. 由于 f 和 f' 都是局部可积的，所以分别确定了 $\mathbf{R}$ 上的两个分布，仍记作 f 和 f'. 对于任意的 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$ 也有 $\varphi' \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$. 注意到 φ 在某个区间 $[a,b]$ 之外恒为零，由分部积分法可以得到

$$\int_{\mathbf{R}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle$$

这说明，对于分布的微分运算可以被转嫁为对于检验函数的微分运算. 这个由正则分布得到的结果，启发人们用这种方式去对任意的分布定义导数. 由于检验函数是无穷次可微的，所以用这种方式引入微分运算使得分布可以任意求导而不受限制.

定义 5.4.1 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一开区域，$f \in \mathscr{D}'(\Omega)$，$k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 为一 n 重指标，f 的 k 阶**分布导数**(distributional derivative) $D^k f$ 是 Ω 上的一个分布，它由下式确定：

$$\langle D^k f, \varphi\rangle = (-1)^{|k|}\langle f, \varphi\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

特别,当 $n=1$ 时,对任意非负整数 k,有

$$\langle f^{(k)},\varphi\rangle=(-1)^k\langle f,\varphi^{(k)}\rangle,$$

$$\langle f',\varphi\rangle=-\langle f,\varphi'\rangle.$$

分布导数又称为**广义导数**(generalized derivative).

定理 5.4.2 设 f 是一个局部可积函数,其导数 $D^k f$ 存在并且仍为局部可积函数.则 f 作为分布,它的 k 阶广义导数恰好是由函数 f 的 k 阶导数所产生的分布.也就是说,对于正则分布,广义导数与经典导数是相同的.

定理 5.4.3 分布导数有下列性质:

(1) 所有分布都是任意次可微的.

(2) 设 f 为 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的任一分布,如果 $D_1f,D_2f,\cdots,D_nf$ 都是零分布,则 f 在 Ω 上为常数,即 f 是由某个常数产生的分布.

(3) 设 f 为一分布,k,l 为 n 重指标,则 $D^k(D^lf)=D^l(D^kf)$,即分布微分运算可以任意交换次序.特别,有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i},\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

(4) 设 f 为任一分布,ψ 为一无穷次可微函数,则

$$\frac{\partial(\psi f)}{\partial x_i}=\frac{\partial\psi}{\partial x_i}f+\psi\frac{\partial f}{\partial x_i},\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

在一般情形,则有

$$D^k(\psi f)=\sum_{m+l=k}\frac{|k|!}{|m|!|l|!}(D^m\psi)(D^lf).$$

其中 m,l,k 为 n 重指标.

例 5.4.4 设 H 为 $\mathbf{R}$ 上的赫维赛德分布,则对任意的 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$,有

$$\langle H',\varphi\rangle=-\langle H,\varphi'\rangle=-\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)=\delta(\varphi).$$

于是 H' 为狄拉克分布 δ.

例 5.4.5 设 $f(x)=|x|$ $(x\in\mathbf{R})$,这个局部可积函数产生

的分布为

$$\langle f,\varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{0} x\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$$

f 的分布导数由下式确定

$$\langle f',\varphi\rangle = -\langle f,\varphi'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sgn}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

定理 5.4.6 设 f 为任意分布 f，对任意 n 重指标 k，有 $\mathrm{supp}(D^k f) \subset \mathrm{supp}\{f\}$.

定理 5.4.7 若分布序列 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 收敛于分布 f，则对任意 n 重指标 k，序列 $\{D^k f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 收敛于 $D^k f$.

定义 5.4.8 正则分布称为**零阶分布**(distribution of order 0). 如果分布 f 能表为某个正则分布的 k 阶广义导数，但不能表为任意的 $l(|l|<|k|)$ 阶导数，则称 f 为 **k 阶分布**.

定义 5.4.9 设 $L = \sum_{|k|\leq m} a_k(x)D^k$ 为一微分算子，称微分算子 $L^* = \sum_{|k|\leq m} (-1)^{|k|} D^k(a_k(x)\varphi)$ 为 L 的**形式伴随算子**(formal adjoint operator). 对任意的检验函数 φ 及分布 f，有

$$\langle Lf,\varphi\rangle = \langle f,L^*\varphi\rangle$$

当 $L^* = L$ 时，称 L 是**自伴**的微分算子.

例 5.4.10 令 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$，则 ∇^2 为自共轭微分算子.

定义 5.4.11 设 L 为一微分算子，如果分布 f 满足方程

$$Lf = \delta,$$

则称 f 是 L 的一个**基本解**(fundamental solution).

定义 5.4.12 设 $f,g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$，如果 f 是 g 的分布导数，则称 g 为 f 的**原函数**(permitive function).

定理 5.4.13 若分布 g 是分布 f 的一个原函数，则对任意常数 c，分布 $g+c$ 也是 f 的一个原函数.

5.5 一些重要的分布

例 5.5.1 分布 $x_+^\lambda, x_-^\lambda, |x|^\lambda$ 与 $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$.

对任意复数 λ,令

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

当 $\mathrm{Re}\lambda > -1$ 时,这是一个局部可积函数,因此 x_+^λ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个正则分布,并且

$$\langle x_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x) \mathrm{d}x, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$$

当 $\mathrm{Re}\lambda \leqslant -1$ 时,这个积分发散.所以不能用它产生分布 x_+^λ.但是可以用解析开拓的方法对 $\mathrm{Re}\lambda \leqslant -1$ 的情形定义分布 x_+^λ.大意如下:

对任意 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$,当 $\mathrm{Re}\lambda > -1$ 时,

$$f_\varphi(\lambda) = \langle x_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x) \mathrm{d}x$$

是 λ 的解析函数.因为它有导数

$$f_\varphi'(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^\lambda \ln x \varphi(x) \mathrm{d}x.$$

将 $f_\varphi(\lambda)$ 改写为

$$f_\varphi(\lambda) = \int_0^1 x^\lambda [\varphi(x) - \varphi(0)] \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x) \mathrm{d}x + \frac{\varphi(0)}{\lambda + 1}$$

此式右端第一项对 $\mathrm{Re}\lambda > -2$,第三项对于 $\lambda \neq -1$,第二项对任意的 λ 有意义.于是 λ 的函数 $f_\varphi(\lambda)$ 就被解析开拓到区域:$\mathrm{Re}\lambda > -2, \lambda \neq -1$ 中去.

继续这个过程,$f_\varphi(\lambda)$ 可以被解析开拓到区域 $\mathrm{Re}\lambda > -m-1$,$\lambda \neq -1, -2, \cdots, -m$ 中去,并有表达式

$$f_\varphi(\lambda) = \int_0^1 x^\lambda \Big[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \cdots - \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$\cdots\varphi^{(k-1)}(0)\Big]\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{m}\frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}.$$

这样，$f_\varphi(\lambda)$就被解析开拓到除了 $\lambda=-1,-2,\cdots,-m,\cdots$以外的整个复平面上去了.

如果任意确定复数 $\lambda\neq-1,-2,\cdots,-m,\cdots$而使 φ 在 $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ 中变动，则 $f_\varphi(\lambda)$就是 $\mathscr{D}(\mathbf{R})$上的一个连续线性泛函. 这样得到的分布就记作 x_+^λ. 有时也称这样得到的分布 x_+^λ 为**伪函数**(pseudo function).

当 λ 满足 $-m-1<\mathrm{Re}\lambda<-m$ 时，分布 x_+^λ 可以简化为

$$\langle x_+^\lambda,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}x^\lambda\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)$$
$$-\cdots-\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(0)\Big]\mathrm{d}x.$$

分布 x_-^λ是由函数

$$x_-^\lambda=\begin{cases}|x|^\lambda, & x<0,\\ 0, & x\geqslant 0\end{cases}$$

按照与上相同的程序产生的分布. 当 $\mathrm{Re}\lambda>-1$ 时，它由式

$$\langle x_-^\lambda,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{0}|x|^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x,\qquad\forall\,\varphi\in D(\mathbf{R})$$

确定. 在区域 $-m-1<\mathrm{Re}\lambda<-m$ 内，则有

$$\langle x_-^\lambda,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}x^\lambda\Big[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)$$
$$-\cdots-\frac{(-1)^{m-1}x^{m-1}}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(0)\Big]\mathrm{d}x.$$

分布 $|x|^\lambda$ 与 $|x|^\lambda\mathrm{sgn}x$ 分别定义为

$$|x|^\lambda=x_+^\lambda+x_-^\lambda,$$
$$|x|^\lambda\mathrm{sgn}x=x_+^\lambda-x_-^\lambda.$$

在区域 $-2m-1<\mathrm{Re}\lambda<-2m+1$ 内，有

$$\langle|x|^\lambda,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}x^\lambda\{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\Big[\varphi(0)+\frac{x^2}{2}\varphi''(0)$$

$$+\cdots+\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\Big]\Big\}\mathrm{d}x.$$

特别，令 $\lambda=-2m$，就有

$$(x^{-2m},\varphi)=(|x|^{-2m},\varphi)$$
$$=\int_0^{+\infty}x^{-2m}\Big\{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\Big[\varphi(0)$$
$$+\frac{x^2}{2}\varphi''(0)+\cdots+\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}\varphi^{(2m-2)}(0)\Big]\Big\}\mathrm{d}x.$$

在区域 $-2m-2<\mathrm{Re}\lambda<-2m$ 内，有

$$(|x|^{\lambda}\mathrm{sgn}x,\varphi)=\int_0^{+\infty}x^{\lambda}\Big\{\varphi(x)-\varphi(-x)-2\Big[x\varphi'(0)$$
$$+\frac{x^3}{3!}\varphi'''(0)+\cdots+\frac{x^{2m}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\Big]\Big\}\mathrm{d}x.$$

特别，令 $\lambda=-2m-1$，就有

$$(x^{-2m-1},\varphi)=(|x|^{-2m-1}\mathrm{sgn}x,\varphi)$$
$$=\int_0^{+\infty}x^{-2m-1}\Big\{\varphi(x)+\varphi(-x)$$
$$-2\Big[x\varphi'(0)+\frac{x^3}{3!}\varphi'''(0)+\cdots$$
$$+\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}\varphi^{(2m-1)}(0)\Big]\Big\}\mathrm{d}x.$$

以上几个分布与狄拉克分布的关系为：

$$\frac{x_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\Big|_{\lambda=-m}=\delta^{(m-1)}(x),$$

$$\frac{x_-^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\Big|_{\lambda=-m}=(-1)^{m-1}\delta^{(m-1)}(x),$$

$$\frac{|x|^{\lambda}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-2m-1}=(-1)^{m}\frac{m!}{(2m)!}\delta^{(2m)}(x),$$

$$\frac{|x|^{\lambda}\operatorname{sgn}x}{\Gamma\left(\frac{\lambda+2}{2}\right)}\Bigg|_{\lambda=-2m}=(-1)^{m}\frac{(m-1)!}{(2m-1)!}\delta^{(2m-1)}(x).$$

以上几个分布的广义导数是:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x_{+}^{\lambda})=\lambda x_{+}^{\lambda-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x_{-}^{\lambda})=-\lambda x_{-}^{\lambda-1}\qquad \lambda\neq-1,\ -2,\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|^{\lambda})=\lambda|x|^{\lambda-1}\operatorname{sgn}x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|^{\lambda}\operatorname{sgn}x)=\lambda|x|^{\lambda-1}.$$

例 5.5.2 分布 $(x+\mathrm{i}0)^{\lambda}$ 与 $(x-\mathrm{i}0)^{\lambda}$.

分布 $(x+\mathrm{i}0)^{\lambda}$ 与 $(x-\mathrm{i}0)^{\lambda}$ 的定义分别为

$$(x+\mathrm{i}0)^{\lambda}=x_{+}^{\lambda}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}x_{-}^{\lambda}$$

$$(x-\mathrm{i}0)^{\lambda}=x_{+}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}x_{-}^{\lambda}$$

它们是变量 λ 的整函数,并且满足

$$(x+\mathrm{i}0)^{-m}=x^{-m}-\frac{\mathrm{i}\pi(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(x),$$

$$(x-\mathrm{i}0)^{-m}=x^{-m}+\frac{\mathrm{i}\pi(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x+\mathrm{i}0)^{\lambda}]=\lambda(x+\mathrm{i}0)^{\lambda-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x-\mathrm{i}0)^{\lambda}]=\lambda(x-\mathrm{i}0)^{\lambda-1}.$$

例 5.5.3 分布 $x_{+}^{\lambda}\ln^{m}x_{+}$ 与 $x_{-}^{\lambda}\ln^{m}x_{-}$.

$$x_{+}^{\lambda}\ln^{m}x_{+}=\frac{\partial^{m}}{\partial\lambda^{m}}(x_{+}^{\lambda})$$

$$x_{-}^{\lambda}\ln^{m}x_{-}=\frac{\partial^{m}}{\partial\lambda^{m}}(x_{-}^{\lambda})$$

它们在任意 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbf{R})$ 上的作用分别为

$$\langle x_+^\lambda \ln^m x_+,\varphi\rangle=\int_0^1 x^\lambda\ln^m x\Big[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)$$

$$-\cdots-\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(0)\Big]\mathrm{d}x$$

$$+\int_1^{\infty}x^\lambda\ln^m x\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^m m!\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)^{m+1}},$$

$$\mathrm{Re}\lambda>-m-1,\ \lambda\neq-1,-2,\cdots$$

当 $-m-1<\mathrm{Re}\lambda<-m$ 时,则有

$$\langle x_+^\lambda \ln^m x_+,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}x^\lambda\ln^m x\Big[\varphi(x)-\varphi(0)$$

$$-\cdots-\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(0)\Big]\mathrm{d}x$$

以及

$$\langle x_-^\lambda \ln^m x_-,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}x^\lambda\ln^m x\Big[\varphi(-x)-\varphi(0)+x\varphi'(0)$$

$$-\cdots-\frac{(-1)^{m-1}x^{m-1}}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(0)\Big]\mathrm{d}x.$$

例 5.5.4 分布$(ax^2+bx+c)_+^\lambda$.

考虑函数

$$(ax^2+bx+c)_+^\lambda=\begin{cases}(ax^2+bx+c)^\lambda, & 当\ ax^2+bx+c>0,\\ 0, & 当\ ax^2+bx+c\leqslant 0.\end{cases}$$

如果复数λ使得$(ax^2+bx+c)_+^\lambda$为局部可积函数,则由式

$$\langle(ax^2+bx+c)_+^\lambda,\varphi(x)\rangle$$

$$=\int_{ax^2+bx+c>0}(ax^2+bx+c)^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x$$

确定了一个$\mathbf{R}$上的分布$(ax^2+bx+c)_+^\lambda$.

对于其它的复数λ,可以利用解析开拓的方法来定义这个分布.

通过对变量 x 进行线性变换可以把函数$(ax^2+bx+c)_+^\lambda$变为下列四种形式之一：

$$(1-x^2)_+^\lambda,\quad (1+x^2)_+^\lambda,\quad (x^2-1)_+^\lambda,\quad x_+^{2\lambda}.$$

其中分布 $x_+^{2\lambda}$已在例 5.5.1 中出现.

分布$(1-x^2)_+^\lambda$和$(1+x^2)_+^\lambda$当 $\mathrm{Re}\lambda>-1$ 及 $\mathrm{Re}\lambda<-\frac{1}{2}$ 时分别由积分确定：

$$((1-x^2)_+^\lambda,\varphi)=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

$$((1+x^2)_+^\lambda,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}(1+x^2)^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

对于其它的复数，可以利用解析开拓定义分布$(1+x^2)_+^\lambda$和$(1-x^2)_+^\lambda$.

分布$(x^2-1)_+^\lambda$则可由式

$$((x^2-1)_+^\lambda,\varphi)=\int_{-\infty}^{-1}(1-x^2)^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}(1-x^2)^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x$$

确定.

例 5.5.5 分布 r^λ.

令 $r=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$，则当 $\mathrm{Re}\lambda>-n$ 时，由式

$$(r^\lambda,\varphi)=\int_{\mathbf{R}^n}r^\lambda\varphi(x)\mathrm{d}x$$

定义了正则分布 r^λ，同样利用解析开拓的方法对其它的复数 λ 定义 r^λ($\lambda\neq-(n+1),-(n+2),\cdots$).

分布 r^λ 可以分解为平面波，即

$$\frac{2r^\lambda}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}=\frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}\int_S|s_1x_1+\cdots+s_nx_n|^\lambda\mathrm{d}S.$$

其中 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面，$(s_1,\cdots,s_n)\in S$.

r^{λ} 与分布 δ 的关系是

$$\frac{2}{S_n \Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)} r^{\lambda} \bigg|_{\lambda=-n} = \delta(x).$$

其中 S_n 为 S 的面积.

由此又可以得到 δ 的平面波分解式:

$$\delta(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_S \delta^{(n-1)}(s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n) \mathrm{d}S,$$

$$n = 1, 3, \cdots, (2m-1), \cdots$$

$$\delta(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} (n-1)!}{(2\pi)^n} \int_S (s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n) \mathrm{d}S,$$

$$n = 2, 4, \cdots, (2m), \cdots$$

另外, 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 有

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(x)$$

在 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 3)$ 中有

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = -(n-2)\Omega_n \delta(x).$$

在 $\mathbf{R}^2$ 中则有

$$\Delta\left(\ln \frac{1}{r}\right) = -2\pi\delta(x)$$

其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ 为拉普拉斯算子.

例 5.5.6 集中作用在光滑曲面上的分布 $\delta(S)$.

设 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 是无穷次可微函数, S 是由 $p(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 确定的 $n-1$ 维曲面. 在 S 的每个点都有 $\nabla p = \left\{\frac{\partial p}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial p}{\partial x_n}\right\} \neq 0$.

设 ω 是满足方程 $\mathrm{d}p \cdot \omega = \mathrm{d}V$ (这里 $\mathrm{d}V$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的体积元)的 $n-1$ 阶微分形式, 则 ω 在曲面 S 上是由 p 唯一确定的. 对于每个 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, 令

$$\langle\delta(p),\varphi\rangle=\int_{p=0}\varphi(x)\omega$$

则由此式确定 $\mathbf{R}^n$ 上的一个分布 $\delta(p)$，或 $\delta(S)$.

特别，当 S 为坐标平面 $x_1=0$ 时，$\omega=\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，并且对每个 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 有

$$\begin{aligned}\langle\delta(p),\varphi\rangle&=\langle\delta(x_1),\varphi\rangle\\&=\int_{x_1=0}\varphi(0,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\end{aligned}$$

若令

$$H(p)=\begin{cases}1, & \text{当 } p(x_1,\cdots,x_n)>0,\\0, & \text{当 } p(x_1,\cdots,x_n)\leqslant 0,\end{cases}$$

则由式

$$\langle H(p),\varphi\rangle=\int_{p>0}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

确定了 $\mathbf{R}^n$ 上的一个分布 $H(p)$. 并且有

$$\frac{\partial H(p)}{\partial x_i}=\frac{\partial p}{\partial x_i}\delta(p),\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$\nabla H(p)=\delta(p)\nabla p$$

例 5.5.7 单层分布.

设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个逐片光滑的 $(n-1)$ 维曲面，σ 是定义在 S 上的局部可积函数，令

$$f(x)=\int_S\sigma(\xi)\delta(x-\xi)\mathrm{d}S$$

称 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 为展布在 S 上的**单层分布**(single layer distribution). 对任意的检验函数 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，有

$$\begin{aligned}\langle f,\varphi\rangle&=\left\langle\int_S\sigma(\xi)\delta(x-\xi)\mathrm{d}S,\varphi\right\rangle\\&=\int_S\varphi(\xi)\sigma(\xi)\mathrm{d}S\end{aligned}$$

利用例 5.5.6 中的分布 $\delta(S)$，又可将展布在 S 上的单层分布

写为$\sigma(x)\delta(S)$. 这是因为

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_S \varphi(\xi)\sigma(\xi)\mathrm{d}S = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\sigma(x)\delta(S)\mathrm{d}S$$

例 5.5.8 双层分布.

设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个逐片光滑的$(n-1)$维曲面,τ 是 S 上的一个局部可积函数. 如果把 τ 看作是展布在 S 上的电荷密度,则在曲面上每一点 ξ 处的曲面元素 $\mathrm{d}S_\xi$ 所产生的双极场的体密度为

$$-\tau(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}[\delta(x-\xi)]\mathrm{d}S_\xi$$

整个曲面 S 产生的体密度为

$$-\int_S \tau(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}[\delta(x-\xi)]\mathrm{d}S_\xi$$

这是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个分布,称为展布在 S 上的**双层分布**(double layer distribution).

如果利用例 5.5.6 中的分布 $\delta(S)$,则可将双层分布写作 $-\frac{\partial}{\partial n}(\tau\delta(S))$. 这是因为,对于任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$,有

$$\begin{aligned}
&\left\langle -\int_S \tau(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\delta(x-\xi)\mathrm{d}S_\xi,\varphi\right\rangle \\
&= \int_S \tau(\xi)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n}\mathrm{d}S_\xi = \int_{\mathbf{R}^n} \tau(\xi)\delta(S)\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial n}\mathrm{d}S_\xi \\
&= \left\langle \tau(x)\delta(S),\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right\rangle = \left\langle -\frac{\partial}{\partial n}(\tau\delta),\varphi\right\rangle.
\end{aligned}$$

5.6 分布的直积与卷积

5.6.1 分布的直积

定义 5.6.1 分别以 $x=(x_1,\cdots,x_m)$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 表示 $\mathbf{R}^m$ 与 $\mathbf{R}^n$ 中的点;$f=f(x)$ 与 $g=g(y)$ 表示 $\mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{R}^n$ 上的分布;$\varphi=\varphi(x)$ 与 $\psi=\psi(y)$ 表示 $\mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{R}^n$ 上的检验函数,$\Phi=\Phi(x,y)$ 表示

$\mathbf{R}^{m+n}$上的检验函数.

对任意的 $\Phi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^{m+n})$及 $g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$,令

$$\varphi(x)=\langle g(y),\Phi(x,y)\rangle$$

则 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^m)$. 于是对任意的 $f(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$,$\langle f(x),\varphi(x)\rangle$有意义.

对任意的 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$与 $g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$,它们直积 $f\otimes g$ 是 $\mathbf{R}^{m+n}$上的一个分布,由下式确定:

$$\langle f\otimes g,\Phi\rangle=\langle f,\langle g,\Phi\rangle\rangle,\qquad \forall\ \Phi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^{m+n}).$$

定理 5.6.2 分布的直积具有下列性质:

(1) 可交换性:即对任意的 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$与 $g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$,有 $f\otimes g=g\otimes f$.

(2) 连续性:即若 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$的序列$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$中弱收敛于 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$,则对于任意的 $g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$,序列$\{f_kg\}_{k=1}^{\infty}$弱收敛于 $fg\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{m+n})$.

(3) 结合律:对任意的 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$及任意的 $g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$,$h\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^k)$,有

$$f\otimes[g\otimes h]=[f\otimes g]\otimes h.$$

(4) $\operatorname{supp}\{f\otimes g\}=\operatorname{supp}\{f\}\times\operatorname{supp}\{g\}$.

(5) 对任意的 $k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$,$l=(l_1,l_2,\cdots,l_n)$,有

$$D_x^k[f(x)\otimes g(y)]=[D^kf(x)]\otimes g(y),$$

$$D_x^kD_y^l[f(x)\otimes g(y)]=[D^kf(x)]\otimes[D^lg(y)],$$

其中 D_x,D_y 分别表示对变量 x,y 求微商.

(6) 对任意的 $a\in\mathbf{R}^n$,有

$$(f\otimes g)(x+a,y)=f(x+a)\otimes g(y).$$

例 5.6.3 $\delta(x)\otimes\delta(y)=\delta(x,y)$.

这是因为,对任意的 $\Phi(x,y)\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^{m+n})$,

$$\langle\delta(x)\otimes\delta(y),\Phi\rangle=\langle\delta(x),\langle\delta(y),\Phi(x+y)\rangle\rangle$$

$$=\langle\delta(x),\Phi(x,\theta)\rangle=\Phi(\theta,\theta)$$

$=\langle\delta(x,y),\Phi\rangle.$

定理 5.6.4 若用 $\mathscr{S}_m,\mathscr{S}_n$ 与 $\mathscr{S}_{m+n}$ 分别表示 $\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^{m+n}$ 上的速降函数空间，则对任意的 $f\in\mathscr{S}'_m,g\in\mathscr{S}'_n$，它们的直积 $f\otimes g\in\mathscr{S}'_{m+n}$，并且这个直积具有定理 5.6.2 中所列举的性质.

5.6.2 分布的卷积

定义 5.6.5 若 f,g 都是 $\mathbf{R}^n$ 上的勒贝格函数，则它们的**卷积**(convolution)

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbf{R}^n}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

也是 $\mathbf{R}^n$ 上的可积函数. 由 $f*g$ 产生的分布由下式确定：对任意 $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$，

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}(f*g)(z)\varphi(z)\mathrm{d}z$$
$$=\langle f(x)\otimes g(y),\varphi(x+y)\rangle$$

由此自然设想用同样的方式定义任意两个分布 f,g 的卷积. 但这里尚有一个问题，即函数 $\varphi(x+y)$ 作为 $\mathbf{R}^{n+n}$ 上的函数，其支集不是有界的. 它的支集是 $\mathbf{R}^{n+n}$ 中的一个无限带形，即存在常数 A,B 使得

$$\mathrm{supp}\{\varphi(x+y)\}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^{n+n}\mid A\leqslant x+y\leqslant B\}.$$

这就可能使得分布 $f\otimes g$ 在 $\varphi(x+y)$ 上的作用失去意义. 为了克服这个困难，必须对分布 f 和 g 作某些限制. 例如，当 $\mathrm{supp}\{f\otimes g\}$ 与 $\mathrm{supp}\{\varphi(x+y)\}$ 的交集为有界集时，就可以保证 $\langle f\otimes g,\varphi(x+y)\rangle$ 有意义. 而在下列两种情形，可以实现这一要求.

(1) 分布 f 与 g 的支集至少有一个是有界的.

(2) f 与 g 的支集同时在同一侧有界，例如在一维情形，存在常数 A，使得

$$\mathrm{supp}\{f\}\subset\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant A\},\ \mathrm{supp}\{g\}\subset\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant A.\}.$$

定理 5.6.6 分布的卷积(如果存在)具有下列性质:

(1) 交换律:即

$$f * g = g * f;$$

(2) 结合律:即

$$(f * g) * h = f * (g * h);$$

(3) 对任意的 $k=(k_1,\cdots,k_n)$,

$$(D^k f) * g = D^k(f * g) = f * (D^k g);$$

(4) 连续性:即若分布序列 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 弱收敛于 f,g 为任意分布,则在下列三个条件之一满足时,序列 $\{f_m * g\}_{m=1}^{\infty}$ 弱收敛于 $f * g$:

1) 所有 $f_m(m=1,2,\cdots)$ 的支集都局限在某一个有界集之中.

2) 分布 g 的支集为有界集.

3) 分布 f 与 g 的支集在同侧有界.

例 5.6.7 对任意的分布 f,有

$$\delta * f = f;$$

$$\delta(x-a) * f = f(x-a),$$

$$\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b),$$

对任意微分算子 L,有

$$(L\delta) * f = \delta * (Lf) = Lf.$$

特别有

$$\delta^{(m)} * f = f^{(m)}.$$

定理 5.6.8 设 φ 为检验函数,则对任意的分布 f,$f * \varphi$ 是无穷次可微函数.

例 5.6.9 设 Φ_ε 是例 5.2.6 中的函数

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\varepsilon \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right), & \|x\| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \|x\| > \varepsilon. \end{cases}$$

由于 $\varphi_\varepsilon \in D(\mathbf{R}^n)$,所以对于任意的分布 f,$f * \varphi_\varepsilon$ 是无穷次可微

函数. 又由于当 $\varepsilon\to 0$ 时 φ_ε 弱收敛于 δ, 所以 $f*\varphi_\varepsilon$ 就弱收敛于 f. 因此, 无穷次可微函数在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中稠密. 由此又知道, 空间 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{S}'$ 也在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中稠密.

5.6.3 卷积的应用

定理 5.6.10 设 L 为一线性微分算子, f 为任一分布, 则微分方程

$$Lu=f$$

的解为 $u=f*E$, 其中 E 为微分算子 L 的基本解.

例 5.6.11 牛顿位势.

对于 $\mathbf{R}^n$ 中的密度函数 ρ, 考虑泊松 (Poisson) 方程

$$-\nabla^2 u(x)=\rho(x).$$

这个方程的解称为由密度函数 ρ 产生的牛顿位势或体位势.

当 $n=3$ 时, 微分算子 $-\nabla^2$ 的基本解为 $\frac{1}{4\pi|x|}$. 于是 $n=3$ 时的牛顿位势为

$$\begin{aligned}V_3(x)&=\rho*\frac{1}{4\pi|x|}\\&=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{\rho(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对于 $n\geqslant 3$,

$$\begin{aligned}V_n(x)&=\rho*\frac{1}{(n-2)\Omega_n|x|^{n-2}}\\&=\frac{1}{(n-2)\Omega_n}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\rho(y)}{|x-y|^{n-2}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

当 $n=2$ 时, $-\nabla^2$ 的基本解为 $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}$, 所以相应的牛顿位势为

$$V_2(x)=\rho*\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\rho(y)\ln\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}y.$$

例 5.6.12 单层位势.

设 S 为一有界的逐片光滑的双侧曲面，$\sigma(x)$是 S 上的局部可积函数. $\sigma(x)\delta(S)$是密度 σ 产生的单层分布. 由这个分布产生的**单层位势**(single layer potential)为

$$V_n^{(0)}(x) = \sigma(x)\delta(S) * \frac{1}{(n-2)\Omega_n |x|^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{(n-2)\Omega_n}\int_S \frac{\sigma(y)}{|x-y|}\mathrm{d}S_y.$$

当 $n \geqslant 3$

$$V_2^{(0)}(x) = \sigma(x)\delta(S) * \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_S \sigma(y)\ln\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}S_y$$

例 5.6.13 双层位势.

设 S 为一有限的逐片光滑曲面，$\tau(x)$是 S 上的连续函数，$\frac{\partial}{\partial n}[\tau(x)\delta(S)]$是密度为 τ 的双层分布. 由这个分布产生的位势

$$V_n^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial n}[\tau(x)\delta(S)] * \frac{1}{(n-2)\Omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{(n-2)\Omega_n}\int_S \tau(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\mathrm{d}S_y, \qquad n \geqslant 3.$$

$$V_2^{(1)}(x) = -\frac{\partial}{\partial n}[\tau(x)\delta(S)] * \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_S \tau(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}S_y$$

5.7 缓增分布与傅里叶变换

经典函数的傅里叶变换由下式确定：

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle y,x\rangle} f(x)\mathrm{d}x$$

其中 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

$$\langle y,x\rangle = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n.$$

自然会设想借助于检验函数的傅里叶变换来定义分布的傅里叶变换，即

$$\langle \hat{f},\varphi\rangle = \langle f,\hat{\varphi}\rangle,\quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n).$$

但是这样做将遇到一个困难，对于检验函数 φ，它的傅里叶变换一般不再是检验函数，于是 $\langle f,\hat{\varphi}\rangle$ 就不再有意义. 因此，为了对广义函数定义傅里叶变换，需要扩充检验函数，引进速降函数的概念.

5.7.1 速降检验函数

定义 5.7.1 设 φ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的一个实或复值函数，如果 φ 满足下列条件：

(1) φ 在 $\mathbf{R}^n$ 无穷次可微.

(2) φ 及其任意阶导数在无穷远趋于零的速度比任意多项式的倒数都快，即对任意的 n 重指标 k 及任意多项式 $p(x)$，存在常数 $c_{p,k}$，使得

$$|p(x)D^k\varphi(x)| < c_{p,k},\qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^n,$$

则称 φ 是一个**速降检验函数**(rapidly decreasing function)，简称**速降函数**.

所有速降函数构成的集合记作 $\mathscr{S}$，称 $\mathscr{S}$ 为**速降检验函数空间**.

例 5.7.2 令

$$\varphi(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right),\qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$|x|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$. 则 φ 是一个速

降函数.

定理 5.7.3 速降函数空间 $\mathscr{S}$ 有下列性质:

(1) $\mathscr{S}$ 是一个线性空间.

(2) 若 $\varphi\in\mathscr{S}$, 则对任意的微分算子 L 和任意的多项式 p, 有 $p(x)L(\varphi)\in\mathscr{S}$.

(3) $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)\subset\mathscr{S}$.

定义 5.7.4 设 $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathscr{S}$, $\varphi_0\in\mathscr{S}$. 如果对任意的 n 重指标 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 及 $k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 都有

$$\lim_{m\to+\infty}\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^p(D^k\varphi_m(x)-D^k\varphi_0(x))|\}=0$$

则称序列 $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ 收敛于 φ_0. 如果 $\varphi_0(x)\equiv0$, 则称 $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ 为**一零序列**.

定理 5.7.5 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 在 $\mathscr{S}$ 中稠, 即对每个 $\psi\in\mathscr{S}$, 存在 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的一个序列 $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, 使得在定义 5.7.4 的意义下有 $\lim\limits_{m\to+\infty}\varphi_m=\psi$.

事实上, 设 φ 是在例 5.2.7 中引进的函数, 若令 $\varphi_m(x)=\varphi\left(\frac{x}{m}\right)$, $(m=1,2,\cdots)$, 则有

$$\lim_{m\to+\infty}\varphi_m\psi=\psi,\quad \forall\,\psi\in\mathscr{S}.$$

5.7.2 缓增分布

定义 5.7.6 设 f 是 $\mathscr{S}$ 上的一个线性泛函, 如果对于 $\mathscr{S}$ 中的任意零序列 $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, 总有

$$\lim_{m\to+\infty}\langle f,\varphi_m\rangle=0$$

则称 f 是 $\mathscr{S}$ 上的一个连续线性泛函.

$\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函称为**缓增分布**(distribution of slow growth). 所有缓增分布构成的集合记作 $\mathscr{S}'$.

定理 5.7.7 $\mathscr{S}'$ 具有下列性质:

(1) 若 $f,g\in\mathscr{S}'$，则对任意常数 α,β，$\alpha f+\beta g\in\mathscr{S}'$，即 $\mathscr{S}'$ 是线性空间.

(2) 若 $f\in\mathscr{S}'$，则对于自变量 $x\in\mathbf{R}^n$ 的任一线性变换 L，有 $Lf\in\mathscr{S}'$. 其中 Lf 如定义 5.3.7 所述.

(3) 若 $f\in\mathscr{S}'$，则对任意的微分算子 L，有 $Lf\in\mathscr{S}'$.

(4) $\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

例 5.7.8 令 $f=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\delta(x-m)$，则 $f\in\mathscr{S}'$. 但是，$e^{x^2}f\notin\mathscr{S}'$，这是因为，若取速降函数 $\varphi(x)=e^{-x^2}$，则有

$$\langle e^{x^2}f,\varphi\rangle=\langle f,e^{x^2}\varphi\rangle=\sum_{m=1}^{\infty}1=+\infty.$$

这说明，用无穷可微函数去乘 $f\in\mathscr{S}'$，所得到的结果不一定是缓增分布.

定义 5.7.9 设 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathscr{S}'$，$f\in\mathscr{S}'$. 如果对每个 $\varphi\in\mathscr{S}$ 都有

$$\lim_{m\to+\infty}\langle f_m,\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle,$$

则称 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$（在 $\mathscr{S}'$ 中）**弱收敛于** f，或简称**收敛于** f.

定理 5.7.10 设 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathscr{S}'$，$f\in\mathscr{S}'$. 如果序列 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{S}'$ 中弱收敛于 f，则 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中也弱收敛于 f.

例 5.7.11 $f(x)=\exp(x_1^2+\cdots+x_n^2)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上一个局部可积函数，因此由式

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad \varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n).$$

确定了一个正则分布 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. 但 f 不是缓增分布. 事实上，取 $\varphi(x)=\exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)\right]$，则

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}\exp\left[\frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)\right]\mathrm{d}x=+\infty.$$

定义 5.7.12 设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的无穷次可微函数，如果

存在非负整数 l,使得对任意的 n 重指标 $k=(k_1,\cdots,k_n)$,恒有
$$\lim_{|x|\to+\infty}|x|^{-l}D^k f(x)=0,$$
则称 f 是一个**缓增函数**(slowly growth function).

定理 5.7.13 对每个缓增函数 f,由式
$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\qquad \varphi\in\mathscr{S},$$
确定了一个缓增分布 f.

5.7.3 速降函数的傅里叶变换

定义 5.7.14 对任意的 $\varphi\in\mathscr{S}$,称
$$\hat{\varphi}(u)=\mathscr{F}[\varphi(x)]\triangleq\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\varphi(x)\mathrm{d}x$$
为 φ 的**傅里叶变换**(Fourier transform). 称
$$\check{\varphi}(u)=\mathscr{F}^{-1}[\varphi(x)]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux}\varphi(x)\mathrm{d}x$$
为 φ 的**傅里叶逆变换**(inverse Fourier transform).

定理 5.7.15 速降函数的傅里叶变换具有下列性质:

(1) 傅里叶变换 $\mathscr{F}$ 及其逆变换 $\mathscr{F}^{-1}$ 都是空间 $\mathscr{S}$ 到自身的一对一的、映满的连续线性映射.

(2) 对任意的 n 重指标 $k=(k_1,\cdots,k_n)$,有
$$[D^k\varphi]^{\wedge}(u)=(-\mathrm{i}u)^k\hat{\varphi}(u)$$
或者
$$[(\mathrm{i}D^k)\varphi]^{\wedge}(u)=u^k\hat{\varphi}(u)$$
其中
$$u^k=u_1^{k_1}\cdots u_n^{k_n},\quad D^k=\frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},$$
$$|k|=k_1+\cdots+k_n.$$

(3) 对任意多项式 p,有
$$\left[p\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi(x)\right]^{\wedge}(u)=p(-\mathrm{i}u_1,\cdots,-\mathrm{i}u_n)\hat{\varphi}(u),$$

或者

$$\left[p\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi(x)\right]^{\wedge}(u)=p(u_1,\cdots,u_n)\hat{\varphi}(u);$$

(4) $[\hat{\varphi}]^{\wedge}(u)=\varphi(-u)$，$[\hat{\varphi}]^{\vee}(x)=\varphi(x)$；

(5) 对任意的 $k=(k_1,\cdots,k_n)$，有

$$[(\mathrm{i}x)^k\varphi]^{\wedge}(u)=D^k\hat{\varphi}(u),$$

或者

$$[x^k\varphi]^{\wedge}(u)=(-\mathrm{i}D)^k\hat{\varphi}(u);$$

(6) 对任意多项式 p，恒有

$$[p(\mathrm{i}x_1,\cdots,\mathrm{i}x_n)\varphi]^{\wedge}(u)=p\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u_n}\right)\hat{\varphi}(u),$$

或者

$$[p(x_1,\cdots,x_n)\varphi]^{\wedge}(u)=p\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial u_1},\cdots,-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial u_n}\right)\hat{\varphi}(u);$$

(7) 对任意的 $a\in\mathbf{R}^n$，有

$$[\varphi(x-a)]^{\wedge}(u)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}au}\hat{\varphi}(u),$$
$$\hat{\varphi}(u+a)=[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\varphi]^{\wedge}(u);$$

其中 $au=a_1u_1+\cdots+a_nu_n$.

(8) 若 A 为 $n\times n$ 可逆矩阵，A' 为其转置共轭矩阵，则有

$$[\varphi(Ax)]^{\wedge}(u)=|\det A|^{-1}\hat{\varphi}[(A')^{-1}u].$$

特别，当 A 为正交阵时，有

$$[\varphi(Ax)]^{\wedge}(u)=\hat{\varphi}(Au).$$

例 5.7.16 $\varphi(x)=\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个速降函数，并满足微分方程

$$\varphi'(x)=-x\varphi(x).$$

在此方程两端各取傅里叶变换，得

$$\mathrm{i}u\hat{\varphi}(u)=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\hat{\varphi}(u),$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\hat{\varphi}(u)\mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}}\right]=0.$$

于是存在常数 c，使得

$$\hat{\varphi}(u)=c\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}.$$

又注意到

$$\hat{\varphi}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi},$$

所以 $c=1$. 因此，

$$\hat{\varphi}(u)=\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)=\sqrt{2\pi}\varphi(u).$$

5.7.4 缓增分布的傅里叶变换

定义 5.7.17 设 f 是一个缓增分布，f 的傅里叶变换 $\hat{f}=\mathscr{F}(f)$ 也是一个缓增分布，由下式确定

$$\langle\hat{f},\varphi\rangle=\langle f,\hat{\varphi}\rangle,\quad \varphi\in\mathscr{S}$$

f 的傅里叶逆变换 $\check{f}=\mathscr{F}^{-1}(f)$ 是由式

$$\langle\check{f},\varphi\rangle=\langle f,\check{\varphi}\rangle,\varphi\in\mathscr{S},$$

确定的一个缓增分布.

定理 5.7.18 傅里叶变换 $\mathscr{F}$ 和傅里叶逆变换 $\mathscr{F}^{-1}$ 都是 $\mathscr{S}'$ 到自身的一一对应的、映满的、连续的线性映射.

所谓连续性，是指若 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}\subset\mathscr{S}'$ 弱收敛于 $f\in\mathscr{S}'$，则 $\{\hat{f}_m\}_{m=1}^{\infty}$ 也弱收敛于 $\hat{f}$. 反之亦然.

定理 5.7.19 缓增分布的傅里叶变换有下列性质：

(1) $[\hat{f}\,]^{\wedge}(x)=f(-x)$

其中 $f(x)$ 表示缓增分布 f，而 $f(-x)$ 则表示在变量的变换 $y=-x$ 之下产生的分布(见定义 5.3.7). 以下类似.

(2) 对任意多项式 p，有

$$\left[p\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f\right]^{\wedge}(u)=p(-\mathrm{i}u_1,\cdots,-\mathrm{i}u_n)\hat{f}(u),$$

$$\left[p\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f\right]^{\wedge}(u)=p(u_1,\cdots,u_n)\hat{f}(u).$$

特别有

$$[D^k f]^{\wedge}(u)=(-\mathrm{i}u)^k\hat{f}(u),$$

$$[(\mathrm{i}D)^k f]^{\wedge}(u)=u^k\hat{f}(u).$$

(3) 对任意多项式 p，有

$$[p(\mathrm{i}x_1,\cdots,\mathrm{i}x_n)f]^{\wedge}(u)=p\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\hat{f}(u),$$

$$[p(x_1,\cdots,x_n)f]^{\wedge}(u)=p\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\hat{f}(u).$$

特别有

$$[(\mathrm{i}x)^k f]^{\wedge}(u)=D^k\hat{f}(u),$$

$$[x^k f]^{\wedge}(u)=(-\mathrm{i}D)^k\hat{f}(u).$$

(4) 对任意的 $a\in\mathbf{R}^n$，有

$$[f(x-a)]^{\wedge}(u)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}au}\hat{f}(u),$$

$$[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}f]^{\wedge}(u)=\hat{f}(u+a).$$

(5) 对任意的 $n\times n$ 可逆矩阵 A，有

$$[f(Ax)]^{\wedge}(u)=|\det A|^{-1}\hat{f}((A')^{-1}u).$$

当 A 为正交阵时，则有

$$[f(Ax)]^{\wedge}(u)=\hat{f}(Au).$$

特别，对任意常数 c，有

$$[f(cx)]^{\wedge}(u)=\frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{u}{c}\right),$$

$$[f(-x)]^{\wedge}(u)=\hat{f}(-u).$$

例 5.7.20 某些分布的傅里叶变换.

(1) 有关狄拉克分布 δ 的傅里叶变换(一元情形):

$\hat{\delta}(x)=1$.

$[1]^{\wedge}(u)=2\pi\delta(u)$.

$[p(x)]^{\wedge}(u)=2\pi p\left(-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)\delta(u)$,其中 p 为多项式.

$[\delta^{(2k)}(x)]^{\wedge}(u)=(-1)^{k}u^{2k}$.

$[\delta^{(2k+1)}(x)]^{\wedge}(u)=(-1)^{k+1}\mathrm{i}u^{2k+1}$.

$[\delta(x-a)]^{\wedge}(u)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}au}$.

$[\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}]^{\wedge}(u)=2\pi\delta(u+b)$.

$[\cos bx]^{\wedge}(u)=\pi[\delta(u+b)+\delta(u-b)]$.

$[\sin bx]^{\wedge}(u)=-\mathrm{i}\pi[\delta(u+b)-\delta(u-b)]$.

$[\cosh bx]^{\wedge}(u)=\pi[\delta(u-\mathrm{i}b)+\delta(u+\mathrm{i}b)]$.

$[\sinh bx]^{\wedge}(u)=\pi[\delta(u+\mathrm{i}b)-\delta(u-\mathrm{i}b)]$.

(2) 有关赫维赛德分布的傅里叶变换:

$[H(x)]^{\wedge}(u)=\pi\delta(u)+\mathrm{i}\,pf\left(\frac{1}{u}\right)$.

$[H(-x)]^{\wedge}(u)=\pi\delta(u)-\mathrm{i}\,pf\left(\frac{1}{u}\right)$.

$[H(a-|x|)]^{\wedge}(u)=\frac{2\sin(au)}{u}$.

$[\mathrm{sgn}(x)]^{\wedge}(u)=2\mathrm{i}\,pf\left(\frac{1}{u}\right)$.

$\left[pf\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{\wedge}(u)=\mathrm{i}\pi\,\mathrm{sgn}(u)$.

$[x^{-m}]^{\wedge}(u)=\frac{\mathrm{i}^{m}\pi}{(m-1)!}u^{m-1}\mathrm{sgn}(u)$, $\quad m=1,2,\cdots$.

$[(x-a)^{-m}]^{\wedge}(u)=\mathrm{i}^{m}\pi\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{e}^{\mathrm{i}au}\mathrm{sgn}(u)$.

(3) 分布 $x_{\pm}^{\lambda}$、$|x|^{\lambda}$、$|x|^{\lambda}\mathrm{sgn}(x)$的变换:

$[x_{+}^{\lambda}]^{\wedge}(u)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\lambda+1)/2}\Gamma(\lambda+1)(u+\mathrm{i}0)^{-\lambda-1}$,$\lambda\neq-1,-2,\cdots$

$$\left[\frac{x_\pm^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right](u)=\mathrm{e}^{\pm i\pi(\lambda+1)/2}(u\pm i0)^{-\lambda-1},\quad \lambda\neq -1,-2,\cdots$$

$$[x_+^m](u)=i^{m+1}[m!u^{-m-1}+(-1)^m i\pi\delta^{(m)}(u)],\ m=1,2,\cdots$$

$$[x_-^m](u)=i^{m+1}[(-1)^{m+1}m!u^{-m-1}+i\pi\delta^{(m)}(u)],\ m=1,2,\cdots$$

$$[|x|^\lambda](u)=-2\Gamma(\lambda+1)\sin(\lambda\pi/2)|u|^{-\lambda-1},\ \lambda\neq -1,-2,\cdots$$

$$[|x|^\lambda\mathrm{sgn}(x)](u)=2i\Gamma(\lambda+1)\cos(\lambda\pi/2)|u|^{-\lambda-1}\mathrm{sgn}(u),\quad \lambda\neq -1,-2,\cdots$$

$$[|x|^m](u)=i^{m+1}\{[1+(-1)^{m+1}]u^{-m-1}m!+[(-1)^{m+1}-1]i\pi\delta^{(m)}(u)\},\quad m=0,1,2,\cdots$$

$$[|x|^m\mathrm{sgn}(x)](u)=i^{m+1}\{[1-(-1)^{m+1}]u^{-m-1}m!+[(-1)^{m+1}+1]i\pi\delta^{(m)}(u)\},\quad m=0,1,2,\cdots$$

$$[|x|^{2m}](u)=(-1)^m2\pi\delta^{(2m)}(u),\quad m=0,1,2,\cdots$$

$$[|x|^{2m}\mathrm{sgn}(x)](u)=2i(-1)^m(2m)!u^{-2m-1},\quad m=0,1,2,\cdots$$

$$[|x|^{2m+1}](u)=2(-1)^{m+1}(2m+1)!u^{-2m-2},\quad m=0,1,2,\cdots$$

$$[|x|^{2m}\mathrm{sgn}(x)](u)=2i(-1)^m(2m)!u^{-2m-1},\quad m=0,1,2,\cdots$$

$$[(x\pm i0)^\lambda](u)=\frac{2\pi\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{2}\lambda}}{\Gamma(-\lambda)}u_\mp^{-\lambda-1}.$$

(4) 分布 $x_\pm^\lambda\ln x_\pm$ 的变换：

$$[x_\pm^\lambda\ln x_\pm](u)=\pm i\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{2}\lambda}\left\{\left[\Gamma'(\lambda+1)\pm i\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right]\times(u\pm i0)^{-\lambda-1}-\Gamma(\lambda+1)(u\pm i0)^{-\lambda-1}\times\ln(u\pm i0)\right\},\quad \lambda\neq -1,-2,\cdots$$

$$[\ln x_\pm](u)=\pm i\left\{\left[\Gamma'(1)\pm i\frac{\pi}{2}\right](u\pm i0)^{-1}-(u\pm i0)^{-1}\ln(u\pm i0)\right\}$$

$$[|x|^\lambda \ln|x|]^\wedge(u) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\lambda\frac{\pi}{2}}\left[\Gamma'(\lambda+1)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right]$$

$$\times(u+\mathrm{i}0)^{-\lambda-1} - \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\lambda\frac{\pi}{2}}\left[\Gamma'(\lambda+1)-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](u-\mathrm{i}0)^{-\lambda-1}$$

$$-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(u+\mathrm{i}0)^{-\lambda-1}\ln(u+\mathrm{i}0)$$

$$+\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(u-\mathrm{i}0)^{-\lambda-1}\ln(u-\mathrm{i}0),$$

$\lambda\neq-1,-2,\cdots$

$$[|x|^\lambda \ln|x|\,\mathrm{sgn}(x)]^\wedge(u) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\lambda\frac{\pi}{2}}\left[\Gamma'(\lambda+1)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](u+\mathrm{i}0)^{-\lambda-1}+\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\lambda\frac{\pi}{2}}\left[\Gamma'(\lambda+1)-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\Gamma(\lambda+1)\right](u-\mathrm{i}0)^{-\lambda-1}-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(u+\mathrm{i}0)^{-\lambda-1}\ln(u+\mathrm{i}0)+\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\lambda\frac{\pi}{2}}\Gamma(\lambda+1)(u-\mathrm{i}0)^{-\lambda-1}\ln(u-\mathrm{i}0),$$

$\lambda\neq-1,-2,\cdots$

$$[\ln|x|]^\wedge(u) = \mathrm{i}\left[\Gamma'(1)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right](u+\mathrm{i}0)^{-1} - \mathrm{i}\left[\Gamma'(1)-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right](u-\mathrm{i}0)^{-1}-\mathrm{i}(u+\mathrm{i}0)^{-1}\ln(u+\mathrm{i}0)+\mathrm{i}(u-\mathrm{i}0)^{-1}\ln(u-\mathrm{i}0).$$

$$[\ln|x|\,\mathrm{sgn}(x)]^\wedge(u) = \mathrm{i}\left[\Gamma'(1)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right](u+\mathrm{i}0)^{-1}+\mathrm{i}\left[\Gamma'(1)-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right](u-\mathrm{i}0)^{-1}-\mathrm{i}(u+\mathrm{i}0)^{-1}\ln(u+\mathrm{i}0)-\mathrm{i}(u-\mathrm{i}0)^{-1}\ln(u-\mathrm{i}0).$$

(5) 分布$(ax^2+bx+c)^\lambda_+$的变换

$$[(1-x^2)_+^\lambda]^\wedge(u) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\left(\frac{u}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}J_{\lambda+\frac{1}{2}}(u),$$

$\lambda\neq-1,-2,\cdots$

$$[(1+x^2)^\lambda]^\wedge(u) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\lambda)}\left(\frac{|u|}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|u|)$$

$$[(x^2-1)_+^\lambda]^\wedge(u) = \Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left(\frac{u}{2}\right)^{-\lambda-\frac{1}{2}}N_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|u|)$$

$$\Gamma(\lambda+1)\sqrt{\pi}\left|\frac{u}{2}\right|^{-\lambda-\frac{1}{2}}\times\frac{\cos\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\pi J_{-\lambda-\frac{1}{2}}(|u|)-J_{\lambda+\frac{1}{2}}(|u|)}{\sin\pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}.$$

$$[(x^2-1)^m]^{\wedge}(u)=(-1)^m 2\pi\left(1+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\right)\delta(u)$$

$$+(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}\left(\frac{u}{2}\right)^{-m-\frac{1}{2}}J_{m-\frac{1}{2}}(u),\quad m=1,2,\cdots$$

(6) 一些多元分布的傅里叶变换

在以下各式中，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$ax=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$．$r=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$，$\rho=(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2)^{\frac{1}{2}}$．

$$[\delta(x)]^{\wedge}(u)=1$$

$$[p(x_1,x_2,\cdots,x_n)]^{\wedge}(u)$$

$$=(2\pi)^n p\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial u_1},-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial u_2},\cdots,-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial u_n}\right)\delta(u).$$

其中 p 为 n 变量多项式．

$$[\delta(x-a)]^{\wedge}(u)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}au}.$$

$$[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}]^{\wedge}(u)=(2\pi)^n\delta(u+a).$$

$$[\delta(r-b)]^{\wedge}(\rho)=S_{n-1}b^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(b\rho),\quad n=1,2,\cdots$$

$$[\delta(r-a)]^{\wedge}(\rho)=4\pi b\frac{\sin b\rho}{\rho},\quad n=3.$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{b\partial b}\right)^m\frac{\delta(r-b)}{b}\right]^{\wedge}(\rho)=S_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin b\rho}{\rho}$$

其中 S_n 为 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面面积．

$$[r^{\lambda}]^{\wedge}(\rho)=2^{\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}\rho^{-\lambda-n}$$

5.7.5 直积与卷积的傅里叶变换

定理 5.7.21 对任意的 $f\in\mathscr{S}'_m$ 与 $g\in\mathscr{S}'_n$，有

$$[f(x)\otimes g(y)] = \hat{f}\otimes\hat{g}.$$

$$[f(x)\otimes g(y)] = F_x[f(x)\otimes\hat{g}(v)]$$

$$= F_y[\hat{f}(u)\otimes g(y)].$$

其中 F_x，F_y 分别表示对变量 x，y 作傅里叶变换.

定理 5.7.22 若分布 f 与 g 的卷积有意义，则

$$[f*g](u)=\hat{f}(u)\cdot\hat{g}(u).$$

5.7.6 某些应用

例 5.7.23 奇维空间波动方程柯西问题的基本解.

设 n 为奇数，求波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

的基本解，即满足以下条件的解.

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\delta(x).$$

波动方程的通解可以表为如下形式：

$$u(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n}\psi_1(\sigma)e^{-i\sigma x+i\sigma t}d\sigma$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n}\psi_2(\sigma)e^{-i\sigma x-i\sigma t}d\sigma$$

下面确定函数 ψ_1 与 ψ_2. 由第一个初值条件可得

$$\int_{\mathbf{R}^n}[\psi_1(\sigma)+\psi_2(\sigma)]e^{-i\sigma x}d\sigma=0,$$

只须取 $\psi_2(\sigma)=-\psi_1(\sigma)$即可使此式满足.

令 $\psi(\sigma)\triangleq 2i\psi_2(\sigma)=-2i\psi_1(\sigma)$，于是

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(\sigma)\mathrm{e}^{i\sigma x}\sin\rho t\,\mathrm{d}\sigma$$
$$= \mathscr{F}^{-1}[\psi(\sigma)\sin\rho t]$$

第二个初值条件变为

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(\sigma)\mathrm{e}^{-i\sigma x}\rho\,\mathrm{d}\sigma$$
$$= \delta(x).$$

或者

$$\mathscr{F}^{-1}[\rho\psi(\sigma)] = \delta(x).$$

从而

$$\rho\psi(\sigma) = \mathscr{F}[\delta(x)](\sigma) = 1.$$

代入上面 $u(x,t)$ 的表达式，就得

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\sin\rho t}{\rho}\right].$$

由公式(5.7.20)的(6)中第6式，并取 $n=2m+3$，得 $u(x,t)$ 等于

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{\sin\rho t}{\rho}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{S_{n-1}}\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^m\frac{\delta(r-t)}{t}.$$

如果上面第二个初值条件改为

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f(x),$$

则方程的解是

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{S_{n-1}}\left(\frac{\mathrm{d}}{t\mathrm{d}t}\right)^m t^{n-2}S_n M_t[f].$$

其中 $M_t[f]$ 表示函数 $f(x-\xi)$ 在球面 $|\xi|=t$ 上的平均值. 特别当 $n=3, m=0$ 时，

$$u(x,t) = tM_t[f].$$

例 5.7.24 薛定谔算子的基本解.

考虑薛定谔(Schrödinger)算子的基本解 $E(x,t)$，

$$-\left(\nabla^2 E(x,t) - \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\right)$$

$$= \delta(x,t) = \delta(x)\delta(t), \qquad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \geqslant 0.$$

将方程两端关于变量 x 作傅里叶变换，得到

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}\hat{E}(u,t)}{\mathrm{d}t} + |u|^2\hat{E}(u,t) = \delta(t).$$

这个方程的解为

$$\hat{E}(u,t) = \mathrm{i}H(t)\exp(-\mathrm{i}t|u|^2).$$

$\hat{E}$ 的傅里叶逆变换即原方程的解. 为了求 $\hat{E}$ 的傅里叶逆变换，考虑与 ε 有关的函数

$$\hat{E}(u,t,\varepsilon) = \mathrm{i}H(t)\exp[-(\varepsilon + \mathrm{i}t)|u|^2], \quad \varepsilon > 0.$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，作为分布，$\hat{E}(u,t,\varepsilon)$ 收敛于 $\hat{E}(u,t)$. 由于傅里叶逆变换是连续映射，所以 $\hat{E}(u,t,\varepsilon)$ 的逆变换就收敛于 $E(x,t)$.

按逆变换的定义，有

$$E(x,t,\varepsilon) = (2\pi)^{-n}\left(\int_{\mathbf{R}^n}\exp[-\mathrm{i}x\cdot u - (\varepsilon + \mathrm{i}t)|u|^2]\mathrm{d}u\right)$$

$$= \left\{\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\exp\left[-(\varepsilon + \mathrm{i}t)\left(u_j + \mathrm{i}\frac{x_j}{2(\varepsilon + \mathrm{i}t)}\right)^2\right]\mathrm{d}u_j\right\}$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(\varepsilon + \mathrm{i}t)}\right)$$

令 $\varepsilon \to 0$，$E(x,t,\varepsilon)$ 就收敛于 $E(x,t)$，即

$$E(x,t) = (2\pi)^{-n}t^{-\frac{n}{2}}J^n\exp\left(\frac{-|x|^2}{4\mathrm{i}t}\right)$$

其中

$$J = \int_{\mathbf{R}^1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y^2}\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}.$$

于是薛定谔算子的基本解为

$$G(x,t) = H(t)E(x,t).$$

5.8 分布的拉普拉斯变换

5.8.1 经典函数的拉普拉斯变换

定义 5.8.1 设 f 是实变量 $t(0\leqslant t<+\infty)$ 的复值函数. 如果存在实常数 c_f，使得 $f(t)e^{-c_f t}$ 在 $[0,+\infty)$ 上绝对可积，则 f 的**拉普拉斯**(Laplace)**变换**为

$$\tilde{f}(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

其中 s 为复数，当 $\mathrm{Re}s>c_f$ 时，$\tilde{f}(s)$ 有意义.

定理 5.8.2 经典函数的拉普拉斯变换有下列性质：

(1) 当 $\mathrm{Re}s>c_f$ 时，$\tilde{f}(s)$ 是 s 的解析函数.

(2) 设 f,g 是 t 的复值函数，令 $c=\max\{c_f,c_g\}$，则当 $\mathrm{Re}s\geqslant c$ 时，对任意常数 α,β，有

$$(\alpha f+\beta g)^{\sim}(s)=\alpha\tilde{f}(s)+\beta\tilde{g}(s);$$

(3) 唯一性定理，即若 f,g 为复值函数，它们的拉普拉斯变换 $\tilde{f}$ 与 $\tilde{g}$ 如果在复平面上某一条竖直线上相等，则有

$$f(t)=g(t),\quad 0<t<+\infty;$$

(4) 若 f n 次连续可微，则有

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}=\tilde{f}^{(n)}(s)$$
$$=s^n\tilde{f}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

(5) 卷积 $h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ 的拉普拉斯变换为 $\tilde{h}(s)=\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$.

(6) 当 $\sigma>c_f$ 时，下述逆变换公式成立：

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tilde{f}(s)e^{st}ds$$

(7) $\mathscr{L}^{-1}\{\hat{f}(as+b)\}=\frac{1}{a}\exp\left(\frac{-bt}{a}\right)f\left(\frac{t}{a}\right),\quad a>0.$

特别有

$$\mathscr{L}^{-1}\{\hat{f}(s-a)\}=e^{at}f(t)$$

5.8.2 分布的拉普拉斯变换

定义 5.8.3 设 $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$满足下列性质：

(1) $\operatorname{supp}(f)\subset[0,+\infty)$;

(2) 存在(与 f 有关的常数)c_f，使得 $e^{-c_f t}f\in\mathscr{S}'$.

则称分布 f 是$\mathscr{L}$ **可变的**，并定义 f 的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}\hat{f}(s)&=\mathscr{L}\{f\}=\langle e^{-c_f t}f,e^{-(s-c_f)t}\rangle\\&=\langle f,e^{-st}\rangle,\end{aligned}$$

当 $\operatorname{Re}s>c_f$ 时，$\hat{f}(s)$有定义.

定理 5.8.4 当 f 为普通函数时，定义 5.8.1 与定义 5.8.3 一致，并且分布的拉普拉斯变换具有定理 5.8.2 中所列的全部性质.

5.8.3 变换公式

$\mathscr{L}\{H(t)\}=\frac{1}{s},\qquad \operatorname{Re}s>0.$

$\mathscr{L}\{\delta(t)\}=1,$

$\mathscr{L}\{\delta(t-a)\}=e^{-as},\qquad -\infty<s<+\infty.$

$\mathscr{L}\{\delta^{(k)}(t-a)\}=(-1)^k s^k e^{-as},\qquad -\infty<s<+\infty.$

$\mathscr{L}\left\{\sum_{m=1}\delta(t-ma)\right\}=\frac{1}{1-e^{-as}},\quad \operatorname{Re}s>0.$

$\mathscr{L}\{t_+^{\lambda}\}=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}},\quad \lambda\neq-1,\ -2,\cdots,\quad \operatorname{Re}s>0.$

$\mathscr{L}\{t_+^{-k}\}=\frac{(-s)^{k-1}}{(k-1)!}[\ln s-\psi(k)],\quad k=2,3,\cdots,\quad \operatorname{Re}s>0$

其中 $\psi(k) = -\gamma + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m}, \gamma = -\int_0^{\infty} e^{-\eta} \ln\eta d\eta = 0.5772\cdots$

$$\mathscr{L}\{\ln t\} = -\frac{\gamma + \ln s}{s}, \quad \mathrm{Re}s > 0$$

$$\mathscr{L}\{t^k f(t)\} = (-1)^k (\mathscr{L}\{f\})^{(k)}$$

参考文献

1. 盖尔芳特，希洛夫．广义函数
2. Kanwal Ram P. Generalized functions, theory and technique
3. Jones D S. The theory of generalized functions
4. Colombeau J F. New generaliged function and multiplication of distributions

6 变分法与变分原理

6.1 变分法的问题

6.1.1 古典变分学问题

变分法(variational calculus)是一个古老课题，在微积分学研究开始不久，就提出了变分法的一些问题，这些古典变分问题对变分法的发展有巨大的影响，下面是常用的三个著名例子.

例 6.1.1 最速降线问题

1696 年伯努利(Bernoulli)提出这样的问题：在垂直平面内给定两点 P_0 和 P_1，求一条连结这两点的光滑曲线，使得在没有摩擦力的情况下，质点仅在重力作用下沿该曲线从 P_0 降至 P_1 历时最短.

如图 6.1，取 P_0 为坐标原点，x 轴为水平方向，y 轴垂直向下. 设 $y=y(x)$是通过点 $P_0(0,0)$与点 $P_1(x_1,y_1)$的任一光滑曲线，m

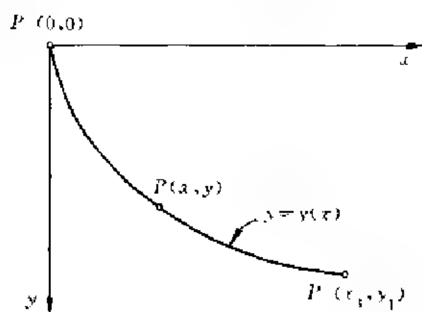


图 6.1 最速降线问题

为质点的质量，g 是重力加速度. 由于没有摩擦力，动能的增加等于势能的减少，即

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy,$$

因而质点在曲线上点 $P(x,y)$ 的速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy}.$$

于是，质点沿曲线 $y=y(x)$ 从 P_0 降至 P_1 的时间为

$$\begin{aligned} Jy &= \int_{P_0}^{P_1} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y(x)}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

显然，$J: y \mapsto Jy$ 是空间 $C^1[0,x_1]$ 的子集

$$D(J) = \{y \in C^1[0,x_1] \mid y(0)=0, y(x_1)=y_1\}$$

上的泛函. 我们的问题是求 $y^* \in D(J)$，使得

$$Jy^* = \min_{y\in D(J)} Jy.$$

这个问题的解是由伯努利兄弟，牛顿，洛必达(L'Hospital)等人得出的.

例 6.1.2　短程线问题

在已知的光滑曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上，求给定两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间长度最短的曲线，见图 6.2. 设

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases} \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$

是曲面上连结点 P_1 与点 P_2 的任一光滑曲线，则其长度为

$$J(y,z) = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+[y'(x)]^2+[z'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

此公式确定的映射 $J:(y,z)\mapsto J(y,z)$ 是集合

$$D(J) = \{(y,z)\in C^1[x_1,x_2]\times C^1[x_1,x_2] \mid \varphi(x,y,z)=0,$$

$$y(x_1)=y_1, z(x_1)=z_1, y(x_2)=y_2, z(x_2)=z_2\}$$

上的泛函. 问题是求$(y^*,z^*)\in D(J)$,使得

$$J(y^*,z^*)=\min_{(y,z)\in D(J)} J(y,z).$$

伯努利在 1697 年解决了这个问题.

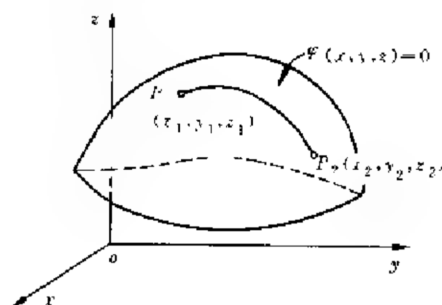


图 6.2　短程线问题

例 6.1.3　等周问题

在平面上的所有长为 l 的光滑封闭曲线中,求所围面积为最大的曲线,见图 6.3. 远在古希腊时,人们已经知道这个曲线是一个圆周,当然那时不可能给出数学上的证明.

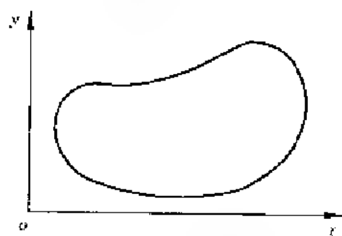


图 6.3　等周问题

用参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

表示任一长为 l 的光滑封闭曲线，于是

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \mathrm{d}t = l.$$

曲线所围的面积为

$$J(x,y) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\mathrm{d}t.$$

现在 $J:(x,y)\mapsto J(x,y)$ 是集合

$$D(J) = \left\{(x,y) \in C^1[t_1,t_2] \times C^1[t_1,t_2] \middle| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\mathrm{d}t = l\right\}$$

上的泛函. 问题是求 $(x^*, y^*) \in D(J)$，使得

$$J(x^*, y^*) = \max_{(x,y)\in D(J)} J(x,y).$$

上面几个例子都具有一定的典型性，它们都是求泛函的极值问题，但问题的提法又各有不同. 最速降线问题，曲线 $y=y(x)$ 两端是固定的，属于不动边界的泛函的极值. 更为一般的情形是可动边界的泛函的极值，允许曲线的两端在一定条件下变动. 短程线问题和等周问题同属泛函的条件极值问题，前者包含的条件由某个函数方程给出，后者包含的条件则以积分形式出现. 这类问题的一般解法首先在欧拉和拉格朗日的著作里见到.

6.1.2　变分法的内容与意义

变分法主要研究泛函的极值问题. 随着泛函分析的发展，变分法的理论不断扩展，它已成为泛函分析的一个重要部分.

变分法的具体内容是讨论处理变分问题(泛函的极值)的方法. **古典方法**(classical method)将变分问题归结为欧拉方程的定解问题. 欧拉方程是泛函极值的必要条件，但不是充分条件. 按照古典方法处理变分问题时，通常不去考虑泛函极值的充分条件，而是从实际问题的性质出发，间接地判断泛函极值的存在性，直接利

用欧拉方程来求解. 然而,即使导出了欧拉方程,求解也决不都是容易的. 实际上,处理微分方程的定解问题一般是困难的. 所以,把变分问题归结为定解问题,也可能将问题复杂化了. 因此便产生把变分问题按其原有形式进行处理的**直接法**(direct method),它完全不依赖微分方程,而是直接从求极值的泛函的积分形式出发,采用近似解法求解变分问题. 直接法主要是在本世纪发展起来的,它比古典方法更为自然和便于使用,而且对于解的存在的证明也较为有效.

直接法的发展,使数学物理中的所谓**变分原理**(variational principle)的许多法则逐步得以建立. 变分原理以泛函与微分方程定解问题的关系作为对象. 在这里,事情正好相反,即反过来将微分方程定解问题化为适当的泛函极值问题或解变分方程问题,然后利用直接法去近似求解. 在这个意义下,古典方法仍能发挥很大的作用,它是确立泛函与微分方程定解问题之间联系的一种较方便的手段.

变分学的发展是和它在力学、物理及工程等各方面的广泛应用紧密相关的. 古典变分理论在 18 和 19 世纪经典物理学发展中起过重要作用. 20 世纪量子概念出现后,变分法在物理学中的重要性并未减小. 各方面不断提出新的课题,促使变分法理论的研究愈加广泛. 例如,50 年代前后,在自动调节理论的最佳过程问题的研究中,在动态规划理论的发展中,以及宇宙航行理论中的轨道设计和计算等,都提出了变分问题并扩展了变分理论. 现在,应用变分法已经解决了并仍在解决着大量重要的实际问题.

6.2 欧拉方程

6.2.1 $\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 型不动边界问题

设 F 是已知的三元函数,而且是二阶可微的. 函数 y 属于集合

$$D(J)=\{y\in C^2[a,b] \mid y(a)=y_a, y(b)=y_b\}.$$
于是可定义 $D(J)$ 上的泛函 $J: y\mapsto Jy$,

$$Jy=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))\mathrm{d}x, \qquad \forall\, y\in D(J). \tag{6.1}$$

古典变分学最初讨论的问题是：求 $y\in D(J)$，使 Jy 达到最小值（或最大值）.

让我们结合这个问题，先来引进关于泛函的变分与极值等最基本的概念.

设函数 $y\in D(J)$，通常称 y 与某一函数 $y_1\in D(J)$ 之差为 y 的**变分**(variation)，记作 δy 即

$$\delta y = y-y_1.$$

泛函 J 的定义域 $D(J)$ 中函数的变分是普通函数 f 的自变量增量概念的推广. 函数 f 的微分是导数与自变量增量之积，它可表示为

$$\mathrm{d}f=f'(x)\Delta x=\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0}.$$

函数 f 的微分存在当且仅当 f 可导. 对于泛函 J，当 $y\in D(J)$ 与 δy 固定时可确定一个函数 φ, $\varphi(\alpha)=J(y+\alpha\delta y)$. 如果 φ 可导，那么它的微分便是有意义的. 由此引出泛函 J 的变分概念如下：

如果 $\frac{\partial}{\partial\alpha}J(y+\alpha\delta y)\Big|_{\alpha=0}$ 存在，则称它为泛函 J 的**变分**，并记作 δJ，即

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}J(y+\alpha\delta y)\Big|_{\alpha=0}. \tag{6.2}$$

泛函的变分是普通函数的微分概念的推广.

在函数集合 $D(J)$ 中可取距离 ρ 为

$$\rho(y_1,y_2)=\max_{k=0,1,2}\max_{a\le x\le b}|y_1^{(k)}(x)-y_2^{(k)}(x)|,$$
$$\forall\, y_1,y_2\in D(J),$$

则函数 $y^*\in D(J)$ 的 ε 邻域

$$B(y^*,\varepsilon) = \{y \in D(J) \mid \rho(y,y^*) < \varepsilon\}.$$

于是可以建立泛函的极值概念.

设 $y^* \in D(J)$,如果存在 $\varepsilon>0$,使得泛函 J 成立

$$Jy^* \leqslant Jy, \quad \forall\, y \in B(y^*,\varepsilon), \tag{6.3}$$

则称泛函 J 在函数 y^* 达到**极小值**(minimum),y^* 称为**极值函数**或**极值曲线**(extremal). 如果式(6.3)对任何 $\varepsilon>0$ 成立,即

$$Jy^* \leqslant Jy, \qquad \forall\, y \in D(J),$$

则称泛函 J 在函数 y^* 达到**最小值**. 类似地,可以定义泛函 J 的**极大值**(maximum)和**最大值**,并统称泛函 J 的极小值和极大值为 J 的**极值**(extremum).

利用泛函的变分,可以得到泛函极值的一个必要条件.

定理 6.2.1 若泛函 J 在 $y^* \in D(J)$ 达到极值,且 J 存在变分,则在 y^* 有

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J(y^* + \alpha\delta y)\Big|_{\alpha=0} = 0.$$

泛函的极值问题就是寻求 $y \in D(J)$,使泛函 J 在 y 的值达到最大或最小.

以上基本定义及定理 6.2.1,容易推广于 J 是依赖一元函数 y 及其导数

$$y', y'', \cdots, y^{(n)}$$

的泛函,也可推广于 J 是依赖于多个一元或多元函数即

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

的泛函,其中 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是一元函数或多元函数.

现在回到本节开头提出的变分问题. 根据定理 6.2.1,若依式(6.1)定义的泛函 J 在 $y \in D(J)$ 达到最小值,则

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(y + \alpha\delta y)\Big|_{\alpha=0}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^b F(x, y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')\mathrm{d}x\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\delta y'\right]\mathrm{d}x$$
$$=0.$$

由此利用分部积分，得到

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x=0. \tag{6.4}$$

这里用到 $\delta y|_{x=a}=y(a)-y_1(a)=y_a-y_a=0$，同样 $\delta y|_{x=b}=0$. 再注意到 $\delta y=y-y_1\in C_0^2[a,b]$，$\forall\ y_1\in D(J)$，从而式(6.4)对任何 $\delta y\in C_0^2[a,b]$ 成立. 于是，得出集合 $D(J)$ 上极值函数 y 应当满足的必要条件：

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0, \tag{6.5}$$

或

$$F_{y'y'}y''+F_{yy'}y'+F_{xy'}-F_y=0. \tag{6.6}$$

这个方程称为**欧拉方程**. 因此，所讨论的变分问题归结为解如下的微分方程边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,\\&y(a)=y_a,\ y(b)=y_b.\end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

欧拉方程常常不能简单地解出，但当 F 不显含 x,y,y' 中的一个或两个时，问题将得到简化. 特别在下列场合下容易求出它的首次积分：

(1) 函数 F 不显含 y. 这时，式(6.5)经过一次积分得到一阶微分方程

$$F_{y'}=C \tag{6.8}$$

C 是积分常数.

(2) 函数 F 不显含 x. 这时，式(6.6)变为

$$F_{y'y'}y''+F_{yy'}y'-F_y=0.$$

由此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'F_{y'} - F) = y'(F_{y'y'}y'' + F_{y'y}y' - F_y) = 0.$$

经过一次积分得到

$$y'F_{y'} - F = C \tag{6.9}$$

C 是积分常数.

例 6.2.2 最速降线问题，见例 6.1.1，属于 $\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 型不动边界问题，而且

$$F(x,y,y') = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}},$$

F 不显含 x. 于是直接由式(6.9)得出

$$\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = C,$$

此式简化后成为

$$y(1+y'^2) = C_1.$$

由此令 $y' = \mathrm{ctg}\theta$，即得

$$y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2\theta).$$

再由 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y/y' = C_1(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$，积分后得

$$x = \frac{C_1}{2}(2\theta - \sin 2\theta) + C_2.$$

利用边界条件 $y(0)=0$ 推出 $C_2=0$. 于是，最速降线问题的解(最速降线)为

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}(2\theta - \sin 2\theta), \\ y = \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos 2\theta), \end{cases}$$

其中 C_1 由边界条件 $y(x_1) = y_1$ 来确定. 我们从解析几何中可以知

道，上述方程是摆线的参数方程，因此最速降线是半径为 $C_1/2$ 的圆沿 x 轴转动时圆周上一点所描出的曲线中的一段，见图 6.4.

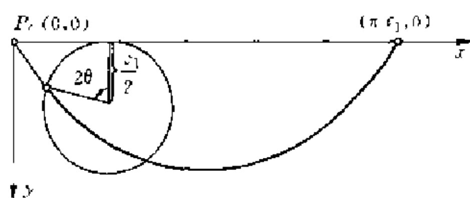


图 6.4

6.2.2 $\int_a^b F(x, y_1, \cdots, y_n, y'_1, \cdots, y'_n)\mathrm{d}x$ 型不动边界问题

前面的结论容易推广于依赖多个函数的泛函和依赖较高阶导数的泛函. 这里先考虑前一种情形.

设泛函 J 依赖于 n 个函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n \in C^2[a,b]$,

$$J(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$= \int_a^b F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y'_1, y'_2, \cdots, y'_n)\mathrm{d}x, \qquad (6.10)$$

并附有边界条件

$$y_i(a) = y_{ia}, \ y_i(b) = y_{ib}, \ i = 1, 2, \cdots, n. \qquad (6.11)$$

在 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 中取某一函数 y_i 的变分，让其余函数保持不变. 也就是说，把泛函 J 看作只依赖于 y_i. 于是，使 J 达到极值的函数 y_i 应当满足

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_i}\right) = 0.$$

这一分析适用于 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 中的每个函数，因此泛函 J 关于函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的极值的必要条件是如下二阶微分方程组：

$$F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \qquad (6.12)$$

这是式(6.10)型泛函的欧拉方程，它在 $n+1$ 维向量$(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$的空间中确定一族含有 $2n$ 个参数的积分曲线，$2n$ 个参数由式(6.11)的 $2n$ 个边界条件来确定.

例 6.2.3 设泛函 J 为

$$J(y,z)=\int_0^{\pi/2}(y'^2+z'^2+2yz)\mathrm{d}x,$$

边界条件

$$y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;$$

$$z(0)=0,\quad z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

则有欧拉方程

$$y''-z=0,\quad z''-y=0.$$

消去 z，得方程 $y^{(4)}-y=0$，由此解出

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

再由 $z=y''$，得到

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x$$

利用边界条件有 $C_1=C_2=C_3=0$，$C_4=1$. 因而极值曲线为

$$y=\sin x,\quad z=-\sin x.$$

6.2.3 $\int_a^b F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x$ 型不动边界问题

现在考虑 J 是含有 1 至 n 阶导数的泛函，

$$Jy=\int_a^b F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x \tag{6.13}$$

其中 F 是 $n+1$ 阶可微的，$y\in C^{2n}[a,b]$，并假定 y 满足如下的边界条件

$$y^{(k)}(a)=y_a^{(k)},\quad y^{(k)}(b)=y_b^{(k)},$$
$$k=0,1,\cdots,n-1. \tag{6.14}$$

这时，应用定理 6.2.1，得出欧拉方程为

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} + \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}} = 0. \tag{6.15}$$

这是泛函 J 的极值函数 y 应当满足的方程,它的通解含有 $2n$ 个任意常数,这些常数由式(6.14)中的 $2n$ 个边界条件确定.

例 6.2.4 设泛函 J 为

$$Jy = \int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\mu y''^2 + \rho y\right)\mathrm{d}x,$$

边界条件

$$y(-l) = 0,\quad y'(-l) = 0,\ y(l) = 0,\ y'(l) = 0.$$

在求两端嵌住的弹性柱形梁的弯曲轴时就可化成这样的变分问题. 当梁是均匀时,ρ 与 μ 都是常数,欧拉方程为

$$\mu y^{(4)} + \rho = 0.$$

由此得到

$$y = -\frac{\rho}{24\mu}x^4 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

利用边界条件,最后得到

$$y = -\frac{\rho}{24\mu}(x^2 - l^2)^2.$$

6.2.4 依赖多元函数的泛函

为简单起见,考虑依赖二元函数 u 的泛函 J 的极值,J 的定义如下:

$$Ju = \iint_{\Omega} F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.16}$$

假定 F 是二阶可微的,函数 $u:(x,y)\in\Omega \mapsto u(x,y)$ 是二阶可微的. 在域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的值是给定的. 在 $\partial\Omega$ 上引进参数 s,边界条件可表示为

$$u|_{\partial\Omega} = f(s),$$

这里 f 是已知函数,见图 6.5. 这样,变分问题是求泛函 J 在集合

$$D(J) = \{u \in C^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = f(s)\}$$

上的极值.

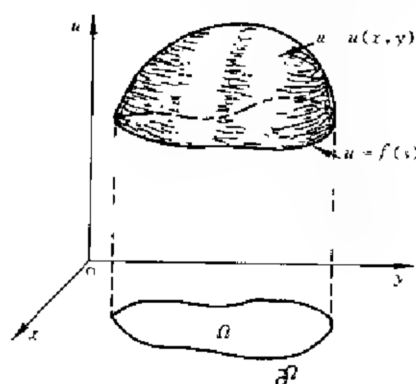


图 6.5

设泛函 J 在 $u\in D(J)$ 达到极值，取 u 的变分 $\delta u = u-u_1, u_1\in D(J)$，则 $\delta u|_{\partial\Omega}=0$，并从定理 6.2.1，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha}J(u+\alpha\delta u)|_{\alpha=0}\\
&=\iint_\Omega (F_u\delta u + F_{u_x}\delta u_x + F_{u_y}\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}\right)\delta u + F_{u_x}\delta u_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u) = \left(\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u + F_{u_y}\delta u_y,$$

且由微积分学的格林公式及条件 $\delta u|_{\partial\Omega}=0$，

$$\begin{aligned}
&\iint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{\partial\Omega}(F_{u_x}\mathrm{d}y - F_{u_y}\mathrm{d}x)\delta u = 0,
\end{aligned}$$

所以

$$\iint_{\Omega}(F_u\delta u+F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Omega}\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

由此，从变分 δu 的任意性推出

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0. \tag{6.17}$$

这就是欧拉方程，显然属于二阶偏微分方程，是泛函 J 的极值函数 u 的必要条件.

例 6.2.5 (1) 设泛函 J 为

$$Ju=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其欧拉方程是著名的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

(2) 设泛函 J 为

$$Ju=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2uf(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其欧拉方程是泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

6.2.5 可动边界问题

到现在为止，所考虑的都是不动边界问题，极值函数在端点或边界上的值都是限定了的. 然而也可以讨论可动边界的变分问题.

我们以最简单的情形为例. 设 $J: y\mapsto Jy$ 是依赖一元函数 y 的泛函,

$$Jy=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x, \tag{6.18}$$

现在假设 $y\in C^2[a,b]$，并且在积分区间端点 a 与 b 中的一个点或两个点上，y 的值可以在一定条件或不附任何条件下变动，变分问题是求泛函 J 的极值.

首先，这时泛函 J 的极值函数 y 的必要条件仍然是满足欧拉方程，见式(6.5)

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0.$$

事实上，虽然可动边界问题是在更广的函数类中寻求极值函数 y，但是只要极值函数 y 确实存在，那么对于与 y 有共同边值的范围较窄的函数类来说，y 自然也是极值函数.这就是说，y 是以它的边值为边值条件的不动边值问题的极值函数，因此它必须满足欧拉方程.

可动边界的极端情形是不加任何边界条件.对于式(6.18)型的泛函 J 来说，不加任何边界条件的变分问题就是在集合 $C^2[a,b]$ 上求泛函 J 的极值，这个集合中每个函数的曲线的端点分别在直线 $x=a$ 与 $x=b$ 上，见图 6.6.这时，由于极值函数 y 满足欧拉

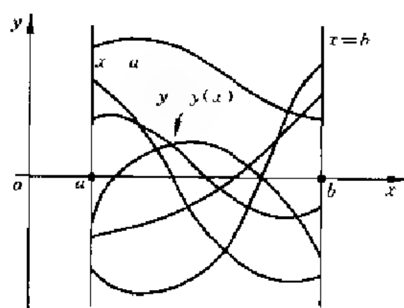


图 6.6

方程，而且

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J(y+\alpha\delta y)\bigg|_{\alpha=0}$$

$$-\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x+\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b=0,$$

因此有

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b=0.$$

因为此式对一切 $\delta y\in C^2[a,b]$ 成立，所以

$$F_{y'}|_{x=a}=F_{y'}|_{x=b}=0. \qquad (6.19)$$

这个条件是极值函数 y 应该满足的，它不是从开始就附加的边界条件，因而称为**自然边界条件**(natural boundary condition)，通常就是根据它再从欧拉方程的解中选出所要的函数.

此外，还可以考虑一端固定一端自由的问题. 例如，右端固定而左端自由时，极值函数 y 应当满足的边界条件是

$$F_{y'}|_{x=a}=0,\quad y(b)=y_b.$$

例 6.2.6 在最速降线问题中，令左边界点固定，$y(0)=0$，而右边界点自由，$F_{y'}|_{x=x_1}=0$. 在例 6.2.2 中利用条件 $y(0)=0$ 已经得到方程

$$\begin{cases}x=\dfrac{C_1}{2}(2\theta-\sin 2\theta),\\ y=\dfrac{C_1}{2}(1-\cos 2\theta).\end{cases}$$

现在利用条件 $F_{y'}|_{x=x_1}=0$ 来确定 C_1. 由这个条件以及

$$F_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}},$$

我们有 $y'(x_1)=0$. 这就是说，极值曲线 $y=y(x)$ 在点 (x_1,y_1) 的切线与直线 $x=x_1$ 相垂直，因此点 (x_1,y_1) 应当是摆线的顶点，见图 6.7. 由于顶点对应于 $2\theta=\pi$，因而

$$C_1=y_1=\frac{2x_1}{\pi}.$$

所以，现在的最速降线问题，极值在如下摆线上达到：

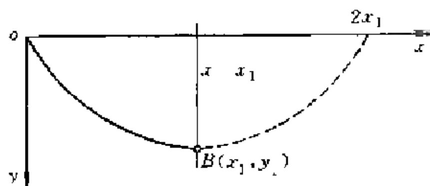


图 6.7

$$
\begin{cases}
x = \dfrac{x_1}{\pi}(2\theta - \sin 2\theta), \\
y = \dfrac{x_1}{\pi}(1 - \cos 2\theta).
\end{cases}
$$

更一般地，如果式(6.18)型的泛函 J 中，函数 y 的端点(a,y_a)与(b,y_b)可以分别在曲线 $\varphi(x,y)=0$ 与 $\psi(x,y)=0$ 上移动，见图 6.8，则泛函 J 的极值函数 y 除满足欧拉方程外，还要满足所谓**横截条件**(transversality condition)

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{F - y'F_{y'}}{\varphi_x}\right]_{x=a} &= \left[\frac{F_{y'}}{\varphi_y}\right]_{x=a}, \\
\left[\frac{F - y'F_{y'}}{\psi_x}\right]_{x=b} &= \left[\frac{F_{y'}}{\psi_y}\right]_{x=b},
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

这里 a 与 b 本身是待定参数. 自然，横截条件也可以只在一个端点出现，而另一端点是固定端. 当 $\varphi(x,y)=x-a$，$\psi(x,y)=x-b$ 时，横截条件就是自然边界条件.

例 6.2.7 考虑变分问题

$$
J_y = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\mathrm{d}x, \quad y(0)=0, \quad y_1 = x_1 - 5.
$$

不难推导，圆$(x-c_1)^2+y^2=c_2^2$是欧拉方程的积分曲线. 由边界条件 $y(0)=0$ 推出 $c_1=c_2$. 再利用横截条件，将 $\psi(x,y)=x-y-5$，$b=x_1$ 替入式(6.20)中的第二式，得方程

$$
[F + (1-y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0.
$$

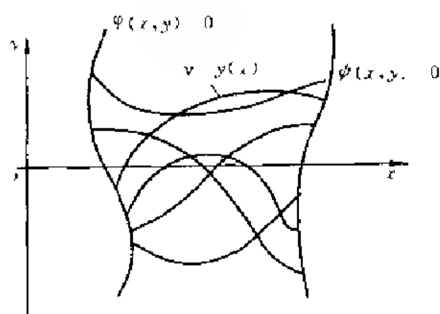


图 6.8

由此及

$$F + (1 - y')F_{y'} = \frac{1 + y'}{y\sqrt{1 + y'^2}},$$

推出 $y'(x_1) = -1$. 这样，所求极值曲线 $y = y(x)$ 在点 (x_1, y_1) 的切线与直线 $y = x - 5$ 正交，因而 $y = x - 5$ 应在圆的直径上. 于是圆心是直线 $y = x - 5$ 与横坐标轴的交点(5,0)，推出 $c_1 = c_2 = 5$. 因此，所求的圆为 $(x-5)^2 + y^2 = 25$，而极值曲线有两条，它们分别是圆弧 $y = \sqrt{10x - x^2}$ 中的一段和圆弧 $y = -\sqrt{10x - x^2}$ 中的一段，在图 6.9 中分别用实线和虚线加以表示.

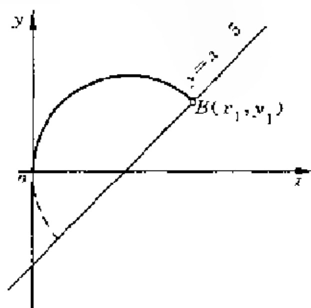


图 6.9

对于含有两个以上未知函数的(6.10)型泛函，以及含有高阶导数的(6.13)型泛函，也能导出自然边界条件或横截条件.

6.2.6 条件极值问题

我们考虑如下简单的条件极值问题：设泛函 $J:(y,z)\mapsto J(y,z)$形如

$$J(y,z)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x, \tag{6.21}$$

求函数 y 与 z 使 J 达到极值，并满足附加条件

$$\varphi(x,y,z)=0 \tag{6.22}$$

及不动边界条件

$$y(x_i)=y_i,\ z(x_i)=z_i,\ i=1,2. \tag{6.23}$$

显然，端点(x_1,y_1,z_1)与(x_2,y_2,z_2)应满足附加条件.

这类问题的解法是微积分学中关于多元函数条件极值的拉格朗日乘数法的直接推广. 作辅助函数

$$F^*=F+\lambda\varphi,$$

其中 λ 是 x 的一个待定函数. 由 F^* 定义一个新的泛函 $J^*:(y,z)\mapsto J^*(y,z)$,

$$J^*(y,z)=\int_{x_1}^{x_2}F^*(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x.$$

于是，上述条件极值问题化为泛函 J^* 的无条件极值问题. 这样就得到欧拉方程

$$F_y^*-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}^*=0,\quad F_z^*-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}^*=0,$$

或

$$\begin{aligned}&F_y+\lambda\varphi_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0,\\&F_z+\lambda\varphi_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}=0.\end{aligned} \tag{6.24}$$

欧拉方程(6.24)和附加条件(6.22)一起,消去λ及z(或y),归结为含一个函数y(或z)的二阶微分方程,它的积分的两个任意常数由边界条件(6.23)确定.

例 6.2.8 短程线问题,见例 6.1.2 属于上述类型问题.它的欧拉方程是

$$\lambda\varphi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0,$$

$$\lambda\varphi_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0,$$

加上曲面方程

$$\varphi(x,y,z) = 0,$$

共有三个方程.从这三个方程,当φ具体给出时,可以确定λ及待求函数y与z.

等周问题(isoperimetric problem)是泛函的条件极值问题之一,其一般提法如下:在满足**等周条件**(isoperimetric condition)

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x,y,y')\mathrm{d}x = a \quad (a \text{ 为常数}) \tag{6.25}$$

和边界条件

$$y(x_i) = y_i, \qquad i = 1,2 \tag{6.26}$$

的一切曲线y中,确定这样一条曲线,使由

$$Jy = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{6.27}$$

确定的泛函J达到极值.

作辅助函数

$$H = F + \lambda G,$$

其中λ是一个待定常数.上述条件极值问题可以归结为由函数H的积分

$$\int_{x_1}^{x_2} H(x,y,y')\mathrm{d}x$$

所确定的泛函的无条件极值问题. 于是,得到等周问题的欧拉方程

$$(F_y+\lambda G_y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'}+\lambda G_{y'})=0. \qquad (6.28)$$

这是关于 y 的二阶微分方程,其积分包含两个积分常数及待定常数 λ,它们可以利用等周条件(6.25)及边界条件(6.26)来确定.

等周问题可推广到多个未知函数的情形. 读者可以从例 6.1.3 看到"等周问题"一词最初的含意.

例 6.2.9 如图 6.10 所示,在连结点 $A(x_1,y_1)$ 与点 $B(x_2,y_2)$ 的所有长为 l 的光滑曲线中,求一条曲线 $y=y(x)$,使得曲边梯形 $CABD$ 的面积最大.

这是一个等周问题,等周条件是

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=l,$$

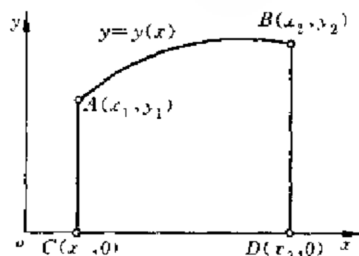


图 6.10

边界条件是

$$y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2,$$

要考察的泛函 J 的定义是

$$J=\int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}x.$$

要求 J 的极值．将 $G(x,y,y')=\sqrt{1+y'^2}$，$F(x,y,y')=y$ 代入式(6.28)，得到

$$1-\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0.$$

不难推出此方程的积分曲线是一族圆：

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=\lambda^2,$$

常数 C_1、C_2 和 λ 由等周条件和边界条件确定.

6.3 变分问题的直接法

6.3.1 欧拉有限差分法

在变分法的早期研究中，欧拉就使用了现在的所谓有限差分法，建立了解变分问题的一种直接法.

为明确起见，以如下类型的变分问题为例：

设泛函 $J: y\to Jy$，

$$Jy=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x, \tag{6.29}$$

边界条件为

$$y(a)=y_a,\quad y(b)=y_b, \tag{6.30}$$

求泛函 J 的极值．将积分区间 $[a,b]$ 等分为 $n+1$ 个子区间，分点为

$$x_0=a,x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}=b.$$

记 $x_{i+1}-x_i=\Delta x=\frac{b-a}{n+1}$，$i=0,1,\cdots,n$．欧拉有限差分法是用折线逼近极值曲线(见图 6.11)，而实际处理时还要更粗略些.

在子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上，用 x_i 近似 x，用 y_i 近似 y，用差商 $\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}$ 近似 y'，于是从(6.29)得到近似表达式

$$Jy\approx\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

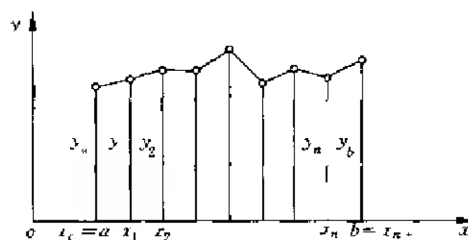


图 6.11

$$\triangleq \sum_{i=0}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x, \tag{6.31}$$

这里 $y_0=y_a$，$y_{n+1}=y_b$，而 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是待定参数. 选取 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，使函数 φ 达到极值，也就是由方程组

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}=0, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{6.32}$$

来确定 $y_1,y_2,\cdots,y_n$. 然后用连结平面上的点 (a,y_a)，(x_1,y_1)，$\cdots$，(x_n,y_n)，(b,y_b) 的折线作为变分问题的近似解（注意，近似表达式 (6.31) 并非由此折线得出）. 如果对每个自然数 n 存在作为近似解的折线，那么存在着一个折线的序列. 只要函数 F 满足一定的条件，就能保证这个折线序列存在，而且当 $n\to\infty$ 时的极限是变分问题的精确解. 具体地说，由于对每个 $i=1,2,\cdots,n$，方程 $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}=0$ 等价于方程

$$F_y\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)-\frac{1}{\Delta x}\left\{F_{y'}\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\right.$$
$$\left.-F_{y'}\left(x_{i-1},y_{i-1},\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right)\right\}=0,$$

从而当 $n\to\infty$ 时，折线序列的极限函数 y 满足欧拉方程（变分问题的解的必要条件，见式(6.5)）

$$F_{y_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'} = 0$$

如果从方程组(6.32)难以直接解出 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，则可选用关于方程组的数值解法，也可改而直接从(6.31)中 φ 的原始形式出发，选用最优化方法中的解法.

6.3.2 里茨法

里茨(Ritz)法是用选定的函数序列的有限线性组合逼近变分问题的极值曲线. 下面的讨论中，仍以由(6.29)与(6.30)所确定的变分问题为例.

适当选取一个函数序列

$$\varphi_i : x \in [a, b] \mapsto \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \cdots. \tag{6.33}$$

通常，在可能情况下，取这个序列是变分问题所考察的函数空间中的一组基，因而称每个 φ_i 是**基函数**或**坐标函数**(coordinate function)；而且要使这个序列便于满足变分问题的边界条件. 用 y_n 表示序列中前 n 个函数的线性组合，即有

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x), \quad \forall\, x \in [a, b],$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是待定常数. 从(6.29)得到

$$Jy_n = \int_a^b F\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x), \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i'(x)\right) \mathrm{d}x. \tag{6.34}$$

于是 Jy_n 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的函数. 选取 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使函数 Jy_n 达到极值，也就是由方程组

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} Jy_n = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{6.35}$$

来确定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 然后用这样得到的 y_n 作为变分问题的近似解，它是序列(6.33)前 n 个函数的所有可能的线性组合中使泛函 J 达到极值的函数.

如果变分问题所考察的函数空间即泛函 J 的定义域 $D(J)$ 是完备的，且序列(6.33)是 $D(J)$ 中的一组基，那么可以用序列(6.33)的有限线性组合任意逼近泛函 J 的极值函数 y. 这时，在一定的条件下，用里茨法可以得到收敛于 y 的一个函数列

$$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots.$$

假定所求的是 J 的极小值，就把这个收敛于 y 的序列称为**极小化序列**(minimizing sequence).

一般，求方程组(6.35)的解仍是个复杂的问题，需要选用关于方程组的数值解法. 自然也可直接从式(6.34)确定的目标函数 Jy_n 出发，选用最优化的解法. 显然，计算的复杂程度不仅取决于泛函 J 的本身，而且在一定程度上还依赖于对坐标函数的灵活选取.

如果 $F(x,y,y')$ 关于 y 与 y' 是二次的，那么方程组(6.35)对于待定常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 来说是线性的，问题将大为简化.

例 6.3.1 考虑泛函 $J: y \mapsto Jy$,

$$Jy = \int_0^1 (30xy'^2 + 12y)\mathrm{d}x,$$

边界条件为

$$y(0) = y(1) = 0,$$

求 J 的极值. 为了满足边界条件，可取坐标函数 φ_i 为

$$\varphi_i(x) = (x-1)x^i, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

我们仅讨论前两个函数的线性组合

$$y_2 = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2,$$

$$y_2(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = (x-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2),$$

于是

$$Jy_2 = 30\int_0^1 x[3\alpha_2 x^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)x - \alpha_1]^2\mathrm{d}x$$

$$+ 12\int_0^1 [\alpha_2 x^3 + (\alpha_1 - \alpha_2)x^2 - \alpha_1 x]\mathrm{d}x$$

$$5\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 7\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1 - \alpha_2.$$

极值的必要条件是

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} J y_2 = 10\alpha_1 + 7\alpha_2 - 2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} J y_2 = 7\alpha_1 + 6\alpha_2 - 1 = 0.$$

由这个方程解得 $\alpha_1 = \frac{5}{11}, \alpha_2 = -\frac{4}{11}$. 因此

$$y_2(x) = \frac{1}{11}(x-1)(5x - 4x^2).$$

上面的讨论直接适用于依赖多个函数的泛函. 同时, 也可把上面的讨论推广于依赖多元函数的泛函, 自然, 这时坐标函数 φ_i 也应当是多元函数.

例 6.3.2 设泛函 $J: u \mapsto Ju$,

$$Ju = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + x\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中积分域 $\Omega = \left\{(x,y) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$, 求 J 的极值. 我们仅取一个坐标函数 φ_1, $\varphi_1(x,y) = xy$, 其线性组合为 $u = \alpha\varphi_1$,

$$u(x,y) = \alpha\varphi_1(x,y) = \alpha xy.$$

经过计算得到

$$Ju_1 = \frac{\pi ab}{4}\left[(\alpha+1)^2 a^2 + (\alpha-1)^2 b^2\right].$$

于是从

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Ju_1 = \frac{\pi ab}{2}\left[(\alpha+1)a^2 + (\alpha-1)b^2\right] = 0$$

解得 $\alpha = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$. 因此极值问题的一个近似解为

$$u(x,y) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} xy.$$

6.3.3 康托罗维奇法

康托罗维奇法一般用于依赖多元函数的泛函. 以如下类型变分问题为例：设泛函 $J: u \mapsto Ju$,

$$Ju = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x, \qquad (6.36)$$

求 J 的极值, 其中 u 是定义在由两条直线 $x=a$, $x=b$ 和两条曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 围成的域 Ω(见图 6.12)上的二元函数. u 在域 Ω 的边界上的值是给定的.

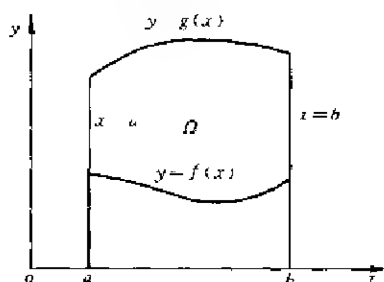


图 6.12

适当选取一个坐标函数序列

$$\varphi_i: (x, y) \in \Omega \mapsto \varphi_i(x, y), \quad i = 1, 2, \cdots. \qquad (6.37)$$

里茨法是把变分问题的近似解 u_n 取成

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x, y),$$

其中 $\alpha_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 是待定常数. 康托罗维奇法不同之点在于将 α_i 改为某一自变量的待定函数. 不失一般性, 取变分问题的近似解 u_n 形如

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \varphi_i(x, y), \qquad (6.38)$$

这里 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是待定函数. 于是,从(6.36)有

$$Ju_n = \int_a^b\int_{f(x)}^{g(x)} F\left(x,y,u_n,\frac{\partial u_n}{\partial x},\frac{\partial u_n}{\partial y}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

因为被积函数是 y 的已知函数,所以可以先对 y 进行积分,并把 Ju_n 写成

$$Ju_n = \int_a^b \Phi(x,\alpha_1(x),\cdots,\alpha_n(x),\alpha_1'(x),\cdots,\alpha_n'(x))\mathrm{d}x.$$

选取函数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,使 Ju_n 达到极值. 这是(6.10)型变分问题,根据式(6.12),应由欧拉方程

$$\Phi_{\alpha_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_{\alpha_i'} = 0, \quad i=1,2,\cdots,n$$

来确定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 这个欧拉方程的解,包含 $2n$ 个任意常数,它们应当这样来选取,使得 u_n 满足变分问题在直线 $x=a$ 与 $x=b$ 上所给定的边界条件.

由于形如 $\sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\varphi_i(x,y)$ 的函数全体要比形如 $\sum_{i=1}^n \alpha_i\varphi_i(x,y)$ 的函数全体远为广泛,因此,一般地说,选用同样的坐标函数以及相同的项数 n 时,康托罗维奇法比里茨法精确.

例 6.3.3 设泛函 $J: u \mapsto Ju$,

$$Ju = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

求 J 的极值,在矩形积分区域 $\{(x,y) \mid -a\leqslant x\leqslant a, -b\leqslant y\leqslant b\}$ 的边界上 $u=0$. 下面求这个变分问题的一个如下形式的近似解:

$$u_1(x,y) = (b^2 - y^2)\alpha(x).$$

在直线 $y=-b$ 与 $y=b$ 上,u_1 满足所给定的边界条件. 经过简单计算得到

$$Ju_1 = \int_{-a}^{a}\left(\frac{16}{15}b^5\alpha'^2 + \frac{8}{3}b^3\alpha^2 - \frac{8}{3}b^3\alpha\right)\mathrm{d}x.$$

这个泛函的欧拉方程

$$\alpha'' - \frac{5}{2b^2}\alpha = -\frac{5}{4b^2}$$

是一个常系数线性方程,其通解为

$$\alpha(x) = C_1 \operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b} + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b} + \frac{1}{2}.$$

常数 C_1 与 C_2 由边界条件 $u_1(-a,y) = u_1(a,y) = 0$ 来确定,由此得到

$$C_1 = -\left[2\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{a}{b}\right]^{-1}, \quad C_2 = 0.$$

从而最后有

$$u_1(x,y) = \frac{1}{2}(b^2 - y^2)\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{a}{b}}\right].$$

为了获得更准确的解答,我们可求形如

$$u_2(x,y) = (b^2 - y^2)\alpha_1(x) + (b^2 - y^2)^2\alpha_2(x)$$

的近似解.

6.4 数学物理中的变分原理

6.4.1 二次函数的极值

在数学物理中,有一类问题直接是泛函极值问题,但是,有许多问题归结为微分方程定解问题.数学物理中的变分原理,就是关于把数学物理中一些微分方程定解问题化为等价的泛函极值问题的方法和理论.因为从泛函极值问题出发建立数值解法往往更为灵活方便,所以变分原理也是构造微分方程数值解法的一个基础.为了便于理解一般形式的变分原理,我们提供一个简单的具体模型,这就是解线性代数方程组与求二次函数极值问题的等价性.

定义在空间 E^n 上的二次函数 J 也是 E^n 上的泛函，当不考虑常数项时，其一般形式可以表为

$$Jx = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i, \tag{6.39}$$

这里 $a_{ij}=a_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,n$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是以 n 个变元为分量的向量. 记

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}, \quad \boldsymbol{b} = (b_1,b_2,\cdots,b_n)^T,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称矩阵. 于是，利用向量的内积，可以把式(6.39)改写为

$$Jx = \frac{1}{2}(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}). \tag{6.40}$$

对于二次函数极值问题来说，关心的是极值点的求解，而常数项对极值点并无影响，因此上述 J 的形式是具有一般性的.

二次函数 J 在点 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T$ 取极值的必要条件是：

$$\frac{\partial}{\partial x_k}J\boldsymbol{x}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_{ki}+a_{ik})x_i^{(0)} - b_k = 0, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

于是从 $\boldsymbol{A}$ 的对称性，我们有

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}.$$

这就是说，二次函数 J 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 取极值的必要条件是 $\boldsymbol{x}_0$ 为线性代数方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{6.41}$$

的解. 但是，在 $\boldsymbol{A}$ 对称的条件下，方程组(6.41)的解不一定是 J 的极值点.

为了进一步推导 J 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 取极小值的充分必要条件，对于任一非零向量 $\boldsymbol{x}\in E^n$，考虑关于实变量 λ 的函数 $\varphi:\lambda \to \varphi(\lambda)$，

$$\varphi(\lambda) = J(\boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{x}).$$

记函数集合

$$\Phi = \{\varphi | \varphi(\lambda) = J(x_0 + \lambda x), x \in E^n \setminus \{0\}\}.$$

容易证明：J 在点 x_0 取极小等价于每一个 $\varphi \in \Phi$ 都在 $\lambda = 0$ 取极小. 利用这个事实，可以推证下面的关于二次函数 J 取极小值的一个充分必要条件.

定理 6.4.1 设 A 对称，则下列两个条件等价：

(1) 有唯一的 $x_0 \in E^n$ 使 $Jx_0 = \min\limits_{x \in E^n} Jx$.

(2) A 正定，$x \in E^n$ 是方程 $Ax = b$ 的解.

这个定理告诉我们，在矩阵 A 对称正定的条件下，二次函数极值问题等价于解线性代数方程组问题. 这时，我们可以随意地将两个问题中的一个问题化为另一个问题. 然而，值得强调的是把解线性代数方程组问题化为二次函数极值问题的思想，并且将把这种思想推广于处理微分方程定解问题.

6.4.2 能量法

以线性微分方程齐次边值问题作为下面讨论的背景. 在此先举一个此类问题的简单例子.

例 6.4.2 二维泊松方程的狄利克雷问题：

$$\begin{cases} \Delta u = f, & 在 \Omega 中, \\ u = 0, & 在 \partial\Omega 上, \end{cases}$$

其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$，$\Omega$ 是 E^2 中的有界区域，$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界，f 是定义在 Ω 上的已知函数. 设 M 是 $C^2(\bar{\Omega})$ 中满足上述边界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 的全体函数构成的线性集合(即线性空间). 可以证明，M 在希尔伯特(Hilbert)空间 $L^2(\Omega)$ 中稠密. 这样，问题归结为在集合 M 上求线性算子 Δ 的方程 $-\Delta u = f$ 的解.

线性微分方程齐次边值问题的一般形式是

$$\left.\begin{aligned} &Lu = f &&，在 \Omega 中 \\ &l_j u = 0 \ (j = 1,2,\cdots,r) &&，在 \partial\Omega 上 \end{aligned}\right\} \tag{6.42}$$

其中 Ω 是 E^n 中的有界区域，L 与 $l_j(j=1,2,\cdots,r)$ 是线性微分算子.

每个线性微分方程齐次边值问题对应于某希尔伯特空间 H（例如 $L^2(\Omega)$）中的一个算子 A，其定义域 $D(A)$ 是 H 中的一个线性稠密集合，它由足够次连续可微且满足边界条件的函数组成，在 $D(A)$ 上，$Au=Lu$. 这样，求解边值问题化为在集 $D(A)$ 上求解算子方程 $Au=f$ 的问题.

现在，从上述背景中抽象出问题的一般提法：设 $D(A)$ 是实希尔伯特空间 H 中一线性稠密集合，算子 A 是从 $D(A)$ 到 H 中的映射，$f\in H$，在 $D(A)$ 上求解算子方程

$$Au=f, \tag{6.43}$$

也就是求 $u_0\in D(A)$，使得 $Au_0=f$ 成立. 关于这个问题，在 A 是严格正算子的条件下，有下列结论，其中定理 6.4.4 从形式到证明都与定理 6.4.1 极为相似.

定理 6.4.3 若 A 是严格正算子，则方程(6.43)在 $D(A)$ 上至多有一个解.

在下面的定理中，将要利用由算子 A 确定的如下形式的泛函 $J: u\mapsto Ju$，

$$Ju=\frac{1}{2}(Au,u)-(f,u), \tag{6.44}$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 是希尔伯特空间 H 中的内积. 显然，泛函 J 与算子 A 有相同的定义域 $D(A)$. 鉴于 A 是线性的，关系式

$$(A(au),au)=a^2(Au,u)$$

对一切实数 a 成立，便说 (Au,u) 是泛函 J 的二次项，并称 J 是一个**二次泛函**(quadratic functional). 比较式(6.40)与(6.44)，可以看出，二次泛函概念是二次函数概念的推广.

定理 6.4.4（二次泛函极小值定理） 设 A 是严格正算子，J 是由式(6.44)定义的泛函，则下列两个条件等价：

(1) $u_0\in D(A)$使 $Ju_0=\min\limits_{u\in D(A)} Ju$.

(2) $u_0\in D(A)$是方程(6.43)的解.

定理6.4.4提供的将解算子方程问题化为求二次泛函极值问题的方法称为**能量法**(energy method). 这是因为在力学、物理中，二次泛函 J 通常用来表示能量. 力学中的最小位能原理指出：受外力作用的弹性物体在适合已知边界条件的一切位移中，保持平衡时的位移使总位能

$$J=\text{应变能}-\text{已知外力所作的功}$$

为最小.

例6.4.5 考虑长为 l 的杆的挠度 $u: x\mapsto u(x)$ 所满足的微分方程

$$(EIu'')''=q,\qquad x\in(0,l),$$

其中 E 是弹性模量，I 是横截面关于弯曲轴的惯性矩，q 是荷载. 并且假设

$$E,I\in C^2[0,l],\quad q\in C[0,l],$$
$$E(x)>0,\ I(x)>0,\quad \forall\, x\in[0,l].$$

边界条件是

$$u(0)=u(l)=0,\quad u'(0)=u'(l)=0.$$

其中前两个条件说明杆的两端是固定的. 以上微分方程和边界条件构成一个边值问题，下面将它化为等价的变分问题.

选取空间 $H=L^2(0,l)$，线性集合

$$D(A)=\{u\in C^4[0,l]\mid u(0)=u(l)=u'(0)=u'(l)=0\}.$$

$D(A)$在 H 中稠密. 定义算子 $A: D(A)\to C[0,l]$为

$$Au=(EIu'')'',\quad \forall\, u\in D(A).$$

于是，原边值问题可以表成

$$Au=q,\qquad u\in D(A).$$

利用分部积分及边界条件可得

$$(Au,v)=\int_0^l (EIu'')''v\mathrm{d}x=\int_0^l EIu''v''\mathrm{d}x$$
$$=(u,Av),\qquad \forall\, u,v\in D(A),$$
即 A 在 $D(A)$ 上是自伴的. 另外,由在 $[0,l]$ 上 $E>0$ 和 $I>0$ 的假设推出

$$(Au,u)=\int_0^l EIu''^2\mathrm{d}x\geqslant 0,\qquad \forall\, u\in D(A),$$

而且若 $(Au,u)=0$,则在 $[0,l]$ 上 $u=0$. 这样,证明了 A 是 $D(A)$ 上的严格正算子. 因此可以应用定理 6.4.4,依据此定理,原边值问题等价于一个二次泛函 J 的极值问题,J 的定义如下:

$$Ju=\frac{1}{2}(Au,u)-(q,u)$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^l EIu''^2\mathrm{d}x-\int_0^l qu\mathrm{d}x.$$

在力学中,这里的 Ju 表示所考虑的杆对于确定的挠度 $u\in D(A)$ 的总位能,而杆的弹性位能与外力(荷载 q)所作的功分别为

$$\frac{1}{2}\int_0^l EIu''^2\mathrm{d}x,\quad \int_0^l qu\mathrm{d}x.$$

例 6.4.6 例 6.4.2 中的二维泊松方程的边值问题可以解释为:边界固定张力为 1 的薄膜,在荷载(单位面积所受的外力)f 的作用下,平衡位置(位移函数)u 所应满足的微分方程和边界条件.

取空间 $H=L^2(\Omega)$,线性集合

$$D(A)=\{u\in C^2(\bar{\Omega})\mid u|_{\partial\Omega}=0\},$$

$D(A)$ 在 H 中稠密. 定义 $D(A)$ 上的线性算子 A 为

$$Au=-\Delta u.$$

利用格林公式及边界条件得到

$$(Au,v)=-\iint_\Omega \Delta u\cdot v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= (u, Av), \qquad \forall\, u, v \in D(A).
\end{aligned}
$$

这说明 A 是自伴算子. 又

$$
(Au, u) = \iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0,
$$

$$
\forall\, u \in D(A),
$$

而且当 $(Au, u)=0$ 时可推出 $u=0$. 这样,证明了 A 是严格正算子. 因此,根据定理 6.4.4,所说的二维泊松方程的边值问题等价于一个泛函 J 的极值问题,J 的定义为

$$
\begin{aligned}
Ju &= \frac{1}{2}(Au, u) - (f, u) \\
&= -\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\Delta u \cdot u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Omega} fu\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Omega} fu\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

其中 Ju 是总位能,右端第一项和第二项分别是应变能和外力所作的功.

容易看出,上述 (Au, v) 确定了 $D(A)$ 上的一个实双线性泛函. 如果记这个双线性泛函为 $a(\cdot,\cdot)$,即

$$
\begin{aligned}
a(u, v) &= (Au, v) \\
&= \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

那么泛函 J 的定义可改写成

$$
Ju = \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u). \tag{6.45}
$$

6.4.3 虚功原理

对于从希尔伯特空间 H 的线性稠密集合 $D(A)$ 到 H 的一般线性算子 A,我们有下面的结论.

定理 6.4.7 下面两个条件等价：

(1) $u\in D(A)$ 使 $(Au,v)-(f,v)=0,\quad \forall\, v\in D(A)$.

(2) $u\in D(A)$ 是方程 $Au=f$ 的解.

方程

$$(Au,v)-(f,v)=0,\quad \forall\, v\in D(A),\tag{6.46}$$

通常称为**变分方程**(variation equation). 因为 (Au,v) 确定一个由算子 A 导出的双线性泛函，所以一般也将变分方程(6.46)写成如下形式：

$$a(u,v)-(f,v)=0,\quad \forall\, v\in D(A),\tag{6.47}$$

这里 $a(u,v)=(Au,v)$.

在力学中，变分方程(6.47)左端表示虚功，因此定理 6.4.7 也称为**虚功原理**(principle of virtual work). 虚功原理将解算子方程化为解变分方程，它比能量法更具有一般性，不仅适用于严格正算子方程，而且适用于非严格正算子方程.

例 6.4.8 设两点边值问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{du}{dx}\right)+qu=f, & x\in(a,b),\\ u(a)=0,\ u(b)=0, \end{cases}$$

其中 $p\in C^1[a,b]$, $q\in C[a,b]$, $f\in L^2[a,b]$, 且

$$p(x)>0,\ q(x)\geqslant 0,\ \forall\, x\in[a,b].$$

取 $H=L^2[a,b]$, 线性集合

$$D(A)=\{u\in C^2[a,b]\mid u(a)=u(b)=0\}.$$

A 是 $D(A)$ 上的线性算子，其定义为

$$Au=-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu.$$

利用分部积分及边界条件得到

$$\begin{aligned} a(u,v)&=(Au,v)\\ &=\int_a^b\left[-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+qu\right]v\,dx \end{aligned}$$

$$-\int_a^b\left[p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+quv\right]\mathrm{d}x,\quad \forall\, u,v\in D(A).$$

因此原边值问题化为如下变分问题:求 $u\in D(A)$,使得

$$a(u,v)-(f,v)=\int_a^b\left[p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+quv-fv\right]\mathrm{d}x=0,$$

$$\forall\, v\in D(A).$$

例 6.4.9 考虑二维泊松方程的一个混合边值问题:

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & (x,y)\in\Omega\\ u|_{\Gamma_1}=0, & \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)\Big|_{\Gamma_2}=0\end{cases}$$

其中 $\alpha\geqslant 0$,Γ_1 与 Γ_2 是域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 分成的互不相交的两个部分,见图 6.13. 取 $H=L^2(\Omega)$,线性集合

$$D(A)=\{u\in C^2(\Omega)\mid u|_{\Gamma_1}=0\}.$$

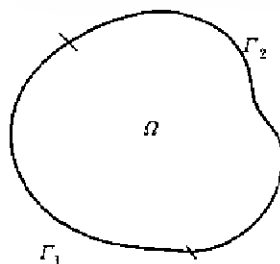


图 6.13

定义 $D(A)$上的线性算子 A 为

$$Au=-\Delta u.$$

利用格林公式和边界条件有

$$a(u,v)=(Au,v)=\iint_\Omega(-\Delta u)v\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Gamma_2}\alpha uv\mathrm{d}s,$$

$$\forall\, u,v\in D(A)$$

所以原混合边值问题等价于如下的变分问题：

求 $u\in D(A)$，使得

$$a(u,v)-(f,v)=\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-fv\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\Gamma_2}\alpha uv\mathrm{d}s=0,\qquad \forall v\in D(A).$$

在例 6.4.9 的混合边界条件中，利用数学物理方程的术语，$u|_{\Gamma_1}=0$ 属于第一边界条件；而 $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u\right)\Big|_{\Gamma_2}=0$，当 $\alpha\neq0$ 时属于第三边界条件，当 $\alpha=0$ 时属于第二边界条件，其中 n 是边界 Γ_2 的单位外法向，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 u 沿 n 的方向导数. 从上面的讨论看出，第一边界条件与第二、第三边界条件有重要差别. 变分问题只要求 u 满足在 Γ_1 上的第一边界条件，而它的解能自动满足在 Γ_2 上的第二或第三边界条件. 因此在变分原理中，通常称第一边界条件为**本质边界条件**(essential boundary condition)，称第二、三边界条件为**自然边界条件**(natural boundary condition).

6.4.4 广义解

前面定理 6.4.4 与定理 6.4.7 给出了两个变分原理，它们都是就线性集合 $D(A)$ 上的解建立了解算子方程问题与变分问题的等价性，但是都只是假定了在 $D(A)$ 上解是存在的. 我们所考虑的解算子方程 $Au=f$ 的问题一般是微分方程边值问题. 这时，算子 A 是某一种微分算子，它的定义域 $D(A)$ 自然是由具有一定可微次数的光滑函数组成的，可微次数的最小值等于微分算子 A 的阶数. 因此，边值问题在线性集合 $D(A)$ 上的解就是通常意义下的解. 如果边值问题在 $D(A)$ 上有解，一般称这种解为边值问题或其等价的变分问题的**古典解**(classical solution).

然而，一般地说，不能保证算子方程与变分问题在 $D(A)$ 上确

实有解. 比如,例 6.4.6 讨论的泊松方程

$$-\Delta u = f, \qquad (x,y) \in \Omega$$

在线性集合 $D(A)=\{u\in C^2(\bar{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega}=0\}$上的解,就是由

$$Ju = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Omega} fu\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定义的泛函 J 在 $D(A)$上的极值函数. 当 f 在 Ω 上不连续时,方程 $-\Delta u=f$ 在 $D(A)$上便没有解,因为对于任何 $u\in D(A)$都有 $\Delta u\in C(\Omega)$. 这时,根据定理 6.4.4,泛函 J 在 $D(A)$上的极小值问题也没有解. 从实际上来说,许多物理、力学现象,甚至必须用非光滑函数才能真实地加以描述,例如集中荷载下的平板弯曲,具有不同介质的弹性体的平衡等. 因此,在算子方程或变分问题在 $D(A)$上无解的情况下,一般做法是去开拓线性集合 $D(A)$,使得在开拓后的线性集合上相应的泛函极值问题或变分方程的解存在,并且转而去求这种解. 从例 6.4.5、例 6.4.6、例 6.4.8 和例 6.4.9 看出,将边值问题化为变分问题后,变分问题中的泛函或变分方程均为积分形式,由于经过分部积分,被积函数所含导数的阶数要比原微分方程的阶数低. 例如,例 6.4.9 中边值问题包含二阶导数,而变分方程只含一阶导数. 这样,为开拓线性集合 $D(A)$创造了条件,因为对于较低阶广义导数均为某种方次勒贝格可积的函数,泛函或变分方程中的积分均有意义. 也就是说,可以在包含 $D(A)$的某个索伯列夫(Соболев)空间的一个线性集合上,求泛函极值问题或变分方程的解. 这种解如果存在,它并不是原边值问题在古典意义下的解,称之为原边值问题的**广义解**(generalized solution)或**弱解**(weak solution).

为了考察边值问题广义解的存在性,需要引入满足较强条件的双线性泛函与算子.

定义 6.4.10 设 H 是实希尔伯特空间,$a(\cdot,\cdot)$是 $H\times H$ 上的连续双线性泛函. 如果存在常数 $\alpha>0$,成立

$$a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in H,$$

则称 $a(\cdot,\cdot)$ 是**H-椭圆的**(H elliptical)或**正定的**(positive definite).

定义 6.4.11 设 H 是实希尔伯特空间，$D(A)$ 是 H 中的线性稠密集合，A 是从 $D(A)$ 到 H 的线性算子. 如果存在常数 $\alpha>0$，使得

$$(Au,u) \geqslant \alpha |u|^2, \quad \forall u \in D(A),$$

则称算子 A 是**正定的**(positive definite).

显然，正定算子是比严格正算子更强的算子. 如果 A 是希尔伯特空间 H 上的正定算子，那么由 $a(u,v)=(Au,v)$ 确定的双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 是 H 椭圆的.

定理 6.4.12 设 H 是实希尔伯特空间，$a(\cdot,\cdot)$ 是 H-椭圆双线性泛函，$f\in H$，J 是 H 上的二次泛函，

$$Ju = \frac{1}{2}a(u,u) - (f,u).$$

则泛函 J 的极值问题：求 $u\in H$，使 $Ju=\min\limits_{v\in H}Jv$ 与解变分方程问题：求 $u\in H$，使 $a(u,v)-(f,v)=0$，$\forall v\in H$ 等价.

这个定理告诉我们，在定理的假设下，只须考虑变分方程解的存在性. 这时，有下面的一般结论.

定理 6.4.13(拉克斯-米尔格拉姆(Lax Milgram)定理) 设 H 是实希尔伯特空间，$a(\cdot,\cdot)$ 是 H 椭圆双线性泛函，$f\in H$，则存在唯一的元素 $u\in H$，使得

$$a(u,v)-(f,v)=0, \quad \forall v \in H.$$

因此，在实际处理问题时，可先用在集合 $D(A)$ 上求解算子方程 $Au=f$ 来描述边值问题，然后再将算子方程化为变分方程 $a(u,v)-(f,v)=0$. 当满足定理 6.4.13 的假设时，变分方程便有唯一解. 如果变分方程的解不属于 $D(A)$，而属于开拓后的空间 H，那么它就是边值问题的广义解. 下面举两个例子，应用定理

6.4.13，分析边值问题广义解的存在性.

例 6.4.14 考虑例 6.4.8 中的两点边值问题，在那里已经得到相应的变分方程

$$a(u,v)-(f,v)=\int_a^b\left[p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-quv-fv\right]\mathrm{d}x=0.$$

设 $I=[a,b]$. 容易看出，当 $p,q\in L^\infty(I)$，$f\in L^2(I)$ 时，$a(u,v)$ 和 (f,v) 在索伯列夫空间 $H_0^1(I)$ 中仍有意义，因此可以在 $H=H_0(I)$ 上讨论变分方程的解. 进一步假设函数 p,q 还满足条件

$$p(x)\geqslant p_0>0,\quad q(x)>0,\quad \forall\, x\in I,$$

其中 p_0 是常数. 这时，经推证可得

$$\begin{aligned}a(u,u)&=\int_a^b\left[p\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2+qu^2\right]\mathrm{d}x\\&\geqslant p_0\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\alpha\|u\|_{H^1(I)}^2,\qquad\forall\, u\in H_0(I)\end{aligned}$$

其中

$$\alpha=\min\left\{\frac{p_0}{2},\frac{p_0}{2(b-a)^2}\right\}>0.$$

这说明 $a(\cdot,\cdot)$ 是 H 椭圆的. 根据定理 6.4.13，所讨论的变分方程在 $H_0^1(I)$ 上有唯一解，即在例 6.4.8 中的两点边值问题在 $H_0^1(I)$ 上有唯一的古典解或广义解.

例 6.4.15 考虑例 6.4.2 中的二维泊松边值问题. 由例 6.4.6 知道相应的变分方程为

$$a(u,v)-(f,v)=\iint_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-fv\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

可以建立不等式

$$\begin{aligned}a(u,u)&=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\|u_x\|^2+\|u_y\|^2\\&\geqslant\alpha\|u\|_{H_0(\Omega)}^2,\quad\forall\, u\in H(\Omega),\end{aligned}$$

其中 $\alpha>0$ 是与 u 无关的常数，这说明 $a(\cdot,\cdot)$ 是 H-椭圆的. 因此变分方程在 $H^1(\Omega)$ 中有唯一的解.

6.5 里茨-伽辽金方法

6.5.1 变分原理常用的近似解法

本节介绍如何求解相应的变分问题.

用 H 表示 H^m、H_0^m 等索伯列夫空间，$D(A)$ 是 H 中的线性集合，边值问题是在 $D(A)$ 上求算子方程 $Au=f$ 的解(古典解或广义解). 设 $a(u,v)$ 是由 (Au,v) 经过分部积分后得到的，如此确定一个双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$. 应当注意，对于 (Au,v) 来说，$u,v\in D(A)$，分部积分时能利用边界条件；而所得出的 $a(u,v)$ 的表达式则对 $u,v\in H$ 均有意义. 由前一节知道，边值问题有两种变分形式. 边值问题的一种变分形式是：

求 $u\in H$，使 $Ju=\min\limits_{v\in H}Jv$，其中 J 是二次泛函，

$$Ju=\frac{1}{2}a(u,u)-(f,u), \tag{6.48}$$

这是从能量法得到的. 边值问题的另一种变分形式是：

求 $u\in H$，使 $\quad a(u,v)=(f,v),\quad \forall v\in H,\qquad (6.49)$

这是从虚功原理得到的.

变分问题(6.48)与(6.49)的主要困难是在无穷维空间 H 进行考察，分别求泛函的极小值与求变分方程的解. 除少数特殊情况外，一般不可能求得问题的准确解. 因此需要建立近似的数值解法. 里茨-伽辽金方法是变分原理最常用最重要的一种近似解法，它也是求偏微分方程数值解的有限元法的基础.

里茨-伽辽金方法先后由瑞士数学家 W. Ritz 和前苏联数学家 Б. Г. Галеркин 提出，他们共同的基本思想在于用有限维空间近似代替无穷维空间，把无穷维空间上的变分问题化为有限维空间

上的变分问题，从而求出问题的近似解. 里茨法的一般原理已在6.3中介绍过，将它应用于变分问题(6.48)，可把问题化成求多元二次函数的极值问题. 伽辽金法则从变分问题(6.49)出发，把问题化为求线性代数方程组的解. 两个方法出发点不同，里茨法基于能量法，而伽辽金法基于虚功原理，但两者最后导出的求解过程和近似解均完全相同. 不过，因虚功原理比能量法更具一般性，因而伽辽金法比里茨法应用更广，推导也更直接. 当边值问题中的算子 A 是自伴正定时，$a(u,v)$ 是 H 椭圆的，里茨法与伽辽金法是一致的.

在下面的讨论中，设

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$$

是在空间 H 中选取的线性无关的函数列，H_n 是以 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 为基函数的 H 的 n 维子空间. 里茨法与伽辽金法都是在 H_n 上求变分问题形如

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \tag{6.50}$$

的近似解，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是待定常数. 关键是如何选取函数列 $\{\varphi_i\}$，它确定了如何选取有限维空间 H_n.

6.5.2 里茨法的应用及伽辽金法

现在将6.3中的里茨法应用于变分问题(6.48). 考虑变分问题(6.48)在 H 的 n 维子空间 H_n 上的形式为(6.50)的近似解. 具体地说，就是要确定系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使得

$$Ju_n = \min, \quad 在 H_n 上. \tag{6.51}$$

由于 $a(\cdot,\cdot)$ 是双线性泛函，故有

$$Ju_n = \frac{1}{2} a\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j\right) - \left(f, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a(\varphi_i,\varphi_j)\alpha_i\alpha_j - \sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\alpha_i,$$

这是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的二次函数. 使 Ju_n 取极小值的必要条件是

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k}Ju_n = 0, \quad k = 1,2,\cdots,n.$$

由此得到 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i,\varphi_k)\alpha_i = (f,\varphi_k), \quad k = 1,2,\cdots,n. \qquad (6.52)$$

这是一个线性代数方程组,其系数矩阵

$$G = \begin{bmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & a(\varphi_2,\varphi_1) & \cdots & a(\varphi_n,\varphi_1) \\ a(\varphi_1,\varphi_2) & a(\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & a(\varphi_n,\varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a(\varphi_1,\varphi_n) & a(\varphi_2,\varphi_n) & \cdots & a(\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix}.$$

假设边值问题的算子 A 是自伴正定的,则由 A 导出的双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ **是对称的**(symmetric),即

$$a(u,v) = a(v,u), \quad \forall\, u,v \in H,$$

于是

$$a(\varphi_i,\varphi_j) = a(\varphi_j,\varphi_i), \quad i,j = 1,2,\cdots,n,$$

即 G 是对称矩阵;这时,$a(\cdot,\cdot)$ 还是 H 椭圆的,由定义 6.4.10,存在常数 $\alpha>0$,使得对任何非零向量 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^T$,二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a(\varphi_i,\varphi_j)\alpha_i\alpha_j = a\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j\right)$$

$$= a(u_n,u_n) \geqslant \alpha \| u_n \|^2 > 0,$$

这说明矩阵 G 还是正定的. 因此,当 A 自伴正定时,方程组(6.52)必有唯一解 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,代入式(6.50),便得变分问题(6.48)的近似解 u_n. 由于在 H_n 的所有元素中,u_n 使 J 达极小值,因而用里茨法求得的 u_n 在空间 H_n 中是最佳的.

伽辽金法是对变分问题(6.49)去求形如式(6.50)的近似解.

也就是说，要确定系数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得 u_n 满足

$$a(u_n,v)=(f,v),\qquad \forall\, v\in H_n. \tag{6.53}$$

注意到任一 $v\in H_n$ 可表示为

$$v=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i,$$

因此条件(6.53)等价于方程组

$$a(u_n,\varphi_i)=(f,\varphi_i),\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

这与里茨法导出的方程组(6.52)相同. 于是，通常称方程组(6.52)为**里茨-伽辽金方程**.

例 6.5.1 用里茨-伽辽金法解边值问题

$$\begin{cases} u''+u=-x, & 0<x<1,\\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}$$

这时，双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 定义为

$$\begin{aligned} a(u,v)&=(u''+u,v)=\int_0^1(u''+u)v\mathrm{d}x\\ &=u'v\big|_0^1-\int_0^1u'v'\mathrm{d}x+\int_0^1uv\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

记 $I=[0,1]$，于是对任何函数 $u,v\in H_0^1(I)$，$a(u,v)$ 均有意义，而且

$$a(u,v)=\int_0^1(-u'v'+uv)\mathrm{d}x.$$

现在 $H=H_0^1(I)$，从中选取一族基函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots$，我们取 φ_i 为代数多项式. 为使 φ_i 满足边界条件，令

$$\varphi_i(x)=x^i(1-x),\qquad i=1,2,\cdots.$$

以 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 为基生成的子空间就是 n 维空间 H_n. 于是，$u_n\in H_n$ 有

$$\begin{aligned} u_n(x)&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)\\ &=x(1-x)(\alpha_1+\alpha_2x+\cdots+\alpha_nx^{n-1}). \end{aligned}$$

当 $n=1$ 时，$u_1(x)=\alpha_1 x(1-x)$. 由式(6.52)，里茨-伽辽金方程为

$$\alpha_1\int_0^1[(1-2x)^2+x^2(1-x)^2]\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x.$$

由此算出 $\alpha_1=\frac{5}{18}$，从而

$$u_1(x)=\frac{5}{18}x(1-x).$$

当 $n=2$ 时，$u_2(x)=x(1-x)(\alpha_1+\alpha_2 x)$. 由式(6.52)，经计算，得里茨-伽辽金方程

$$\begin{cases}\frac{3}{10}\alpha_1+\frac{3}{20}\alpha_2=\frac{1}{12},\\ -\frac{3}{20}\alpha_1-\frac{13}{105}\alpha_2=-\frac{1}{20}.\end{cases}$$

由此解得 $\alpha_1=\frac{71}{369}$，$\alpha_2=\frac{7}{41}$，于是

$$u_2(x)=x(1-x)\left(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x\right).$$

所讨论的边值问题的精确解为

$$u(x)=\frac{\sin x}{\sin 1}-x.$$

为了比较，下面列出精确解 u 与近似解 u_1 及 u_2 在 $x=\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}$ 的函数值：

x	$u(x)$	$u_1(x)$	$u_2(x)$
$\frac{1}{4}$	0.044	0.052	0.044
$\frac{1}{2}$	0.070	0.069	0.069
$\frac{3}{4}$	0.060	0.052	0.060

这是一个简单的例子. 这个例子基函数 φ_i 的另一种选取是二

角函数：

$$\varphi_i(x)=\sin(i\pi x),\qquad i=1,2,\cdots.$$

里茨法能用于解自伴正定微分算子方程，而伽辽金法则可解更一般的微分算子方程.下面举一个例子.

例 6.5.2 两点边值问题

$$\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+r\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+qu=f, & a<x<b,\\ u(a)=0, \quad u'(b)=0,\end{cases}$$

其中 $p\in C^1(I)$，$p(x)\geqslant p_0>0(\forall x\in I)$，$r,q\in C(I)$，$f\in L^2(I)$，而 $I=[a,b]$. 利用分部积分和边界条件推出相应的双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 为

$$a(u,v)=\int_a^b\left[p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v+quv\right]\mathrm{d}x.$$

由此可知，除非 $r=0,q\geqslant0$，否则 $a(\cdot,\cdot)$ 非对称正定. 因此一般不能用里茨法解本例中的边值问题，但能够应用伽辽金法，并且仍然导出形如(6.52)的方程组.

6.5.3 里茨-伽辽金法的收敛性

前面已经指出，对于自伴正定微分算子方程，里茨法与伽辽金法是一致的. 下面给出一个收敛性与误差估计的结论. 至于对更一般的微分算子方程，伽辽金法的收敛性及误差估计，情况则比较复杂，这里不予介绍.

定理 6.5.3 设双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 对称正定，u 是变分问题(6.48)或(6.49)的解，而 u_n 是里茨-伽辽金方程(6.52)导出的解，则有如下误差估计式：

$$\|u-u_n\|_H\leqslant\beta\inf_{v\in H_n}\|u-v\|_H,$$

其中 $\beta>0$ 是与 u,n 无关的常数，$\inf\limits_{v\in H_n}\|u-v\|_H$ 是 u 和子空间 H_n 的距离. 如果选取的函数列 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在空间 H 中是**完全的**(com

plete)，即 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots$ 的线性组合全体在 H 中稠密，则

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_H=0.$$

从 6.1 到此，主要讨论了形如(6.42)的线性微分方程齐次边值问题的变分原理，以及应用里茨-伽辽金法求相应变分问题的近似解. 线性微分方程非齐次边值问题的一般形式是

$$\left.\begin{aligned}&Lu=f &&\text{在 }\Omega\text{ 中},\\&l_ju=g_j\quad(j=1,2,\cdots,r)&&\text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\end{aligned}\right\}\tag{6.54}$$

其中 Ω 是 E^n 中的有界区域，L 与 $l_j(j=1,2,\cdots,r)$ 是线性微分算子，$g_j(j=1,2,\cdots,r)$ 是定义在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的已知函数. 一般，可以把非齐次边值问题化为齐次边值问题来处理. 事实上，满足(6.54)中的边界条件的函数有时是比较容易找到的，如果 u_0 是在 Ω 中足够光滑且满足(6.54)中边界条件的函数，那么非齐次边值问题(6.54)等价于如下齐次边值问题

$$\left.\begin{aligned}&Lv=f-Lu_0, &&\text{在 }\Omega\text{ 中},\\&l_jv=0\quad(j=1,2,\cdots,r), &&\text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\end{aligned}\right\}\tag{6.55}$$

其中 $v=u-u_0$.

例 6.5.4 非齐次两点边值问题

$$\begin{cases}Lu=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+qu=f, & a<x<b,\\ u(a)=\alpha,\ u'(b)=\beta.\end{cases}$$

设 u_0 是满足条件

$$u_0(a)=\alpha,\qquad u_0'(b)=\beta$$

的任一函数，比如

$$u_0(x)=\alpha+\frac{\beta(x-a)^2}{2(b-a)}.$$

又令 $v=u-u_0$. 于是，上述非齐次两点边值问题等价于如下齐次两点边值问题

$$\begin{cases} Lv = f - Lu_0, & a < x < b, \\ v(a) = 0, \ v'(b) = 0. \end{cases}$$

从例 6.4.8 已知

$$a(u,v) = \int_a^b \left[p \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + quv \right] \mathrm{d}x,$$

特别

$$\begin{aligned} a(v,v) &= a(u - u_0, u - u_0) \\ &= a(u,u) + a(u_0,u_0) - 2a(u,u_0). \end{aligned}$$

又利用分部积分，

$$\begin{aligned} (f - Lu_0, v) &= (f,v) - \int_a^b Lu_0 v \mathrm{d}x \\ &= (f,v) + p(b)\beta v(b) - a(u_0,v) \\ &= (f,u) - (f,u_0) + p(b)\beta u(b) - p(b)\beta u_0(b) \\ &\quad - a(u_0,u) + a(u_0,u_0). \end{aligned}$$

因此

$$\mathcal{J}v = \frac{1}{2}a(v,v) - (f - Lu_0, v) = Ju - Ju_0,$$

其中

$$Ju = \frac{1}{2}a(u,u) - (f,u) - p(b)\beta u(b).$$

由于 Ju_0 是常数，$\mathcal{J}v$ 取极小值当且仅当 Ju 取极小值，从而所考虑边值问题的一种变分形式是：

求 $u \in H^1(I)$，$u(a) = \alpha$，使得

$$Ju = \min_{\substack{w \in H^1(I) \\ u(a) = \alpha}} Jw,$$

这里 $I = [a,b]$. 由于对任何 $w \in H^1(I)$，$w(a) = 0$，有

$$a(v,w) = a(u,w) - a(u_0,w),$$

$$(f - Lu_0, w) = (f,w) + p(b)\beta w(b) - a(u_0,w),$$

因而，所考虑边值问题的另一种变分形式是：

求 $u \in H^1(I)$，$u(a)=\alpha$，使得

$$a(u,w)=(f,w)+p(b)\beta w(b), \quad \forall w \in H^1(I), w(a)=0.$$

现设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 是 $H^1(I)$ 的 n 维子空间 H_n 的基函数，并且满足

$$\varphi_i(a)=0, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

本质边界条件 $u(a)=\alpha$ 齐次化后，u_n 形如

$$u_n(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x),$$

其中 u_0 是满足 $u_0(a)=\alpha$ 的任一已知函数．同时，任一函数 $w \in H_n$ 可表示为

$$w=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i.$$

因此上述两种形式的变分问题共同的里茨-伽辽金方程为

$$\sum_{i=1}^{n}a(\varphi_i,\varphi_k)\alpha_i=(f,\varphi_k)+p(b)\beta\varphi_k(b)-a(u_0,\varphi_k),$$

$$k=1,2,\cdots,n.$$

从这个例子可以看出，当我们把里茨-伽辽金方程应用于非齐次边值问题时，要根据自然边界条件和本质边界条件分别作不同的处理．对于非齐次自然边界条件，只要适当修改里茨-伽辽金方程右端常数项，而不必对基函数加以任何限制．对于非齐次本质边界条件，应对它进行齐次化后再用里茨-伽辽金法，这时对基函数会带来一定的限制，以保证满足本质边界条件．

6.5.4 里茨法在特征值计算中的应用

设 A 是空间 H 的一个线性稠密集合 $D(A)$ 上的线性算子．考虑在 $D(A)$ 上求解如下算子方程：

$$Au-\lambda u=0. \tag{6.56}$$

定义 6.5.5 如果数 λ 使式(6.56)有非零解 u，则称 λ 为算子 A 的**特征值**(eigenvalue)，称 u 为相应于 λ 的**特征函数**(eigenfunc

t.on).

依上，如果 λ_0 是算子 A 的特征值，u_0 是相应于 λ_0 的特征函数，则

$$Au_0 - \lambda_0 u_0 = 0$$

成立. 在此等式两端对 u_0 作内积，可得

$$\lambda_0 = \frac{(Au_0, u_0)}{(u_0, u_0)}. \tag{6.57}$$

这是算子 A 的任一特征值 λ_0 与相应特征函数 u_0 所应满足的必要条件. 这个事实使我们能够将算子 A 的特征值问题与如下泛函 R 联系起来：

$$R: u \mapsto R(u), \quad R(u) = \frac{a(u,u)}{(u,u)}, \ u \neq 0, \tag{6.58}$$

其中 $a(\cdot,\cdot)$ 是由算子 A 确定的双线性泛函，$a(u,u)=(Au,u)$. 而且，当算子 A 满足一定条件时，可利用泛函 R 求解 A 的某些特征值.

定义 6.5.6 设 A 是从 $D(A)$ 到 H 的线性算子. 如果存在常数 α（可正可负或为零），使得

$$(Au,u) \geqslant \alpha \| u \|^2, \quad \forall u \in D(A),$$

则称 A **是下有界的**(bounded below).

显然，任何正算子、正定算子都是下有界的.

设 A 是 $D(A)$ 上的下有界算子，成立在定义 6.5.6 中的不等式. 则有如下性质：

(1) 对于任一常数 $c > |\alpha|$，算子 $A+cI$ 是 $D(A)$ 上的一个正定算子，这里 I 是单位算子. 而且，λ 是 A 的特征值与 u 是相应于 λ 的特征函数$\Leftrightarrow \lambda+c$ 是 $A+cI$ 的特征值与 u 是相应于 $\lambda+c$ 的特征函数. 这个事实说明，下有界算子的特征值问题，可以化为正定算子的特征值问题. 因此，在考虑特征值问题时，可以不去区分下有界算子和正定算子.

(2) 由式(6.58)定义的泛函 R 满足

$$R(u)=\frac{(Au,u)}{\|u\|^2}\geqslant\alpha,\quad\forall u\in D(A),\quad u\neq 0,$$

因此存在

$$d=\inf_{\substack{u\in D(A)\\ u\neq 0}} R(u)\geqslant\alpha.\tag{6.59}$$

关于自伴算子的特征值问题，有一些基本结论. 如果 A 是自伴算子，则 A 的特征值都是实数，而且相应于不同特征值的特征函数相互正交. 这时，对一切 $u\in D(A)$，(Au,u) 是实数；由 A 导出的双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称的.

在有限空间中，线性算子 A 的特征值问题，就是 A 所对应的矩阵的特征值问题.

对于下有界自伴算子有下面的结论.

定理 6.5.7 设 A 是下有界自伴算子，且有 $u_0\neq 0$，$u_0\in D(A)$，使得

$$R(u_0)=d,$$

这里 R 和 d 分别由(6.58)与(6.59)的定义，则 d 是 A 的最小特征值，u_0 是相应于 d 的特征函数.

这个定理使我们能把下有界自伴算子 A 的最小特征值的计算归结为求解变分问题，即求解泛函 R 的极小值. 假定由 A 导出的双线性泛函 $a(\cdot,\cdot)$ 使得泛函 R 在整个希尔伯特空间 H 上有定义，变分问题的具体形式是：

求 $u\in H$，使 $$\frac{a(u,u)}{(u,u)}=\min_{\substack{v\in H\\ v\neq 0}}\frac{a(v,v)}{(v,v)},$$

或者

求 $u\in H$，$(u,u)=1$，使 $$a(u,u)=\min_{\substack{v\in H\\ \|v\|=1}} a(v,v),\tag{6.60}$$

即在条件 $(u,u)=1$ 求泛函 R 的极小值.

现在应用里茨法于式(6.60). 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 是 H 的 n 维子

空间 H_n 中的基函数，$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$. 我们的问题是在条件

$$(u_n, u_n) = \sum_{i,j=1}^{n} (\varphi_i, \varphi_j) \alpha_i \alpha_j = 1 \tag{6.61}$$

下，确定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使得

$$a(u_n, u_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j) \alpha_i \alpha_j \tag{6.62}$$

达最小值. 为达到此目的，可用拉格朗日乘数法. 作函数 Φ，

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = a(u_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n),$$

其中 λ 是待定常数. 使 Φ 达极小值的必要条件是

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^{n} [a(\varphi_i, \varphi_k) - \lambda(\varphi_i, \varphi_k)] \alpha_i = 0,$$

$$k = 1, 2, \cdots, n.$$

这是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性齐次方程组，条件(6.61)要求这个方程组有非零解，因此其系数行列式必须为零，即

$$\begin{vmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & a(\varphi_n, \varphi_1) - \lambda(\varphi_n, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2) - \lambda(\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_n, \varphi_2) - \lambda(\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a(\varphi_1, \varphi_n) - \lambda(\varphi_1, \varphi_n) & \cdots & a(\varphi_n, \varphi_n) - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{6.63}$$

(6.63)是 λ 的 n 次代数方程，它有 n 个根，可以将其最小根作为算子 A 最小特征值的近似值.

下面的定理表明，除最小特征值外，算子 A 的其它特征值也可以归结为变分问题.

定理 6.5.8 设 A 是下有界自伴算子，$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ 是 A 的前 n 个特征值，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是分别相应于它们的规范正交特征函数，而且存在 $u_{n+1} \neq 0$，$u_{n+1} \in U$，使得

$$a(u_{n+1}, u_{n+1}) = \min_{u \in U} a(u, u),$$

这里

$$U_n=\{u\in H\mid (u,u)=1,(u,u_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,n\}.$$

则 u_{n+1} 是算子 A 的特征函数，它相应于特征值

$$\lambda_{n+1}=a(u_{n+1},u_{n+1})=(Au_{n+1},u_{n+1}).$$

这是 A 的除 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 之外的最小特征值.

如果利用里茨法根据定理 6.5.8 来求算子 A 的最小特征值之外的特征值，那么这些特征值所满足的方程仍为(6.63)．因此将(6.63)的根按大小排列起来便依次是算子 A 的从小到大的特征值的近似值，不过非最小的特征值的近似值的精度一般很差.

更一般的特征值问题是求使得算子方程

$$Au-\lambda Bu=0 \tag{6.64}$$

有非零解的数 λ(特征值)及其相应的非零解 u(特征函数)．前面从(6.56)出发引出了一些结果，现在从(6.64)出发可以引出完全类似的结果.

设 A 是定义在 $D(A)$ 上的下有界自伴算子，B 是定义在 $D(B)$ 上的正定算子，而且 $D(A)\subset D(B)$．这时，(6.64)的任何两个相应于不同特征值的特征函数 u_i 与 u_j 满足

$$(Bu_i,u_j)=0,$$

称为 u_i 与 u_j 是广义正交的.

定理 6.5.9 设 A 是下有界自伴算子，B 是正定算子，记

$$d=\inf_{u\neq 0}\frac{(Au,u)}{(Bu,u)},$$

而且存在 $u_0\neq 0$，使得

$$\frac{(Au_0,u_0)}{(Bu_0,u_0)}=d,$$

则 d 是(6.64)的最小特征值，u_0 是对应于 d 的特征函数.

定理 6.5.10 设 A 是下有界自伴算子，B 是正定算子，$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 是(6.64)的前 n 个特征值，$u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是分别相应于它

们的特征函数,而且存在 $u_{n+1}\neq 0$, $u_{n+1}\in U$,使得

$$\frac{(Au_{n+1},u_{n+1})}{(Bu_{n+1},u_{n+1})}=\min_{u\in U}\frac{(Au,u)}{(Bu,u)},$$

这里

$$U=\{u\mid (Bu,u_i)=0,\quad i=1,2,\cdots,n\}.$$

则 u_{n+1}是(6.64)的特征函数,它相应于特征值

$$\lambda_{n+1}=\frac{(Au_{n+1},u_{n+1})}{(Bu_{n+1},u_{n+1})},$$

这是(6.64)的除 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 之外的最小特征值.

根据定理 6.5.9 与定理 6.5.10,用里茨法求解(6.64)的特征值,可推出方程

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1,\varphi_1)-\lambda(B\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_1)-\lambda(B\varphi_n,\varphi_1) \\ (A\varphi_1,\varphi_2)-\lambda(B\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_2)-\lambda(B\varphi_n,\varphi_2) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (A\varphi_1,\varphi_n)-\lambda(B\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & (A\varphi_n,\varphi_n)-\lambda(B\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix}=0 \tag{6.65}$$

的根就是(6.64)的特征值的近似值,其中 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 是空间 H 的 n 维子空间 H_n 中的基函数.

例 6.5.11 设有长度为 1 的弦,其振动方程为

$$(1+x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

求两端固定时的振动频率.设解为

$$u(x,t)=v(x)\sin\omega t,$$

于是问题化为求如下问题的固有值:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}+\lambda(1+x)v=0,\\ v(0)=v(1)=0,\end{cases}$$

这里 $\lambda=\dfrac{\omega^2}{T}$.取基函数为

$$\sin \pi x, \sin 2\pi x, \cdots, \sin n\pi x, \cdots,$$

令

$$u(x) = \alpha_1 \sin \pi x + \alpha_2 \sin 2\pi x,$$

用式(6.65)得方程

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\pi^2}{2} + \dfrac{3}{4}\lambda & -\dfrac{8\lambda}{9\pi^2} \\ -\dfrac{8\lambda}{9\pi^2} & -2\pi^2 + \dfrac{3}{4}\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

其解为

$$\lambda_1 = 6.54816, \quad \lambda_2 = 26.83.$$

最后，应指出，传统的里茨-伽辽金法一般选代数多项式或三角函数多项式为基函数，造成在实际应用中会出现许多原则性的困难．一方面，除特别规则的区域外，要保证满足边界条件是困难的．另一方面，里茨-伽辽金方程的形成要计算大量的积分，而且解这种方程会出现数值不稳定，无论是计算量还是存储量都大得惊人．但是，50年代发展起来的有限元法，提供了选取基函数的新方法，克服了传统的里茨-伽辽金法的困难．

参考文献

1. 艾利斯哥尔兹，Л.Э. 著，李世晋译．变分法．人民教育出版社，1958
2. 加藤敏夫著，周怀生译．变分法及其应用．上海科学技术出版社，1961
3. 李荣华，冯果忱．微分方程数值解法．人民教育出版社，1980
4. 复旦大学数学系．数学物理方程．上海科学技术出版社，1960

7 数学模型

近几十年来，随着科学技术特别是计算机科学的不断进步，数学的应用不仅在它的传统领域，即所谓物理领域（力学、电学及土木、机电、化工等工程技术）中取得了许多重要进展，而且迅速地进入了新领域，即所谓非物理领域（如人口、经济、交通、医学、生态、社会等）。把数学方法应用到任何一个实际问题中去，往往首先是把这个问题的内在规律用数学符号、表达式或者数字、图形表示出来，然后经过数学的处理，得出供人们作分析、预报、决策或者控制的定量结果。这个过程就是通常所说的**建立数学模型**（mathematical modelling），以下简称建模。

建模一般说来有机理分析、数据分析等方法。前者根据客观事物本身的性质，分析因果关系，在适当的简化假设下，利用合适的数学工具得到描述其特征的数学模型；后者把研究对象视为一个系统，对实际的或模拟的输入和输出数据，主要用统计方法进行分析，从而确定系统的结构和参数，称为**系统辨识**（system identification）。对于某些实际问题还常把两种方法结合起来，用机理分析确定系统的结构，用数据分析确定系统的参数。

7.1 数学模型概述

人们常把所研究的现实世界中的某一特定对象称作原型，而把为便于观察、研究原型所做出的模拟物称作模型。**数学模型**（mathematical model）则是为了一个特定目的，根据原型的内在规律，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一

个抽象的数学结构.它可以包含固定参数、变量和由它们组成的数学表达式,以及逻辑表述、数据、图表等.

数学模型是运用数学的语言和工具对原型所包含的信息(如现象、数据等)加以翻译与归纳的产物,它源于现实,又高于现实.模型经过演绎、推断,给出数学上的分析、预报、决策或控制,再经过解释回到原型.最后,这些结果必须经受实际的检验,完成实践—理论—实践这一循环.不符合实际的模型必须重新建立.这个过程由图 7.1 所示.

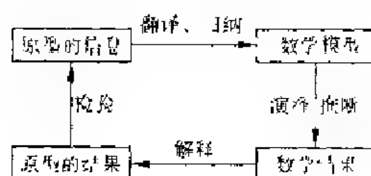


图 7.1

7.1.1 建模的目的和步骤

建模的目的通常是下列情形中的一种或几种:

(1) 分析、解释某个特定的现象;

(2) 确定、计算某个系统的结构和参数;

(3) 预报某个过程的未来状态和取值;

(4) 提供在一定意义下的最优决策;

(5) 为某个过程制订最优控制方案.

由于实际问题的复杂性,难以对建模归纳出一套完美的格式.目前建模过程大体上遵循以下步骤,其示意如图 7.2:

(1) 模型准备:了解问题的实际背景,明确建模目的,掌握原型的各种信息,弄清原型的特征.

(2) 模型假设:根据原型的特性和建模目的,对问题进行必

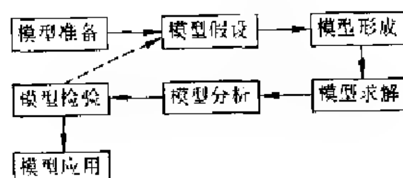


图 7.2

要的简化，设定变量和参数，并用精确的语言作出假设.

(3) 模型形成：根据所作的假设，按照原型服从的物理定律或其它客观规律，建立变量和参数间的数学表达式，列出表格、画出图形、写出逻辑表述或其它数学结构.

(4) 模型求解．运用适当的数学工具求解，必要时研究解的存在性、唯一性、对数据的连续依赖性等.

(5) 模型分析：根据求解结果分析各变量间的依赖关系或稳定性态，给出数学上的预报、决策或控制.

(6) 模型检验：把数学分析的结果"翻译"回到原型中，用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性．如果检验结果不符合或部分不符合实际情况，并且肯定在模型求解中没有失误，通常应该修改、补充假设，重新建模.

(7) 模型应用：如果检验结果满意，则可按照问题的性质和建模的目的应用该模型.

7.1.2 模型的分类

根据对模型中诸因素侧重点的不同，有以下各种分类：

(1) 按照变量、参数和表达式的状况分为离散模型和连续模型；确定性模型和随机性模型；线性模型和非线性模型.

(2) 按照时间变化对模型的影响分为静态模型和动态模型；参数定常模型和参数时变模型.

(3) 按照对象结构的自由度分为集中参数模型和分布参数模型.

(4) 按照对问题的了解程度分为白箱模型、灰箱模型和黑箱模型.

(5) 根据对象所属的领域有人口模型、经济模型、交通模型、医学模型、生态模型、社会模型等.

7.1.3 系统辨识

对于一些影响因素众多、机理比较复杂的生产过程、生理反应、自然或社会现象,如高炉炼铁的炉温控制,药物在人体器官中的转移和排除,气象、水文预报,股票价格的预测等,用机理分析方法建模,特别是确定模型中的参数,常常是困难的. 系统辨识是解决这类问题的有效方法.所谓辨识是把所研究的系统视作一个黑箱,在输入和输出数据的基础上,从一类系统中确定一个与所测系统等价的系统,其基本步骤如图 7.3 所示.

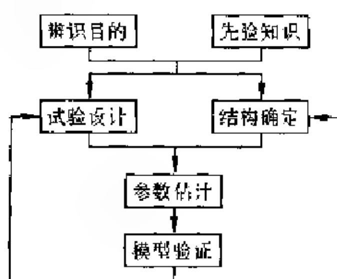


图 7.3

首先根据辨识目的(如验证理论、估计参数、控制、预报、监视……)和先验知识(如线性性、时变性、延迟、噪声类型……)进行试验设计和结构确定.试验设计要确定用什么样的输入信号,试验的持续时间,数据采样间隔,输入的方式等,设计准则是在给定的

限制条件下，通过试验获得尽可能多的信息. 伪随机信号是经常采用的输入信号. 所谓结构确定则要求给出：模型是线性或非线性，参数定常或时变，以及线性模型的阶次（阶次也可由参数估计算法确定）.

参数估计是辨识的中心环节，有离线和在线两种方式. 离线采用数据批处理形式，可选择输入信号，计算精度较高；在线方式不需要特定的输入，要求递推算法、数据储存量较小. 对于线性系统，参数估计算法很多，频率响应、脉冲响应、阶跃响应、相关法等属于古典方法，参数是离线的. 在近代方法中，属于离线的有最小二乘法、广义最小二乘法、极大似然法、工具变量法、梯度法等；属于在线的有递推最小二乘法、递推广义最小二乘法、递推极大似然法、随机逼近法等. 计算准则是在某种意义下使系统和模型的输出误差（或方程误差）达到最小，图 7.4 表示了其中的一种情况.

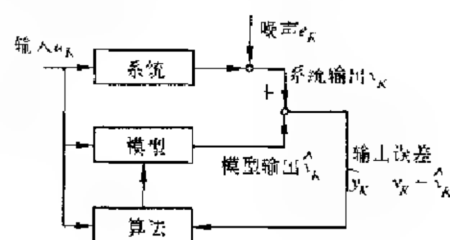


图 7.4

非线性系统的辨识方法目前尚不够成熟. 当非线性形式已经确定时可用非线性最小二乘法. 一般有维纳（Wiener）核相关辨识法和数据处理的分组方法（GMDH）等.

对于无法人为地进行试验、控制的系统，如自然或社会现象，通常是根据实际数据建立**时间序列**（time series）模型，如 AR 模型、ARMA 模型等

7.2 建立数学模型的方法

为了不过多涉及数学本身的困难，本节介绍的用机理分析建模的方法，仅限于初等数学、线性代数、数学分析、概率论等范围；利用比较专门的数理统计、排队论、规划论、组合数学、图论等建模的方法不在这里介绍.

因为不存在普遍适用的建立数学模型的准则和技巧，这里采用典型例题的方式阐述建模的方法.

7.2.1 初等分析

初等分析包括如何适当地设定变量、运用比例关系及定性分析、图解法等.

例 7.2.1 四脚同时着地的椅子 在起伏不平的地面上，放一只四条腿一样长、四脚连线呈正方形的椅子，问这只椅子能四脚同时着地吗？

解 为建模而做出的一个合理的数学上的假设是：沿任意方向，地面高度不出现间断，即地面是连续曲面．并且对于椅脚的间距和椅腿长度而言，地面是相对平坦的.

建模的关键在于恰当地找出表示椅子位置的变量，并把"椅脚着地"归结为某个数学式子．注意到椅子四脚连线呈正方形 $ABCD$，中心点为 o，可用椅子绕 o 点转动时对角线 AC 与固定的 x 轴的夹角 θ 表示椅子的位置，如图 7.5 所示．所谓"着地"就是椅脚与地面的距离等于零．A、C 两脚与地面距离之和是 θ 的函数，记作 $g(\theta)$，而 B、D 两脚与地面距离之和记作 $f(\theta)$．由地面的连续性假设，g 和 f 是连续函数.

因为椅子在任何位置总有三只脚着地，即对任意 θ，$g(\theta)$ 和 $f(\theta)$ 中必有一个为零，并且当 $\theta=0$ 时，不妨设 $g(0)=0$，所以"四

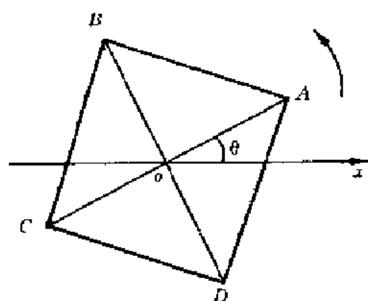


图 7.5

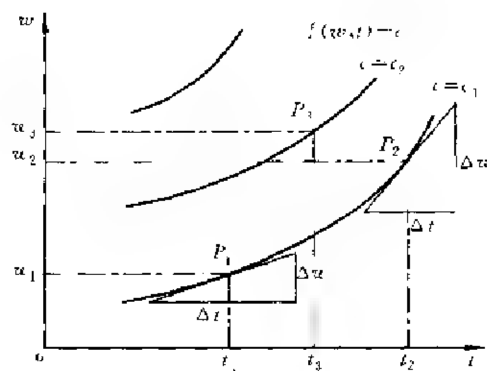
脚同时着地的椅子"可归结为以下的模型：

设 $g(\theta)$ 和 $f(\theta)$ 是连续函数，对任意 θ，$g(\theta)\cdot f(\theta)=0$，且 $g(0)=0$，$f(0)>0$. 问是否存在 θ_0，使 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$.

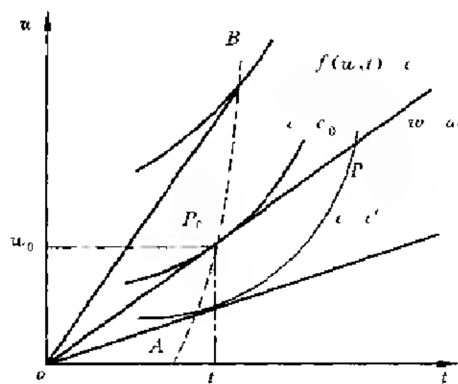
答案是肯定的，其证明如下：将椅子转动 90°，对角线互换，故 $g(\pi/2)>0$，$f(\pi/2)=0$. 令 $h(\theta)=g(\theta)-f(\theta)$，显然 $h(0)<0$，$h(\pi/2)>0$，于是对于连续函数 $h(\theta)$，存在 $\theta_0\in(0,\pi/2)$，使 $h(\theta_0)=0$，即 $g(\theta_0)=f(\theta_0)$. 但是 $g(\theta_0)\cdot f(\theta_0)=0$，所以得到 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$.

例 7.2.2 雇员与雇主间的协议　雇员对于每天的工资和工作时间（以下简称工时）的需求遵从一定的满意度曲线，而雇主付给计时工资. 讨论二者怎样就雇员的工资和工时达成协议.

解　雇员每天的工资和工时分别记作 w 和 t，在 $w\sim t$ 平面图上雇员的需求用一族无差别曲线 $f(w,t)=c$ 表示，c 称满意度. 点 $P_1(w_1,t_1)$ 和 $P_2(w_2,t_2)$ 位于同一条无差别曲线 $f(w,t)=c_1$ 上，表明雇员每天工作 t_1 小时得 w_1 元的满意程度与工作 t_2 小时得 w_2 元是一样的. 点 $P_3(w_3,t_3)$ 位于 $f(w,t)=c_1$ 上方的另一条无差别曲线 $f(w,t)=c_2(>c_1)$ 上，表明雇员每天工作 t_3 小时得 w_3 元的满意度比前者高（图 7.6(a)）.



(a)



(b)

图 7.6

无差别曲线是下凸的,因为当工资较低时(如图中的 P_1 点),雇员愿增加较多的工时 Δt 以换取增加较少的工资 Δw;而当工资较高时(如图中的 P_2 点),就要求增加较多的工资才肯增加较少的工时了.

若雇主的计时工资率为 α(元/h)，则付给的工资为 $w=\alpha t$，如图 b 中过原点的直线所示. 该直线与雇员的无差别曲线族中的某一条 $f(w,t)=c_0$ 相切于 $P_0(w_0,t_0)$ 点. P_0 点是雇主与雇员的协议点，即雇员将每天工作 t_0 小时得 w_0 元，因为在计时工资线 $w=\alpha t$ 上的另外任何一点 P'，都有一条无差别曲线 $f(w,t)=c'$ 通过，而 P' 点的满意度 c' 小于 c_0，雇员不会在 P' 点达成协议.

雇主为了增加或减少雇员的工时，可以采取改变计时工资率 α 的办法. 不同的 α 构成计时工资线族，即图(b)中过原点的直线族，它们与雇员的无差别曲线族的切点的连线 AB 是协议线，雇员将在这条线上就他的工资和工时与雇主达成协议.

7.2.2 初等概率

一些包含不确定因素的问题可以运用初等概率的方法加以分析，建立模型.

例 7.2.3 传送系统模型 工人们在各自的工作台上生产同一种产品，生产周期(生产一件产品的时间)是一定的. 这些工作台上方有一条以常速运转的传送产品的传送带，带上设置若干钩子，工人们将生产出的产品挂在经过他上方的钩子上带走. 当传送系统进入稳定状态时，每个工人往钩子上挂他生产出产品的时刻是随机的. 试做出一些简化假设，并给出描述这一过程效能的指标，建立传送系统模型.

解 首先做出如下的假设：

(1) n 个工人的生产是相互独立的；生产周期 T 是常数；n 个工作台均匀排列.

(2) 一个生产周期内有 m 个钩子通过每一工作台上方，钩子均匀排列；到达第一个工作台上方的钩子都是空的.

(3) 在每只钩子通过某一工作台上方的时间间隔 $\Delta t=\dfrac{T}{m}$ 内，

如果这个工人生产出一件产品，那么当该钩子是空的时，工人可以将产品挂上带走；当该钩子非空时，则工人只能把产品放在地板上（他没有时间等候下一只空钩子）．而产品一旦放在地板上就永远退出这一传送系统．

（4）当传送系统进入稳态后，每个工人在一个生产周期内生产出一件产品的时刻是均匀分布的．

将一周期内未被传送带送走的产品数（期望值）与产品总数 n 之比定为描述该过程效能的指标，记作 D．显然，D 越小传送系统效能越高．为了得到 D 的表达式，需要分析一只钩子非空的概率．

因为一工人在 Δt 内生产出一件产品的概率，即他能往一只空钩子上挂产品的概率为 $p=\frac{\Delta t}{T}=\frac{1}{m}$，又记 $q=1-p$．所以 n 个工人都不往一只钩子上挂产品的概率，即一只钩子为空的概率是 q^n．于是一只钩子非空的概率是 $1-q^n$．由此每一周期平均有 $m(1-q^n)$ 只非空的钩子通过工作台，这也就是传送带每周期平均送走的产品数目．

按照指标 D 的定义，有

$$D=\frac{n-m(1-q^n)}{n}=1-\frac{m}{n}\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right].$$

当 $\frac{n}{m}$ 较小时上式的近似表达式为

$$D\approx 1-\frac{m}{n}\left[1-\left(1-\frac{n}{m}+\frac{n(n-1)}{2m^2}\right)\right]=\frac{n-1}{2m}.$$

D 近似地与 n 成正比，与 m 成反比．

7.2.3 量纲分析

许多物理量是有量纲的，用数学公式表述一个物理规律时，等号两端必须保持量纲的一致．**量纲分析**（dimensional analysis），是基于量纲一致这一原则，建立或检验物理规律的一种方法．

在物理学的每一领域中，都有某些物理量的量纲是基本的，其它物理量的量纲可以由这些基本量纲推导出来. 例如在力学中，把质量 m，长度 l，时间 t 的量纲作为基本量纲，记作 $[m]=\mathrm{M}$，$[l]=\mathrm{L}$，$[t]=\mathrm{T}$，而速度 v、力 f 的量纲则可分别表示为 $[v]=\mathrm{LT}^{-1}$，$[f]=\mathrm{MLT}^{-2}$.

如果要建立包含 n 个有量纲的物理量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的关系，它们所属的物理领域有 m 个基本量纲 $\mathrm{W}_1,\mathrm{W}_2,\cdots,\mathrm{W}_m$，则有下面的定理.

定理 7.2.4（π 定理） 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足独立于量纲单位的关系

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,$$

其中 x_i 的量纲表示为

$$[x_i]=\prod_{j=1}^{m} W_j^{\beta_{ij}}, \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

若矩阵 $\boldsymbol{B}=(\beta_{ij})_{n\times m}$ 的秩为 r，则前式可表示为

$$\psi(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{n-r})=0$$

其中

$$\pi_k=\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i^{(k)}}, \qquad k=1,2,\cdots,n-r$$

是无量纲参数，而 $\alpha_i^{(k)}$ 是方程组

$$B\boldsymbol{a}=0$$

的第 k 个基本解，其中 $\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$.

例 7.2.5 不可压缩粘性流体在管道内的稳定流动 不可压缩流体的密度为 ρ，粘性系数为 μ，在长度为 l 的管道内作稳定流动，流速为 v，管道两端压强差为 p，重力加速度是 g. 建立这些物理量间的关系.

解 将各个物理量用基本量纲 M，L，T 表示为：$[l]=\mathrm{L}$，$[v]=\mathrm{LT}^{-1}$，$[\rho]=\mathrm{ML}^{-3}$，$[g]=\mathrm{LT}^{-2}$，$[p]=(\mathrm{MLT}^{-2})(\mathrm{L}^2)^{-1}$

$ML^{-1}T^{-2}$, $[\mu]=(ML^{-1}T^{-2})L(LT^{-1})^{-1}=ML^{-1}T^{-1}$（因为 $p=\mu\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$x$ 是沿管长方向的坐标）. 设

$$l^{\alpha_1}v^{\alpha_2}\rho^{\alpha_3}p^{\alpha_4}\mu^{\alpha_5}g^{\alpha_6}=\pi,$$

π 是无量纲参数. 上式的量纲表达式为

$$L^{\alpha_1}(LT^{-1})^{\alpha_2}(ML^{-3})^{\alpha_3}(ML^{-1}T^{-2})^{\alpha_4}(ML^{-1}T^{-1})^{\alpha_5}(LT^{-2})^{\alpha_6}$$
$$=L^0M^0T^0$$

比较三个基本量纲的幂次得方程组

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5+\alpha_6=0\\ \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=0\\ -\alpha_2-2\alpha_4-\alpha_5-2\alpha_6=0\end{cases},$$

其中 $r=3$，有 $6-3=3$ 个基本解：

$$\alpha^{(1)}=(0,-2,-1,1,0,0)^T,$$
$$\alpha^{(2)}=(-1,-1,-1,0,1,0)^T,$$
$$\alpha^{(3)}=(1,-2,0,0,0,1)^T.$$

由此得到各物理量间的三个关系式：

$$p/v^2\rho=\pi_1;\quad lv\rho/\mu=\pi_2;\quad v^2/lg=\pi_3.$$

它们都是流体力学中的基本关系. 最后得到

$$\phi(p/v^2\rho,lv\rho/\mu,v^2/lg)=0$$

无量纲化是一种简化方法，用来减少问题中出现的参数的数目，下面举例说明.

例 7.2.6 物体上抛问题的无量纲化 把一个质量 m 的物体从地面以初速 v 竖直上抛，空气阻力与物体速度成正比，比例系数 k，重力加速度为常数 g. 用 $x(t)$ 表示时刻 t 物体在地面上的高度，则 $x(t)$ 满足的微分方程和初始条件为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}+g=0,\quad x|_{t=0}=0,\quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=v\quad(7.1)$$

其解可表示为

$$x = x(t; q, v, g), \quad q = \frac{k}{m} \tag{7.2}$$

x 依于自变量 t 和 3 个参数 q, v, g. 不具体求解(7.1)用无量纲化方法简化解的表达式(7.2).

解 将变量和参数的量纲用基本量纲表示为：$[x] = L$，$[t] = T$，$[q] = T^{-1}$，$[v] = LT^{-1}$，$[g] = LT^{-2}$. 对于变量 x 和 t，分别构造一个具有相同量纲的参数组合，如 $x_c = v^2 g^{-1}$，$t_c = v g^{-1}$，则新变量 $y = x/x_c$ 和 $\tau = t/t_c$ 是无量纲的. 利用求导链锁法则可以得到(7.1)在新变量 y, τ 下的表达式为

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \varepsilon \frac{dy}{d\tau} + 1 = 0, \quad y|_{\tau=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 1 \tag{7.3}$$

其中 $\varepsilon = \frac{qv}{g}$ 是无量纲量. (7.3)的解可表示为

$$y = y(\tau; \varepsilon) \tag{7.4}$$

y 仅依于自变量 τ 和参数 ε.

上抛问题的任何无量纲的结果只依赖于参数 ε. 例如物体到达最高点的无量纲时间可表为 $\tau = f(\varepsilon)$，代回原变量得到达最高点时间为 $t = t_c f(\varepsilon)$.

无量纲化的结果不是唯一的. 例如可以另取 $t_c = q^{-1}$，x_c 不变，则式(7.1)在 y, τ 下的表示式为

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2} + \varepsilon^2 \frac{dy}{d\tau} + 1 = 0, \; y|_{\tau=0} = 0, \; \left.\frac{dy}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \varepsilon \tag{7.5}$$

ε 同上.

7.2.4 极值分析

当建模的目的是寻求使某个性能指标达到最大(或最小)的最优策略时，可以用函数或泛函表示该指标，然后用微分法或变分法求解极值问题.

例 7.2.7 存储模型 工厂、商店订购货物供生产或销售之

需. 一次订货数量过多，会使储存费用增加；订货过少，不仅由于订货次数增多致使订货费用增加，而且会因缺货造成损失. 试建立存储模型，根据需求状况及对订货费、储存费、缺货损失费等的权衡，制订最优订货方案.

解 分以下三种情况讨论.

(1) 确定性需求，不允许缺货

假设单位时间货物需求量为 R，每次订货费为 C_1，单位时间单位货物的储存费为 C_2，并且当储存量降到零时，立即得到补充，即不允许缺货. 制订一最优存储策略，即订货周期 T 和订货量 Q，使单位时间的费用(订货费和储存费)最小.

储存量 $q(t)$ 的变化如图 7.7 所示，显然 $Q=RT$. 因为一个订货周期 T 内的费用是 $C_1+C_2\frac{1}{2}RT^2$，所以单位时间的费用为

$$C(T)=\frac{C_1}{T}+\frac{C_2RT}{2}.$$

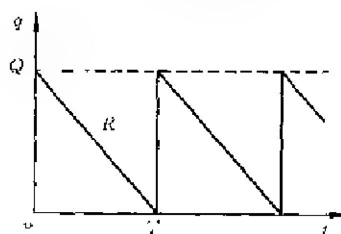


图 7.7

由$\frac{dC}{dT}=0$ 可得，使 $C(T)$ 最小的订货周期和订货量是

$$T=\sqrt{\frac{2C_1}{RC_2}},\quad Q=\sqrt{\frac{2C_1R}{C_2}}. \tag{7.6}$$

(2) 确定性需求，允许缺货

将上面假设中的"不允许缺货"改为"允许缺货"，单位时间单

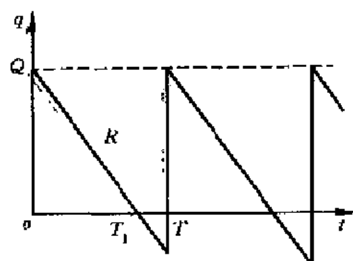


图 7.8

位货物的缺货损失费为 C_3. 在储存量 $q(t)$ 的图形中, 从时刻 T_1 到 T 是缺货时间. 显然 $Q=RT_1$. 一个订货周期 T 内的费用是 $C_1+C_2\cdot\frac{1}{2}RT_1^2+C_3\cdot\frac{1}{2}R(T-T_1)^2$, 单位时间的费用表示为 T 和 Q 的函数:

$$C(T,Q)=\frac{1}{T}\left[C_1+\frac{C_2Q^2}{2R}+\frac{C_3}{2R}(RT-Q)^2\right].$$

由 $\frac{\partial C}{\partial T}=0,\frac{\partial C}{\partial Q}=0$ 可得, 使费用 C 达到最小的 T,Q 是

$$T=\sqrt{\frac{2C_1}{RC_2}\frac{C_2+C_3}{C_3}},\quad Q=\sqrt{\frac{2C_1R}{C_2}\frac{C_3}{C_2+C_3}}. \tag{7.7}$$

与(7.6)相比可以看出, 当 $C_3\gg C_2$ 时二者是一致的.

(3) 随机性需求, 上下界存储策略

已知货物需求量在一个时段(如一天、一周或一月)的概率分布. 作为连续模型, 其概率密度函数是 $p(r)$. 设每次订货费为 C_1, 每时段单位货物的储存费为 C_2、缺货费为 C_3. 制订储存量的下界 s 和上界 S, 当且仅当每个时段初原来的储存量大于 s 时, 才订购货物, 订货量使新储存量达到 S.

设时段初原来储存量是 I. 如果订货 Q 使 $Q+I=S$, 则时段费用的期望值是

$$C(S) = C_1 + C_2\int_0^S (S - r)p(r)\mathrm{d}r$$

$$+ C_3\int_S^{\infty} (r - S)p(r)\mathrm{d}r. \tag{7.8}$$

由$\frac{\partial C}{\partial S}=0$可得，使 C 达到最小的 S 应满足

$$\frac{\int_0^S p(r)\mathrm{d}r}{\int_S^{\infty} p(r)\mathrm{d}r} = \frac{C_3}{C_2}. \tag{7.9}$$

如果这时段不订货，则时段费用期望值是

$$C(I) = C_2\int_0^I (I - r)p(r)\mathrm{d}r$$

$$+ C_3\int_I^{\infty} (r - I)p(r)\mathrm{d}r. \tag{7.10}$$

显然，只要 $C(I)\leqslant C(S)$（其中 S 满足(7.9)），就不应再订货. 下界 s 取 I 的最小值，由(7.8)、(7.10)得

$$s = \min\Big\{s\Big|C_2\int_0^s (s - r)p(r)\mathrm{d}r$$

$$+ C_3\int_s^{\infty} (r - s)p(r)\mathrm{d}r$$

$$\leqslant C_1 + C_2\int_0^S (S - r)p(r)\mathrm{d}r$$

$$+ C_3\int_S^{\infty} (r - S)p(r)\mathrm{d}r\Big\}. \tag{7.11}$$

(7.9)和(7.11)确定的 S 和 s 给出了随机性需求下的上下界存储策略.

例 7.2.8 设备检查　生产过程中应按时检查设备的完好情况. 检查次数太少，故障不能及时发现，会给生产带来损失；检查次数太多，又会增加检查费用. 设备出现故障的时刻是随机的，其规律可由统计数据或理论分析得到. 制订一个检查方案，使到发现故

障为止的总费用——损失费与检查费的期望值最小.

解 检查方案用单位时间内的检查次数表示,它应该和故障出现时刻的概率分布有关,在故障出现频繁时多检查几次.所以设单位时间的检查次数是时间 t 的函数,记作 $n(t)$.为了把损失费和检查费表示成 $n(t)$ 的泛函数,做以下的假设:

(1) 每次检查费是常数 k.如果在时刻 t 的检查中发现故障,则总的检查费是 $k\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau$.

(2) 从发生故障到下一次检查发现故障的时间间隔记作 T,当 $n(t)$ 很大时,设备在两次检查之间出现故障时刻的概率服从均匀分布,故 T 的期望值是检查周期的一半,记作 $\bar{T}=\frac{1}{2n(t)}$.

(3) 发生故障带来的损失费是 T 的函数,用 $\bar{T}$ 近似代替 T,将损失费表示为 $\varphi\left(\frac{1}{2n(t)}\right)$.

(4) 发生故障的概率分布函数是 $F(t)$.若设备使用期限是 t_1,则 $F(t_1)=1$.

由以上假设,若在时刻 t 的检查中发现故障,则总费用是 $k\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau+\varphi\left(\frac{1}{2n(t)}\right)$.而直到发生故障为止的设备检查的期望费用是 $n(t)$ 的泛函:

$$C(n(t))=\int_0^{t_1}\left[k\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau+\varphi\left(\frac{1}{2n(t)}\right)\right]F'(t)\mathrm{d}t$$

$n(t)$的端点条件是 $n(0)=0$, $n(t_1)$自由.

为了求解的方便,令

$$x(t)=\int_0^t n(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

泛函 $C(n(t))$及其端点条件转换成

$$J(x(t)) = \int_0^\infty \left[k\,x(t) + \varphi\left(\frac{1}{2x(t)} \right) \right] F'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{7.12}$$

$$x(0) = 0, \quad x(t)\ \text{自由}.$$

这是一端固定、一端自由的泛函极值问题. 利用欧拉方程和横截条件,(7.12)的解为

$$\frac{\varphi' F'}{x^2} = 2k[1 - F(t)].$$

重新表示成关于 $n(t)$ 的关系式:

$$\frac{\varphi'\left(\frac{1}{2n(t)}\right)}{n^2(t)} = 2k\,\frac{1 - F(t)}{F'(t)}. \tag{7.13}$$

为了得到 $n(t)$ 的具体形式,需要对函数 φ 和 F 作进一步的假设.

如果损失费 φ 与时间间隔 T 成正比,比例系数是 α,则 $\varphi' = \alpha$,由(7.13)式得

$$n(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{2k}\,\frac{F'(t)}{1 - F(t)}}, \tag{7.14}$$

式中 $\frac{F'(t)}{1 - F(t)}$ 是条件概率密度. 在已知时刻 t 未发生故障的条件下,t 到 $t + \mathrm{d}t$ 发生故障的概率是 $\frac{F'(t)\mathrm{d}t}{1 - F(t)}$.

如果发生故障的时刻 t 服从期望值为 τ 的指数分布 $F(t) = 1 - e^{-t/\tau}$,代入(7.14)可得

$$n = \sqrt{\frac{\alpha}{2k\tau}}. \tag{7.15}$$

仅在这种情况下 n 才是常数. 平均故障时间 τ 越大,单位时间的检查次数 n 越小;损失费与检查费系数之比 α/k 越大,n 越大.

(7.14)式或(7.15)是使期望费用达到最小的最优检查方案.

7.2.5 微分方程

当研究对象包含某些变量及其变化率时，常用微分方程表述其关系. 不仅许多物理、工程技术问题是这样，非物理领域中也有不少现象可用微分方程方法建模.

例 7.2.9 香烟过滤嘴模型 在香烟上安装过滤嘴是为了减少烟草所含毒物的吸入量. 为了分析过滤嘴的作用需要建立一个模型描述吸烟人本身吸入烟草中毒物的过程. 吸烟时点燃处的烟草化为烟雾，毒物由烟雾携带着一部分直接进入空气，一部分沿香烟穿行. 在穿行过程中又部分地被未点燃的烟草和过滤嘴吸收，而沉积下来，剩下的进入人体. 被烟草吸收的那部分毒物，当香烟燃烧到那里时又通过烟雾部分进入空气、部分沿香烟穿行，这个过程一直继续到香烟燃至过滤嘴处为止. 试做出一些简化假设以建立模型，得出毒物吸入量与过滤嘴的材料、长度等因素间的定量关系，讨论为减少毒物吸入量应采取的措施.

解 首先做如下的简化而合理的假设.

(1) 香烟长 l，其中烟草部分长 l_1，过滤嘴长 l_2. 质量 m 的毒物均匀分布在烟草中，线密度记作 $w_0=\frac{m}{l_1}$.

(2) 毒物由烟雾携带沿香烟穿行的和直接进入空气的数量比例是常数 $a:a'$ $(a+a'=1)$.

(3) 烟雾速度是常数 v，香烟燃烧速度是常数 u，$v\gg u$.

(4) 烟草和过滤嘴对烟雾中毒物的吸收率(单位时间)分别是常数 b 和 β.

取坐标系如图 7.9，假设 $t=0$ 时香烟在 $x=0$ 处点燃，单位时间放出的毒物为 H，烟雾内毒物的线密度是 $\rho(x)$，单位时间内烟雾中毒物通过 x 处的数量是 $q(x)$. 根据假设(3)和(4)，

$$q(x)-q(x+\Delta x)=\begin{cases} b\rho(x)\Delta x, & 0\leqslant x\leqslant l_1, \\ \beta\rho(x)\Delta x, & l_1<x\leqslant l, \end{cases}$$

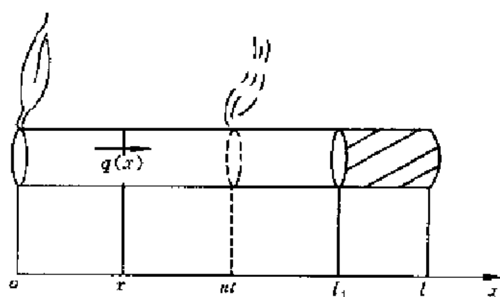


图 7.9

$$q(x)=v\rho(x).$$

再由假设(2)，$q(x)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}-\dfrac{b}{v}q(x), & 0\leqslant x\leqslant l_1,\\ -\dfrac{\beta}{v}q(x), & l_1<x\leqslant l,\end{cases}\\ q(0)=aH.\end{cases}$$

解方程并利用$q(x)$在$x=l_1$处的连续性，得

$$q(x)=\begin{cases}aH\mathrm{e}^{-\frac{bx}{v}}, & 0\leqslant x\leqslant l_1,\\ aH\mathrm{e}^{-\frac{bl_1}{v}-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1<x\leqslant l.\end{cases}$$

于是

$$q(l)=aH\mathrm{e}^{-\frac{bl_1+\beta l_2}{v}}.$$

在任意时刻t，香烟燃至$x=ut$处，基于和上面同样的分析，并且相应地将H和$q(x)$改为$H(t)$和$q(x,t)$，得到

$$q(x,t)=\begin{cases}aH(t)\mathrm{e}^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, & ut\leqslant x\leqslant l_1,\\ aH(t)\mathrm{e}^{-\frac{b(l_1-ut)+\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1<x\leqslant l.\end{cases}$$

烟草中毒物的线密度记为$w(x,t)$，则

$$H(t)=uw(ut,t).$$

代入 $q(x,t)$ 并令 $x=l$,得

$$q(l,t)=uw(ut,t)e^{-\frac{bl_1-\beta l_2+but}{v}}. \tag{7.16}$$

为了求出 $w(ut,t)$,利用

$$w(x,t+\Delta t)=w(x,t)-b\frac{q(x,t)}{v}\Delta t,$$

并注意到 $w(x,0)=w_0$,得积分方程

$$w(x,t)=w_0+\frac{abu}{v}e^{-\frac{bx}{v}}\int_0^t w(u\tau,\tau)e^{\frac{bu\tau}{v}}\mathrm{d}\tau.$$

可以解出

$$w(ut,t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right).$$

代入(7.16)得

$$q(l,t)=\frac{auw_0}{a'}e^{-\frac{bl_1+\beta l_2}{v}}\left(e^{\frac{but}{v}}-ae^{\frac{abut}{v}}\right). \tag{7.17}$$

香烟燃至过滤嘴处的时间为 $\frac{l_1}{u}$. 一支吸收率为 β 的过滤嘴香烟燃尽时,吸入人体的毒物数量记作 Q_β,

$$Q_\beta=\int_0^{\frac{l_1}{u}}q(l,t)\mathrm{d}t.$$

将(7.17)代入计算,并利用 $w_0=\frac{m}{l_1}$,得到

$$Q_\beta=ame^{-\frac{\beta l_2}{v}}\cdot\frac{1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}}{\frac{a'bl_1}{v}}. \tag{7.18}$$

对这个结果作两点分析:

(1) 因子 $e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ 体现了过滤嘴的过滤效果,提高吸收率 β 与增加长度 l_2 起着相同的负指数衰减作用.

在(7.18)中记 $r=\frac{a'bl_1}{v}$，因子 $\frac{1-e^{-r}}{r}$ 随 r 增加而减小，所以提高烟草吸收率 b 和增加长度 l_1 也有助于减少 Q_2. 但是当 r 不大时这一因子近似为 $1-\frac{r}{2}$，故烟草的"过滤"作用远比过滤嘴差.

Q_2 随 v 的增加而增加，即烟雾速度变大将抵消过滤作用. $v\to\infty$ 时 $Q_2\to am$，无过滤作用.

(2) 设有一支不带过滤嘴的长度为 l 的香烟，吸至 $x=l_1$ 处就扔掉. 它的参数 w,b,v,a 与过滤嘴香烟一样. 比较这两支香烟的毒物吸入量.

事实上，只要令(7.18)中的 $\beta=b$，就得到不带过滤嘴香烟的毒物吸入量 Q_3. 于是

$$\frac{Q_2}{Q_3}=e^{-\frac{(\beta-b)l_2}{v}}.$$

可以看出，当 $\beta>b$ 时过滤嘴才起作用. 并且提高吸收率之差 $\beta-b$ 与增加长度 l_2 起着同样作用.

7.2.6 马尔可夫链分析

马尔可夫链(Markov chain)作为随机过程的一个特例，研究的是在无后效条件下时间和状态均为离散的随机转移问题. 对于确定性的状态转移，只要满足无后效条件，也能用马尔可夫链分析.

假设按照过程的发展，时间离散化为 $t=0,1,2,\cdots$，描述过程的状态离散化为 $i=1,2,\cdots,n$，从时刻 t 的状态 i 转移到时刻 $t+1$ 的状态 j 的概率是 p_{ij}，时刻 t 过程处于状态 i 的概率是 $a_i(t)$，则

$$a_j(t+1)=\sum_{i=1}^{n}a_i(t)p_{ij},\quad j=1,2,\cdots,n$$

$a_i(t)$ 和 p_{ij} 满足：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t) = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

若记概率分布向量 $\boldsymbol{a}(t)=(a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t))$，转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$，则

$$\boldsymbol{a}(t+1)=\boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{P}, \tag{7.19}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}(0)\boldsymbol{P}^{T}.$$

定义 7.2.10 如果对于任意的状态 i 和 $j(i,j=1,2,\cdots,n)$，都存在正整数 k，使过程从状态 i 出发，经 k 步转移到状态 j，则这个马尔可夫链称为正则链(regular chain).

这个定义等价于存在正整数 k，使 $\boldsymbol{P}^k>0$. 对于正则链，存在向量 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$，使当 $t\to\infty$ 时 $\boldsymbol{a}(t)\to\boldsymbol{w}$. $\boldsymbol{w}$ 称稳定概率分布，与初始概率分布 $\boldsymbol{a}(0)$ 无关. $\boldsymbol{w}$ 由

$$\boldsymbol{w}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{w}, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i=1$$

算出.

定义 7.2.11 $p_{ii}=1$ 的状态 i 称吸收状态. 若马尔可夫链至少包含一个吸收状态，且从每一个非吸收状态出发，都可以到达某个吸收状态，则这个马尔可夫链称为吸收链(absorbing chain).

含有 m 个吸收状态和 $n-m$ 个非吸收状态的吸收链，其转移概率矩阵的标准形式是

$$\boldsymbol{P}_{n\times n}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{m\times m} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q}_{(n-m)\times(n-m)}\end{bmatrix} \tag{7.20}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位阵，$\boldsymbol{R}$ 中含有非零元素. 这时吸收链具有下列性质：

(1) $t\to\infty$ 时 $\boldsymbol{Q}^t\to 0$.

(2) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}\boldsymbol{Q}^s.$$

(3) 记 $N=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$，从非吸收状态 i 出发，被某个吸收状态

吸收之前的平均转移次数是 N 的第 i 行元素之和.

(4) 记 $B=NR$,从非吸收状态 i 出发,被吸收状态 j 吸收的概率是 B 的元素 b_{ij}.

例 7.2.12 空气污染 有 n 个城市,一个城市空气中的污染物经过一定时间扩散到另一城市去的比例是一定的,并且至少有一个城市,有一部分污染物扩散到这 n 个城市之外,永远不再回来. 制订各城市排放污染物浓度的标准,使在稳定状况下各城市空气中污染物浓度符合环境管理条例的要求.

解 将时间离散为 $t=0,1,2,\cdots$,空气中污染物扩散到 n 个城市为状态 $i=1,2,\cdots,n$,一城市的污染物扩散到另一城市的那一部分所占的比例,可以看作转移概率,记作 $q_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,满足 $\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\leqslant 1$,并且因为至少存在一个 i,满足 $\sum_{j=1}^{n}q_{ij}<1$,故可人为地增加一个状态 0,定义转移概率: $p_{00}=1, p_{0j}=0\ (j=1,2,\cdots,n)$, $p_{k0}=1-\sum_{j=1}^{n}q_{kj}\quad (k=1,2,\cdots,n)$. 于是这 $n+1$ 个状态的转移概率矩阵表示为

$$P=\begin{bmatrix} I & O \\ R & Q_{n\times n} \end{bmatrix}$$

其中 $Q=(q_{ij})$,R 中包含非零元素,P 具有(7.20)的标准形式. 由于污染物扩散具有无后效性,所以这是一个马氏链模型,并且是吸收链.

假设在各城市不排放污染物的情况下,在时刻 t 各城市污染物的浓度是 $a_i(t)\ (i=0,1,2\cdots,n)$,$a_0(t)$ 是相应于状态 0 的浓度,$a_i(t)$ 虽然不是状态概率,但是(7.19)式仍然成立. 若记 $\tilde{a}(t)=(a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t))$,则由 P 的表示式可得 $\tilde{a}(t+1)=\tilde{a}(t)Q$.

记各城市时刻 t 排放的污染物浓度为 f_i,且 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$. 这时各城市污染物浓度为 $c_i(t)$,且 $c(t)=(c_1(t),c_2(t),\cdots,$

$c_n(t)$)，则

$$\boldsymbol{c}(t+1)=\boldsymbol{c}(t)\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{f}.$$

由此可以得到

$$\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{c}(0)\boldsymbol{Q}^t+\boldsymbol{f}\sum_{i=0}^{t-1}\boldsymbol{Q}^i.$$

根据吸收链的性质，$t\to\infty$ 时 $\boldsymbol{c}(t)\to\boldsymbol{f}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$. 记环境管理条例中各城市的最大污染物浓度为 $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，在稳定状况下管理条例要求 $\boldsymbol{c}(t)\leqslant\boldsymbol{g}$，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}\leqslant\boldsymbol{g}$，或表为

$$\boldsymbol{f}\leqslant\boldsymbol{g}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}).$$

当已知 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 时，上式给出了各城市排放污染物浓度的标准.

7.2.7 冲量过程

一个复杂系统由若干元素组成，各元素间存在着相互影响. 当一个元素的数量在某时刻突然发生变化（增或减），在其后的时期各元素的数量随之发生变化. 这样因某个脉冲量引起的整个系统变化过程称为**冲量过程**（pulse process）. 利用冲量过程可以研究这种复杂系统的变化规律，特别是系统的稳定性.

在冲量过程中，时间和各元素的数量都要离散化.

(1) 有向图. 设系统有 n 个元素，每个元素用一个点表示，称为**结点**（vertix），这些元素和相应的结点都记作 $v_1,v_2,\cdots,v_n$. 当 v_i 在时刻 t 增加 1 单位，直接引起 v_j 在时刻 $t+1$ 增加（或减少）a 单位时，从 v_i 到 v_j 画一条带箭头的连线，注以 $+a$（或 $-a$），这条线称**有向弧**（directed arc），记作 (v_i,v_j)，并称 $+a$（或 $-a$）是 (v_i,v_j) 的值. 结点和有向弧构成的图称**有向图**（directed digraph）. 当 a 只取数值 1 时，有向弧可只注以"+"（或"−"）号，这时有向图称**带符号的图**（signed digraph）.

(2) 邻接矩阵. 当有向弧 (v_i,v_j) 存在且取值 $+a$（或 $-a$）时，令 $a_{ij}=+a$（或 $-a$）；当 (v_i,v_j) 不存在时，令 $a_{ij}=0$. 由 a_{ij} $(i,j=1,2,$

…,n)构成的矩阵称有向图的**邻接矩阵**(adjacency matrix),记作 $\boldsymbol{A}$.

(3) 计算公式. 用 $v_i(t)$ 表示 v_i 在时刻 t 的数值,$p_i(t)$ 表示 v_i 在时刻 t 的改变量,或冲量. 根据 a_{ij} 的定义,

$$\begin{cases} v_i(t+1) = v_i(t) + p_i(t+1), \\ p_i(t+1) = \sum\limits_j a_{ji} p_j(t), \quad i = 1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \cdots, v_n(t))$,$\boldsymbol{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t))$,则

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(t+1) = \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{p}(t+1), \\ \boldsymbol{p}(t+1) = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{A}. \end{cases} \tag{7.21}$$

由只有一个分量是1,其余分量都是0的 $\boldsymbol{p}(0)$ 引起的冲量过程,称为简单冲量过程. 显然一般冲量过程可以分解为若干个简单冲量过程. 下面只研究简单冲量过程,简记作 D.

(4) 稳定性. 对于 $t = 0,1,2,\cdots$,$i = 1,2,\cdots,n$,若 $|p_i(t)|$ 有界,称 D 是**冲量稳定**的(pulse stable);若 $|v_i(t)|$ 有界,称 D 是**值稳定**的(value stable). 若 D 值稳定,必然冲量稳定. 下面的定理用来判断 D 的稳定性.

定理 7.2.13 设 D 的邻接矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 若 D 冲量稳定,则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的模不超过 1;

(2) 若 D 冲量稳定,且 a_{ij} 均为整数,则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的模均等于 1;

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值各异,且模均不超过 1,则 D 冲量稳定;

(4) D 值稳定的充要条件是,D 冲量稳定,且 1 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

要把不稳定的冲量过程变成稳定的,必须改变系统中某些元素之间的制约关系,即 a_{ij} 的数值(指实际情况允许改变的那些),从而改变 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,使之满足定理 7.2.13 的条件. 下面对于一

类特殊系统给出一种指导性方法.

具有这样性质的带符号的图称为**改进的玫瑰形图**(advanced rosette):从任一结点可沿有向弧到达所有其它结点;有一个结点在所有的回路上(回路指从一个结点出发,沿有向弧又回到该结点的一条闭路径).回路的长度定义为构成回路的有向弧的段数.当回路包含奇数个带"—"号的有向弧时,回路的符号定义为-1,否则为+1.长度等于i的回路的符号和记作a_i(设有长度等于i的回路时令$a_i=0$),设s是使$a_s\neq 0$的最大正整数.由改进的玫瑰形图表示的简单冲量过程记作$\tilde{D}$.下面的定理用来判断和改变$\tilde{D}$的稳定性.

定理 7.2.14 设对于$\tilde{D}$的回路符号和为$a_1,a_2,\cdots,a_s$.

(1) 若$\tilde{D}$冲量稳定,则

$$a_s=\pm 1,\quad a_i=-a_s\cdot a_{s-i},\quad i=1,2,\cdots,s-1 \tag{7.22}$$

(2) 若$\tilde{D}$冲量稳定,则$\tilde{D}$值稳定的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{s} a_i\neq 1. \tag{7.23}$$

例 7.2.15 能源利用系统 能源利用系统由以下元素组成:能源利用量U,能源价格R,能源生产率C,环境质量Q,消耗能源的工厂数量F,就业机会J,人口总数P.其相互关系用带符号的图 7.10 表示.研究由于能源利用量的突然增加引起的系统变化,

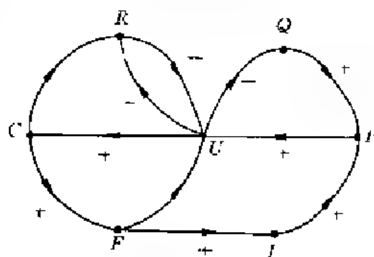


图 7.10

并分析其稳定性.

解 首先根据带符号的图写出邻接矩阵

$$
A=\begin{array}{c} \\ U \\ R \\ C \\ Q \\ F \\ J \\ P \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} U & R & C & Q & F & J & P \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & -1 & +1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\
+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\
+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

设 $\boldsymbol{p}(0)=(1,0,0,0,0,0,0)$，由(7.21)可以算出 $t=1,2,\cdots$ 系统各元素的改变量和值：

	U	R	C	Q	F	J	P
$\boldsymbol{p}(0)=\boldsymbol{v}(0)$	1	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{p}(1)$	0	−1	−1	−1	0	0	0
$\boldsymbol{v}(1)$	1	1	1	−1	0	0	0
$\boldsymbol{p}(2)$	1	1	0	0	1	0	1
$\boldsymbol{v}(2)$	2	2	1	1	1	0	1
$\boldsymbol{p}(3)$	1	1	1	1	0	1	0
$\boldsymbol{v}(3)$	3	3	2	2	1	1	1
⋮	……						

它们表示了系统各元素的变化情况.

为了分析这个简单冲量过程的稳定性，计算出 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^2(\lambda^5-\lambda^3-\lambda^2-1)$. 因为 $f(1)=-2$, $f(2)=76$，所以 $f(\lambda)$ 在(1,2)内有根，根据例 7.2.12 中的(1)，冲量不稳定.

带符号的图是改进的玫瑰形图，可以利用例 7.2.13 改变系统

的稳定性.计算出它的回路符号和:$a_1=0$,$a_2=1$,$a_3=1$,$a_4=0$,$a_5=-1$,及 $s=5$.不难看出,此时(7.22)中的 $a_3=-a_5\cdot a_1$ 不成立.为了满足(7.22)所示的冲量稳定的必要条件,一个办法是将有向弧(U,R)的符号由"$-$"变为"$+$".其实际意义是把原来的"能源利用量越多,价格越低"变为"能源利用量越多,价格越高",即从鼓励多用能源变为限制多用.

经过这个变动,$a_2=-1$,A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda(\lambda^5-\lambda^3-\lambda^2-1)$,特征值是 $0,0,1,\pm i,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.根据定理 7.2.13 中的(3),冲量稳定,即各元素的改变量是有界的.但是值不稳定.为了满足值稳定的充要条件(7.23),必须使 $a_1=a_5=-1$,这只能是把(C,F)由"$+$"变为"$-$",其实际意义是"能源生产率越高,消耗能源的工厂越少".这似乎违反常识.但是对这个能源利用系统,要求值稳定不一定是合适的,特别是对工厂数量和就业机会来说.

7.2.8 层次分析

层次分析(analytic hierarchy process)是进行系统分析的数学工具之一,它把人的思维过程层次化、数量化,用数学方法为复杂系统的分析、预报、决策或者控制提供定量依据.它是一种定性与定量相结合的分析方法.在工程技术、经济管理、以至社会生活中有广泛的应用.

(1) 成对比较.层次分析的一个基本步骤是比较若干因素对同一目标的影响,确定它们在目标中占的比重.这些因素常常不易比较,有时受到相当大主观因素的影响.若干因素放在一起比较,更加困难和不准确,**成对比较**(paired comparisons)是减少这种困难和提高准确度的一种方法.

定义 7.2.16 设 $n\times n$ 矩阵 A 的元素 $a_{ij}>0$,

(1) 若 $a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$,则 A 称**互反矩阵**(reciprocal

matrix)；

（2）对于互反矩阵，若 $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}(i,j,k=1,2,\cdots,n)$，则 A 称**一致性矩阵**(consistency matrix)，简称一致阵.

定理 7.2.17 $n \times n$ 互反矩阵是一致阵的充要条件，其最大特征值 $\lambda_m = n$.

从定理 7.2.17 可以得到：$n \times n$ 互反矩阵的最大特征值 $\lambda_m \geqslant n$；一致阵的秩为 1，每一列都是相应于 $\lambda_m = n$ 的特征向量.

记 $\boldsymbol{y} = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，当要研究 $\boldsymbol{y}$ 的 n 个因素对目标 z 的影响时，将它们两两成对比较，y_i 与 y_j 的对比结果用比较尺度 a_{ij} 表示. 在进行主要是定性对比时，a_{ij} 取值方法是：

y_i 比 y_j	相同	稍强	强	很强	绝大强
a_{ij}	1	3	5	7	9

在每两个等级之间有一个中间状态，a_{ij} 为 2,4,6,8. 这样 a_{ij} 的取值范围是 $1,2,\cdots,9$ 及其互反数 $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{9}$. 全部比较结果用矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 表示，A 称成对比较矩阵，它是互反矩阵，但不一定是一致阵.

（2）权向量. 当成对比较矩阵 A 是一致阵时，它的每一列向量都是特征向量，将特征向量标准化后记作 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$，满足 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，$\boldsymbol{w}$ 称**权向量**(weighted vector). 权向量表示了 $\boldsymbol{y} = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 在目标 z 中占的比重. 因为 A 的第 j 列向量 $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^T$ 是 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 与 y_j 比较的结果.

当成对比较矩阵 A 不是一致阵时，将对应于最大特征值 λ_m 的特征向量标准化后仍称为权向量 $\boldsymbol{w}$. $\boldsymbol{w}$ 能否表示 $\boldsymbol{y}$ 在 z 中占的比重，要视 A 不一致的程度而定. λ_m 比 n 大得越多，A 不一致程度越严重，衡量不一致程度的数量指标叫做**一致性指标**(consistency

index)，定义为

$$CI = \frac{\lambda_m - n}{n-1}.$$

为了找出衡量一致性指标 CI 的标准，随机地构造互反矩阵 A'，其元素 a'_{ij} 从 $\frac{1}{9},\cdots,\frac{1}{2},1,2,\cdots,9$ 中随机选取，认为 A' 是最不一致的. 用充分大的样本得到 A' 的最大特征值的平均值 λ'_m，定义

$$RI = \frac{\lambda'_m - n}{n-1}$$

为**随机性指标**(random index)，对于不同的 n，RI 的数值如下表 7.1 所示：

表 7.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

再令 $CR = \frac{CI}{RI}$，称**一致性比**(consistency ratio). 通常当 $CR \leqslant 0.1$ 时，认为成对比较矩阵 A 的不一致性仍可接受，权向量 $\boldsymbol{w}$ 能表示 y 在 z 中占的比重.

当 n 较大时，精确计算 A 的 λ_m 和 $\boldsymbol{w}$ 比较麻烦，因为 a_{ij} 本身比较粗糙，作精确计算并无必要. 一种简化计算方法是：首先将 A 的各个列向量标准化，然后取其平均值，即为 $\boldsymbol{w}$ 的近似值；用这个 $\boldsymbol{w}$ 的近似值计算出 $A\boldsymbol{w} = ((A\boldsymbol{w})_1, (A\boldsymbol{w})_2, \cdots, (A\boldsymbol{w})_n)^T$ 后，λ_m 的近似值为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Aw)_i}{w_i}.$$

(3) 层次分析. 假设一个决策系统可分为三个层次，最高层次是目标 z，最低层次是 m 个供选择的决策 $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，中间层次是 n 个影响 z 的因素 $\boldsymbol{y} = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，每个因素 y_i 都与 m

个决策有关，如层次分析图 7.11 所示. 用成对比较法可以得到 $\boldsymbol{y}$ 对 z 的权向量 $\boldsymbol{w}_z(\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{w}_z(y_1),\boldsymbol{w}_z(y_2),\cdots,\boldsymbol{w}_z(y_n))^{\mathrm{T}}$ 和一致性指标 $CI_z(\boldsymbol{y})$，及 $\boldsymbol{x}$ 对 y_i 的权向量 $\boldsymbol{w}_{y_i}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{w}_{y_i}(x_1),\boldsymbol{w}_{y_i}(x_2),\cdots,$

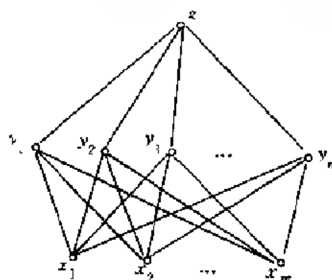


图 7.11

$\boldsymbol{w}_{y_i}(x_m))^{\mathrm{T}}$和一致性指标 $CI_{y_i}(\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 记决策 x 对目标 z 的权向量为 $\boldsymbol{w}_z(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{w}_z(x_1),\boldsymbol{w}_z(x_2),\cdots,\boldsymbol{w}_z(x_m))^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{w}_z(x_j)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{w}_z(y_i)\boldsymbol{w}_{y_i}(x_j),\quad j=1,2,\cdots,m$$

若以 x 对 y_i 的权向量 $\boldsymbol{w}_{y_i}(\boldsymbol{x})$ 为列向量构成矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$，$r_{ij}=\boldsymbol{w}_{y_j}(x_i)$，则(7.23)表示为 $\boldsymbol{w}_z(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{w}_z(\boldsymbol{y})$.

对于一致性指标 $CI_z(\boldsymbol{y})$ 和 $CI_{y_i}(\boldsymbol{x})$，除了逐个检查之外，也可以作统一检查：x 对 z 的一致性指标和随机性指标分别定义为

$$CI_z(\boldsymbol{x})=CI_z(\boldsymbol{y})+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{w}_z(y_i)CI_{y_i}(\boldsymbol{x}),$$

$$RI_z(\boldsymbol{x})=RI_z(\boldsymbol{y})+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{w}_z(y_i)RI_{y_i}(\boldsymbol{x}),$$

当一致性比 $CR=\dfrac{CI_z(x)}{RI_z(x)}\leqslant 0.1$ 时，记为权向量 $\boldsymbol{w}_z(\boldsymbol{x})$ 能表示 $\boldsymbol{x}$ 在 z 中占的比重，它为选择最优决策提供了数量依据.

如果一个更复杂的系统可分解为 h 个层次，最高的第 1 层次

为 $z=\{z_1,z_2,\cdots,z_s\}$，最低层次为 $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，以较低的第 k 层次的诸因素对较高的第 $k-1$ 层次的诸因素的权向量为列向量，构成的矩阵记作 $\boldsymbol{R}_k(k=2,3,\cdots,h)$，则 $\boldsymbol{x}$ 对 z_i 的权向量为

$$\boldsymbol{w}_{z_i}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{R}_h\boldsymbol{R}_{h-1}\cdots\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{R}_2^{(i)},\quad i=1,2,\cdots,s,$$

其中 $\boldsymbol{R}_2^{(i)}$ 是 $\boldsymbol{R}_2$ 的第 i 列向量，即第 2 层次诸因素对 z_i 的权向量.

例 7.2.18 旅游地的选择　有 3 个旅游地点 x_1,x_2,x_3 供某人选择，他要考虑 5 个因素：费用 y_1、景色 y_2、居住条件 y_3、饮食条件 y_4、旅途条件 y_5. 用层次分析法为选择旅游地提供数量依据.

解　分解为 3 个层次：目标 z；因素 $\boldsymbol{y}=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$；决策 $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$. 首先用成对比较法得到 $\boldsymbol{y}$ 对 z 的成对比较矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 对 y_i 的成对比较矩阵 $\boldsymbol{B}_i$ $(i=1,2,3,4,5)$，假设它们是：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&7&5&5\\1/2&1&4&3&3\\1/7&1/4&1&1/2&1/3\\1/5&1/3&2&1&1\\1/5&1/3&3&1&1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&1/3&1/8\\3&1&1/3\\8&3&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&2&5\\1/2&1&2\\1/5&1/2&1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&1&3\\1/3&1/3&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}1&3&4\\1/3&1&1\\1/4&1&1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}_5=\begin{bmatrix}1&1&1/4\\1&1&1/4\\4&4&1\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{B}_1$ 是 $\boldsymbol{x}$ 对费用 y_1 节省的比较，$\boldsymbol{B}_2$ 是 $\boldsymbol{x}$ 对景色 y_2 优美的比较，$\boldsymbol{B}_3$、$\boldsymbol{B}_4$、$\boldsymbol{B}_5$ 分别是 $\boldsymbol{x}$ 对居住、饮食和旅途条件 y_3、y_4、y_5 优越的比较. 然后算出 $\boldsymbol{x}$ 对 y_i 的权向量 $w_{y_i}(\boldsymbol{x})$、$\boldsymbol{B}_i$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}^{(i)}$ 和一致性指标 $CI_{y_i}(\boldsymbol{x})$：

i	1	2	3		5
	0.082	0.595	0.429	0.633	0.166
$w_{y_i}(x)$	0.236	0.277	0.429	0.193	0.166
	0.682	0.129	0.142	0.175	0.668
λ_m	3.002	3.005	3	3.009	3
$CI_{y_i}(x)$	0.001	0.003	0	0.005	0

以及 y 对 z 的权向量 $w_z(y)=(0.475, 0.263, 0.055, 0.099, 0.110)^T$，$A$ 的最大特征值 $\lambda_m=5.073$ 和一致性指标 $CI_z(y)=0.018$.

根据(7.23)算出 x 对 z 的权向量为 $w_z(x)=(0.300, 0.246, 0.456)^T$. 对于一致性指标做逐个检查，结果各个成对比较矩阵的不一致性均可接受. 例如：对于 A，查出 $n=5$ 时的随机性指标为 $RI_z(y)=1.12$，一致性比 $CR=\frac{CI_z(y)}{RI_z(y)}=\frac{0.018}{1.12}<0.1$. 所以 $w_z(x)$ 表示出 3 个地点 x_1, x_2, x_3 在选择旅游地这个目标中占的比重，显然 x_3 应作为第一选择地点.

7.3 数学模型的应用

数学在物理学和工程技术各个领域中的应用已经日趋深入，在一些非物理领域的研究中，数学作为强有力的定量分析的工具也起着越来越重要的作用. 由于物理和工程技术领域中的数学模型常常需要较多的专业知识，所以本节主要选择一些不需要太多专门知识的例题，说明数学模型在诸如人口、经济、社会、交通、生产、医学、生态、体育等领域的应用.

7.3.1 人口

人口问题是当前世界上人们最关心的问题之一，它与国家的繁荣昌盛、人民的富裕生活休戚相关. 建立人口数学模型的目的，一是预测人口的发展状况，二是为控制人口提供合理的生育方案. 从 18 世纪末开始，有各种类型的人口模型相继问世，下面给出其中的两种.

例 7.3.1 人口的逻辑斯谛模型 马尔萨斯根据百余年的统计资料，在人口的相对增长率是常数这一基本假定下，提出了著名的指数模型：

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t), \tag{7.24}$$

即

$$N(t) = N_0 e^{rt}. \tag{7.25}$$

其中 $N(t)$ 是时刻 t 的人口，N_0 是初始人口，r 是单位时间内人口的相对增长量.

指数模型与人口统计资料在 19 世纪前是基本吻合的，但其后却出现较大的差异. 这主要因为随着人口的增加，自然资源等因素对人口增长的限制作用越来越显著，相对增长率不能再视为常数. 逻辑斯谛模型是对这个基本假定进行修改后得到的.

用 N_m 表示自然资源等因素所容许的极限人口，假定人口的相对增长率是 $r\left(1-\frac{N(t)}{N_m}\right)$，它随 $N(t)$ 的增加而减小. (7.24) 和 (7.25) 变为

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = r\left(1-\frac{N(t)}{N_m}\right)N(t) \tag{7.26}$$

$$N(t) = N_m\left[1+\left(\frac{N_m}{N_0}-1\right)e^{-rt}\right]^{-1} \tag{7.27}$$

(7.25) 和 (7.27) 描述的两个模型如图 7.12 所示.

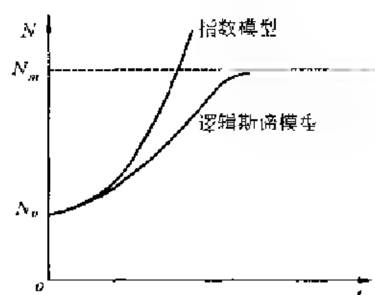


图 7.12

逻辑斯谛模型能较好地与统计资料相吻合，其缺点是 N_m 不易确定. 另外，逻辑斯谛模型在一般的生物数量预测和分析中也有广泛的应用，只要在某个特定的自然环境中这种生物是独立生存的，或者与其它生物相比占绝对优势.

例 7.3.2 按年龄分布的人口预测和控制模型 逻辑斯谛模型只考虑人口总数，但是按年龄分布的人口结构是非常重要的，因为即使两地区目前人口总数相同，如果一地区年青人的比例高于另一地区，那么两地区的人口发展状况将很不一样.

按照控制论的观点，在不同时间(以年计)把各个年龄的人口看作状态变量，各年龄妇女的生育率作为控制变量(即输入变量)，将不同年龄人口的演变过程作为一个系统来讨论，得到下面的人口预测和控制模型.

记 $x_i(t)$ 为第 t 年 i 岁的人口，$d_i(t)$ 为第 t 年 i 岁人口的死亡率，即

$$d_i(t) = \frac{x_i(t) - x_{i+1}(t+1)}{x_i(t)}$$

$s_i(t) = 1 - d_i(t)$ 为存活率，则有

$$x_{i+1}(t+1) = s_i(t)x_i(t), \quad i = 0,1,2,\cdots,m-1 \quad (7.28)$$

其中 m 为最高年龄.

记 $w_i(t)$ 为第 t 年 i 岁的妇女数, $b_i(t)$ 为 i 岁妇女所生婴儿数, $\beta_i(t)$ 为生育率, 即

$$\beta_i(t) = \frac{b_i(t)}{w_i(t)},$$

$[i_1, i_2]$ 为育龄区间, $k_i(t)$ 为女性函数, 即

$$k_i(t) = \frac{w_i(t)}{x_i(t)},$$

则第 t 年出生婴儿数为

$$b(t) = \sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(t) = \sum_{i=i_1}^{i_2} \beta_i(t) k_i(t) x_i(t). \tag{7.29}$$

记 $d'_0(t)$ 为婴儿死亡率, 即第 t 年出生但未活到统计人口时刻的婴儿的比例, 又记 $s'_0(t) = 1 - d'_0(t)$, 则

$$x_0(t) = s'_0(t) b(t). \tag{7.30}$$

(7.28)～(7.30) 描述了人口的演变过程.

总和生育率定义为

$$\beta(t) = \sum_{i=i_1}^{i_2} \beta_i(t), \tag{7.31}$$

是第 t 年平均每个育龄妇女生育的婴儿数.

$$h_i(t) = \frac{\beta_i(t)}{\beta(t)}, \quad i = i_1, \cdots, i_2 \tag{7.32}$$

称生育模式, 是控制不同年龄妇女生育率高低的加权因子. 制订生育政策可归结为确定 $\beta(t)$ 和 $h_i(t)$, 通过 $\beta(t)$ 控制生育的多少, 通过 $h_i(t)$ 控制生育的早晚和疏密.

引入记号

$$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t))^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ s_1(t) & & \ddots & \\ 0 & \ddots & & \ddots \\ & & s_{m-1}(t) & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(t)=\begin{bmatrix} 0,\cdots,0,b'_{i_1}(t),\cdots,b'_{i_2}(t),0,\cdots,0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中$b'_i(t)=s'_i(t)s_i(t)h_i(t)k_i(t)$，　$i=i_1,\cdots,i_2$，则(7.28)～(7.32)可以写作

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\beta(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x}(t). \tag{7.33}$$

$\boldsymbol{x}(t)$是状态变量，$\boldsymbol{A}(t)$是状态转移阵，$\beta(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$是控制变量在稳定状况下$\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$可化为常阵．(7.33)是一个双线性系统．

作为最优控制问题需要构造目标函数，为此先定义几个人口指数：

人口总数　$N(t)=\sum_{i=0}^{m}x_i(t)$；

平均年龄　$R(t)=\frac{1}{N(t)}\sum_{i=1}^{m}ix_i(t)$；

平均寿命　$Q(t)=\sum_{i=0}^{m}\exp\left[-\sum_{j=0}^{i}d_j(t)\right]^*$；

老龄化指数　$w(t)=\frac{R(t)}{Q(t)}$．

目标函数通常是对人口总数和老龄化指数作综合考虑，二者兼顾．所以，目标函数的一般形式可写作$J(\beta(t),h_i(t))=f(N(t))+g(w(t))$，寻求最优的控制变量$\beta(t)$和$h_i(t)$，使$J$达到最佳值．

7.3.2　经济

数学模型在经济管理中的应用非常广泛，如生产调度、设备更新、资源分配、投入产出、安排运输方案、规划服务系统等等，它们大多是用运筹学方法求解的．下面给出用差分方程形式描述、以稳

---

* $Q(t)$的推导过程较繁，其含义是：用第t年的死亡率计算第t年出生的人的平均寿命．

定性分析为目的的一个模型.

例 7.3.3　蛛网模型　在自由竞争的市场经济中常会出现这样的情况：一个时期由于某种商品过剩引起价格下跌，生产这种商品的厂家为追求利润，避免损失，就减少生产或转产. 于是下一时期这种商品会因供不应求而价格上涨，高价格引起的高利润又将吸引一些厂家竞相增加生产，又导致过剩，如此循环. 人们关心的是，这样的循环继续下去，商品的数量和价格的波动是越来越小趋向稳定呢？还是越来越大以至政府不得不人为地加以干预呢？

上面这种循环的结局取决于消费者和产销者对商品的需求和供应关系. 用 x_k 和 y_k 分别表示第 k 时段市场上商品的数量和价格. 价格 y_k 是消费者根据商品数量 x_k 决定的，记作 $y_k=D(x_k)$，称需求函数，D 是降函数；下一时段的商品数量 x_{k+1} 是产销者根据价格 y_k 决定的，记作 $x_{k+1}=S(y_k)$，称供应函数，S 是升函数. 在 $x\sim y$ 坐标图 7.13 上 D 曲线和 S 曲线有一交点 $P_0(x_0,y_0)$，P_0 称平衡点，即如果在某时段 k，有 $x_k=x_0$，$y_k=y_0$，则在以后的时段，x_0 和 y_0 可以保持不变.

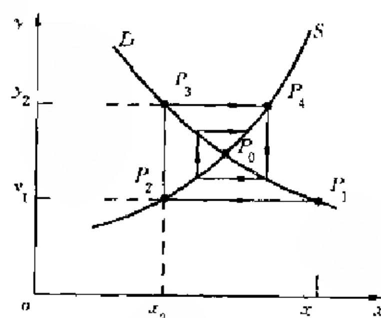


图　7.13

平衡点 P_0 的稳定与否决定了商品数量和价格波动的稳定性.

已知 x_1，由 D 曲线上的点 P_1 决定 y_1，根据 y_1 在 S 曲线上的点 P_2 决定 x_2，再由 D 上的 P_3 决定 y_2，如此下去，x_k 和 y_k 由 $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to \cdots$ 决定. 由图 7.13 看出，在 P_0 点附近，当 D 曲线的斜率(取绝对值)小于 S 曲线的斜率时，(x_k, y_k) 趋向 (x_0, y_0)，P_0 点是稳定的；反之，(x_k, y_k) 远离 (x_0, y_0)，P_0 点不稳定(图 7.14).

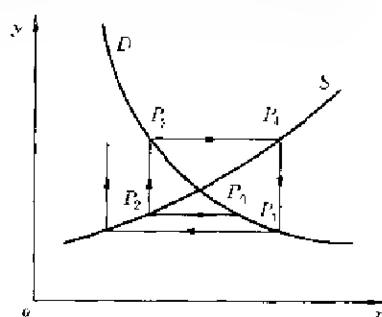


图 7.14

为了进一步的分析，假设需求函数和供应函数在平衡点附近都是线性函数

$$y_k = -a x_k + b, \quad a > 0 \tag{7.34}$$

$$x_{k+1} = c y_k + d, \quad c > 0 \tag{7.35}$$

系数 a 表示减少一个单位供应量引起价格上涨的幅度，反映消费者对商品数量的敏感程度；系数 c 表示价格上涨一个单位引起(下一时段)供应的增加量，反映产销者对价格的敏感程度. (7.34)、(7.35)可写成一阶线性差分方程

$$x_{k+1} = -ac x_k + e, \quad e = cb + d. \tag{7.36}$$

当 $a < \frac{1}{c}$ 时方程的平衡解 x_0 是稳定的，从而 $P_0(x_0, y_0)$ 稳定；反之，P_0 点不稳定.

显然，a，c 较小，即消费者、产销者对商品数量、价格的敏感程

度较低时，有利于市场稳定. 从以上分析还可以得到，当出现不稳定时，政府有两种手段进行干预. 一是控制价格，不论商品数量多少，命令价格不得改变，于是 $\alpha=0$，D 曲线水平，不管 S 曲线如何，总是稳定的；二是控制数量，当供少于求时，从外地调入市场，当供大于求时，收购过剩部分，于是 $\beta=0$，S 曲线竖直，不管 D 曲线如何，也总是稳定的.

7.3.3 社会

在某些社会领域中建立数学模型，可以定量地分析一些社会现象，或为决策者提供一些定量的依据. 例如节 7.2.7 的冲量过程可以用来分析某些复杂社会系统的变化过程，节 7.2.8 的层次分析可以用到方案的抉择、价格的预测等许多方面. 本节再给出把马氏链用于某社会系统的一个例子.

例 7.3.4　等级结构的预报和控制　一些社会系统的成员常常划分为若干等级，如高等教育系统的大学生、硕士生、博士生，军队系统的士、尉、校、将. 分布在各等级中成员的比例称等级结构. 恰当的、合理的等级结构有利于系统的正常运行. 等级结构的变化取决于系统内部各等级成员的转移及系统内外的成员交流. 建立一个模型描述等级结构的演变过程，一方面可以由当前的等级结构并根据上述影响因素预报若干时间以后的结构，另一方面可以通过某个可控制因素（如外部进入系统的成员数量），使等级结构尽快地达到所期望的目标.

用向量 $\boldsymbol{n}(t)=(n_1(t),n_2(t),\cdots,n_k(t))$ 表示某社会系统成员按等级的分布，其中 $n_i(t)$ 是第 t 年第 i 等级的人数（$t=0,1,2,\cdots$，$i=1,2,\cdots,k$）. 总人数 $N(t)=\sum_{i=1}^{k}n_i(t)$. 记 $a_i(t)=\dfrac{n_i(t)}{N(t)}$，$\boldsymbol{a}(t)=(a_1(t),a_2(t),\cdots,a_k(t))$ 称为系统在第 t 年的一个“结构”. 成员在系统内的流动用转移矩阵 $\boldsymbol{P}=\{p_{ij}\}$ 表示，其中 p_{ij} 是从 t 到 $t+1$ 第

i 等级的成员转移到第 j 等级的比例. 系统内外的成员交流用调入比例 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_k)$和调出比例 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_k)$表示, 其中 r_i 是每年调入的成员属于第 i 等级的比例, w_i 是每年第 i 等级的成员被调出的比例. p_{ij}, r_i, w_i 应满足

$$p_{ij} \geqslant 0,\ r_i \geqslant 0,\ w_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k} r_i = 1,\ \sum_{j=1}^{k} p_{ij} + w_i = 1 \tag{7.37}$$

记第 t 年调入总人数为 $R(t)$, 各等级人数的演变可表为

$$n_j(t+1) = \sum_{i=1}^{k} p_{ij} n_i(t) + r_j R(t), \quad j = 1,2,\cdots,k \tag{7.38}$$

记第 t 年调出总人数为 $w(t)$, $w(t) = \sum_{i=1}^{k} w_i n_i(t)$. 人数增长量为 $M(t+1) = N(t+1) - N(t)$. 显然, $R(t) = w(t) + M(t+1)$. 于是(7.38)可写作

$$n_j(t+1) = \sum_{i=1}^{k} (p_{ij} + w_i r_j) n_i(t) + r_j M(t+1), \quad j = 1,2,\cdots,k$$

或记作

$$\boldsymbol{n}(t+1) = \boldsymbol{n}(t)(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{r}M(t+1). \tag{7.39}$$

(7.39)是该系统的基本方程.

记 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$, 满足 $q_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{k} q_{ij} = 1\ (i = 1,2,\cdots,k)$, 即 $\boldsymbol{Q}$ 是随机矩阵. 当系统总人数不变, 即 $M(t) = 0$ 时, (7.39)化为

$$\boldsymbol{a}(t+1) = \boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{Q}, \tag{7.40}$$

系统结构 $\boldsymbol{a}(t)$服从马尔可夫链模型.

当已知 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}(0)$及 $M(t)$(譬如遵从几何增长律 $M(t) = M_0\lambda^t$)时, (7.39)或(7.40)可以用来预报系统成员的等级分布 $\boldsymbol{n}(t)$

或结构 $\boldsymbol{a}(t)$

下面在系统总人数不变，即(7.40)式的基础上讨论以调入比例 $\boldsymbol{r}$ 为控制变量的系统结构 $\boldsymbol{a}(t)$ 的控制问题.

首先给出可保持性的概念. 一个结构 $\boldsymbol{a}$ 称为可保持的，是指对于任意给定的 $\boldsymbol{P}$(从而 w 亦给定)，存在 $\boldsymbol{r}$ 使 $\boldsymbol{a}$ 满足 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{Q}$，或等价于 $\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{a}w^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})$，且 $r_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k}r_i=1$ 成立. 它意味着，若对于某个 t，$\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}$，那么在某个 $\boldsymbol{r}$ 作用下，$\boldsymbol{a}(t+1)=\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{a}$ 被保持住.

$\boldsymbol{a}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{k}b_i\boldsymbol{x}_i,$$

$$b_i=\frac{r_id_i}{\sum_{j=1}^{k}r_jd_j},$$

$$\boldsymbol{x}_i=d_i^{-1}\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})^{-1},$$

其中 d_i 是 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})^{-1}$ 的第 i 行元素之和，$d_i>0$；$\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个元素为1，其余为0的单位(行)向量. 因为 $r_i\geqslant 0$ 等价于 $b_i\geqslant 0$，所以当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 能表示为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 的凸组合时，$\boldsymbol{a}$ 是可保持的.

几何上，所有的结构 $\boldsymbol{a}$（满足 $a_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{k}a_i=1$）构成 k 维空间的一个超平面 $\mathscr{A}$，是一个凸域，而 $\boldsymbol{x}_i\in\mathscr{A}$. 于是所有可保持的结构组成的域是以 $\mathscr{A}$ 中的 $\boldsymbol{x}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为顶点构成的凸域 $\mathscr{B}$，称可保持域.

一个有实际意义的控制问题是，对于给定的 $\boldsymbol{P}$ 和期望达到的、可保持的结构 $\boldsymbol{a}^*$，寻求调入比例控制序列 $\boldsymbol{r}(t)$，使从初始结构 $\boldsymbol{a}(0)$ 尽快地达到或接近 $\boldsymbol{a}^*$.

该问题的一个解法是先定义两个结构 $\boldsymbol{a}^{(1)}$，$\boldsymbol{a}^{(2)}$ 间的“距离”为

$$D(\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)}) = \sum_{i=1}^{k}\mu_i(a_i^{(1)} - a_i^{(2)})^2. \tag{7.41}$$

其中 μ_i 是非负的权重，然后求解如下的优化问题：

$$\begin{aligned}&\min_{r(0)}\sum_{i=1}^{k}\mu_i(a_i^* - a_i(1))^2,\\ &\boldsymbol{a}(1) = \boldsymbol{a}(0)(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}(0)),\\ &r_i(0)\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k}r_i(0) = 1,\end{aligned} \tag{7.42}$$

即寻求 $\boldsymbol{r}(0)$ 使 $\boldsymbol{a}(1)$ 最接近 $\boldsymbol{a}^*$. 将 $\boldsymbol{r}(0)$ 简记作 $\boldsymbol{r}$，且令 $y=(\boldsymbol{a}(0)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{a}^*-\boldsymbol{a}(0)\boldsymbol{P})$，则(7.42)可归结为

$$\min_{r_i}\sum_{i=1}^{k}\mu_i(y_i - r_i)^2, \tag{7.43}$$

$$r_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k}r_i = 1$$

得到 $\boldsymbol{r}(0)$ 和 $\boldsymbol{a}(1)$ 后，以 $\boldsymbol{a}(1)$ 作为新的 $\boldsymbol{a}(0)$，重复上述步骤可以得到 $\boldsymbol{r}(1)$ 和 $\boldsymbol{a}(2)$，如此下去直至对于某个 t 有 $\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}^*$，或接近到满意的程度.

7.3.4 交通

许多交通问题可以用数学模型来研究，例如描述车流在高速公路上的分布规律和堵塞、疏散过程；研究交通量在道路网上的分布和如何实现最优分配等. 很多交通模型属于图论、运筹学、数理统计的应用范畴. 下面给出一个怎样控制红绿灯开放时间以尽量减少堵塞车辆的模型.

例 7.3.5 超饱和交通网络控制模型 城市交通网络由一些交叉路口和互接路段组成. 考察由两条横向公路、两条纵向公路和四个交叉路口组成的典型网络. 公路都是单行线，方向如图 7.15 所示，且不许左右转弯. 超饱和交通网络是指在路口处等候的车队

足够长，以至在绿灯持续时间内有连续不断的车辆通过. 交通控制的目的是调节各路口的绿灯时间，使等候的车队长度尽可能短.

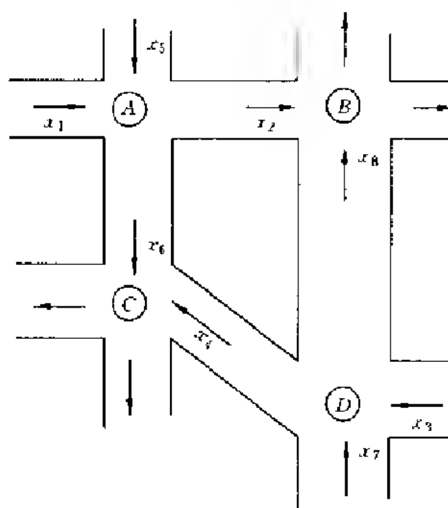


图 7.15

在稳定状况下，设各路口红绿灯的变化是周期性的. 以它们的共同周期为单位将时间离散化. 第 t 周期在各路口等候的、到达的、通过的车队长度分别记作 $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$，显然有

$$x_i(t+1) = x_i(t) + y_i(t) - z_i(t),$$

$$i = 1,2,\cdots,8,\ t = 0,1,\cdots,N-1. \quad (7.44)$$

在超饱和情况下，$z_i(t)$ 可表示为

$$z_i(t) = \alpha_i u_i(t),$$

其中 α 是一周期长的时间内能通过路口的第 i 车队的长度，称饱和车流长度；$u_i(t)$ 是第 i 车队所在路口的绿灯时间在整个周期中占的比例，$0 \leqslant u_i(t) \leqslant 1$. 如果忽略黄灯时间，则路口处纵向车队的绿灯时间是横向车队的红灯时间. 由图可知

$$u_5(t) = 1 - u_1(t), \quad u_6(t) = 1 - u_4(t),$$

$$u_7(t) = 1 - u_3(t), \quad u_8(t) = 1 - u_2(t).$$

为确定 $y_i(t)$，设车队由路口 A 行驶至路口 B 或 C 所需时间为一个周期；由路口 D 行驶至 B 或 C 需两个周期. 所以

$$y_2(t) = z_1(t-1), \quad y_4(t) = z_3(t-2),$$

$$y_6(t) = z_5(t-1), \quad y_8(t) = z_7(t-2).$$

而 $y_1(t)$，$y_3(t)$，$y_5(t)$，$y_7(t)$则要由本网络以外的系统提供. 将 $y_i(t)$和 $z_i(t)$的关系式代入(7.44)得

$$\left.\begin{aligned}
x_1(t+1) &= x_1(t)+y_1(t)-\alpha_1 u_1(t) \\
x_2(t+1) &= x_2(t) - \alpha_2 u_2(t) + \alpha_1 u_1(t-1) \\
x_3(t+1) &= x_3(t)+y_3(t)-\alpha_3 u_3(t) \\
x_4(t+1) &= x_4(t) - \alpha_4 u_4(t) + \alpha_3 u_3(t-2) \\
x_5(t+1) &= x_5(t)+y_5(t)-\alpha_5(1-u_1(t)) \\
x_6(t+1) &= x_6(t) - \alpha_6(1-u_4(t)) + \alpha_5(1-u_1(t-1)) \\
x_7(t+1) &= x_7(t)+y_7(t)-\alpha_7(1-u_4(t)) \\
x_8(t+1) &= x_8(t) - \alpha_8(1-u_2(t)) + \alpha_7(1-u_3(t-2))
\end{aligned}\right\} \tag{7.45}$$

其中 α_i 和 $y_i(t)$是已知量，$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_8(t))^{\mathrm{T}}$ 是状态向量，$\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))^{\mathrm{T}}$ 是控制向量. 根据实际情况，$\boldsymbol{x}(t)$和 $\boldsymbol{u}(t)$通常要满足约束条件：

$$0 \leqslant \boldsymbol{x}(t) \leqslant \boldsymbol{x}_{\max}; \quad \boldsymbol{u}_{\min} \leqslant \boldsymbol{u}(t) \leqslant \boldsymbol{u}_{\max} \tag{7.46}$$

$\boldsymbol{x}_{\max}$是各车队所在街区对其最大车队长度的限制，$\boldsymbol{u}_{\min}$和 $\boldsymbol{u}_{\max}$是绿灯持续时间百分比的下界和上界.

作为最优控制问题，常用形如

$$J(\boldsymbol{x}(t)) = \sum_{t=1}^{N} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) Q \boldsymbol{x}(t)$$

的二次函数作为指标，寻求控制变量 $\boldsymbol{u}(t)$，使由(7.45)、(7.46)解出的 $\boldsymbol{x}(t)$所确定的 $J(\boldsymbol{x}(t))$达到最小.

7.3.5 医学

随着生物科学的数学化，一门以建立和应用数学模型来研究医药学中数量规律的学科——数理医药学正在兴起. 它的主要内容包括：分析流行病的传播机制并作出预测；基于统计资料和贝叶斯(Bayes)模型进行疾病诊断；用室模型分析药物、毒物及其代谢物在机体内的吸收、分布、代谢和排泄过程；用决策矩阵对临床检验作出临床诊断；以及描述肿瘤的生长过程等.

例 7.3.6 流行病阈值模型 假设某种流行病在一个封闭的人群中传播. 人群分为三类：易感染类(健康者)记作 S；感染类(带菌的病人)记作 I；移除类(病愈免疫、与易感染者隔离、病死)记作 R. 在任意时刻，每个人必定属于且只能属于一类，而在整个过程中一个人的类别转移为：$S \to I \to R$. 因为流行病是由易感染者和感染者的相互接触而传播，治愈率(包括病死率)大致稳定，所以可作合理的假设：

(1) 时刻 t 三个类别的人数分别记作 $S(t)$，$I(t)$ 和 $R(t)$. 总人数为 N，开始时 $S(0)=S_0$，$I(0)=I_0$，$R(0)=0$.

(2) 单位时间内一个感染者能传染的人数与易感染人数成正比.

(3) 单位时间内移除类人数的增加与感染人数成正比.

由此可以列出：

$$\left.\begin{aligned} &\dot{S}(t) = -\alpha SI \\ &\dot{I}(t) = \alpha SI - \beta I \\ &\dot{R}(t) = \beta I \\ &S(0) = S_0,\ I(0) = I_0 = N - S_0,\ R(0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (7.47)$$

其中 $\alpha(>0)$ 称感染系数，$\beta(>0)$ 称移除系数. 令

$$\rho=\frac{\beta}{\alpha} \tag{7.48}$$

(7.47)第 2 式可写作

$$\dot{I}(t)=\alpha I(S-\rho).$$

因为 $\dot{S}(t)\leqslant 0$，所以如果 $S_0\leqslant\rho$，则对任意时刻 t，$\dot{I}(t)\leqslant 0$，即感染人数始终减少，流行病不会蔓延开. 可见 ρ 代表了一个临界值，初始易感染人数超过它，流行病才会蔓延. ρ 称阈值. 某地区的卫生保健水平越高，感染系数 α 越小；若移除主要由病愈免疫和隔离所致，则医疗、管理水平越高，移除系数 β 越大. 于是由(7.48)知，阈值 ρ 越大，流行病越不容易蔓延.

假设初始时刻感染人数 I_0 很小，而易感染人数 S_0 大于且接近于阈值 ρ，即

$$S_0\approx N,\quad S_0=\rho+\delta,\quad \delta\ll\rho.$$

若估计流行病蔓延的人数为 Z，则 Z 等于 S_0 与 $t\to\infty$ 时易感染人数 S_∞ 之差：

$$Z=S_0-S_\infty.$$

(7.47)第 1,2 式可表为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}=\frac{\rho}{S}-1.$$

它在条件 $I|_{S=S_0}=I_0=N-S_0$ 下的解是

$$I(S)=\rho\ln\frac{S}{S_0}-S+N. \tag{7.49}$$

过(S_0,I_0)的一条相轨线如图 7.16 所示，当 $t\to\infty$，$S\to S_\infty$ 时，$I\to I_\infty=0$. 注意到 $S_0\approx N$ 和 $Z=S_0-S_\infty$，由(7.49)得

$$Z+\rho\ln\left(1-\frac{Z}{S_0}\right)\approx 0.$$

因为$\frac{Z}{S_0}<1$，利用对数函数的泰勒(Taylor)展开可得

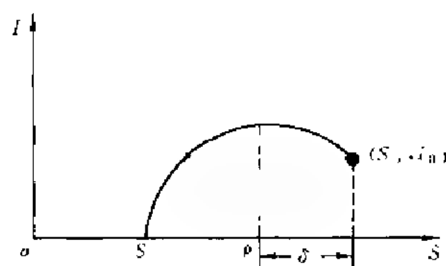


图 7.16

$$Z - \rho\left(\frac{Z}{S_0} + \frac{Z^2}{2S_0^2}\right) \approx 0.$$

解出 Z：

$$Z \approx 2\,\frac{S_0(S_0 - \rho)}{\rho}.$$

根据假设，

$$Z \approx 2\delta.$$

即流行病蔓延人数约为该地区人数超过阈值的那一部分人数的两倍.

7.3.6 生产

生产领域中的数学模型种类繁多，寻求最佳方案使产量最大、效益最高、消耗最小等优化问题常常是建模的主要目的. 选择合适的目标函数是建模的一个重要步骤. 下面是工业生产中的一个简单例子.

例 7.3.7 钢梁轧制中的一个优化问题 用连续热轧法制造钢梁时需经两次切割. 先粗轧，把柱状钢材轧成梁的雏形，再把冷却后的梁精轧，得到给定长度为 L 的成品梁. 粗轧冷却后的梁的长度呈正态分布，其均值 M 可由轧机调整，而均方差是轧机性能决定的，是可测量的已知常数 σ. 如果冷却梁的长度大于 L，精轧

时把多余的部分切掉；如果长度小于 L，就整个报废. 精轧的误差忽略不计. 讨论如何调整轧机的参数 M 使精轧时浪费的钢材最少.

冷却梁的长度是随机变量 X，服从 $N(M,\sigma^2)$ 分布. 记概率 $P(X\geqslant L)$ 为 P，P 是每粗轧一根钢梁不至于在精轧时整根报废的概率. 设粗轧梁共 N 根，则可得到成品梁 Np 根（N 充分大使 Np 为整数），而粗轧 N 根钢梁所消耗的钢材总长度为 NM，于是得到一根成品梁平均消耗的钢材长度为 $\frac{NM}{Np}=\frac{M}{p}$，把这个量定义为目标函数，记作

$$Q(M)=\frac{M}{p} \tag{7.50}$$

求 M 使 $Q(M)$ 达到最小，精轧时浪费的钢材当然也会最少.

记 $Y=X/\sigma$，$\mu=M/\sigma$，$\lambda=L/\sigma$，则 Y 服从 $N(\mu,1)$ 分布，且

$$P(X\geqslant L)=P(Y\geqslant\lambda)=\int_\lambda^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]dx$$
$$=\int_{\lambda-\mu}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy.$$

若记

$$\Phi(Z)=\int_Z^\infty\varphi(y)dy,\quad \varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right),$$

则

$$P(X\geqslant L)=\Phi(Z),\quad Z=\lambda-\mu \tag{7.51}$$

因为 $Q=\frac{M}{p}=\frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda-\mu)}$，所以上述极值问题化为求 μ 使 $Q_1=\frac{\mu}{\Phi(\lambda-\mu)}$ 达到最小值. 由 $\frac{dQ_1}{d\mu}\bigg|_{\mu=\mu^*}=0$，得到 μ^* 应满足

$$\mu^*=F(\lambda-\mu^*),\quad F(Z)=\frac{\Phi(Z)}{\varphi(Z)}. \tag{7.52}$$

已知 λ，由(7.52)可解出 μ^*，进而得到使 $Q(M)$ 达到最小的 $M^*=\sigma\mu^*$.

7.3.7 生态

随着生物再生资源的盲目超量开发和环境污染的日益严重，自然界生态平衡失调现象频繁出现，生态学已越来越被人们重视．数学模型在认识复杂的生态现象、帮助人们更有效地开发生态资源等方面起着越来越重要的作用．

描述单一生物种群的生长规律常用例 7.3.1 的逻辑斯谛模型，研究两个种群共生规律的有著名的食饵—捕食者(prey-predator)模型和导致一个种群灭绝的竞争模型．下面给出一个考虑经济效益的生物资源开发模型．

例 7.3.8 再生资源的开发 像捕渔业、林业这样的生物再生资源的开发产业中，通常的目标是在保持稳定产量条件下使经济效益最高．首先在考虑收获得到的收入和所花费用的情况下建立模型，给出最优开发策略，并讨论自由竞争下资源枯竭的可能，然后考虑长期经营时存在折扣率(discount)的情形．

以捕渔业为例，做如下假设：

(1) 渔场中鱼的自然增长遵从逻辑斯谛模型；

(2) 单位时间捕获量等于单位时间渔场中鱼的增长量，以保持产量的稳定；

(3) 鱼的单价是常数 p，而费用(单位产量)与当时渔场中鱼量成反比，比例系数为 b．

时刻 t 渔场中鱼量记作 $x(t)$，单位时间捕获量记作 $y(t)$．按照假设，

$$\dot{x}(t) - y(t) = f(x(t)), \quad f(x) - ax(x - x). \tag{7.53}$$

其中 a 是最大相对增长率，x 是渔场中最大鱼量．记单位时间的收入为 $R(x)$，单位时间的支出为 $c(x)$，则

$$R(x) \quad pf(x), \quad c(x) - c_1(x)f(x), \quad c_1(x) = \frac{b}{x}. \tag{7.54}$$

于是单位时间的收益为

$$s(x)=R(x)-c(x)=\left(p-\frac{b}{x}\right)f(x)=a(px-b)(\bar{x}-x). \tag{7.55}$$

记使得收益 $s(x)$ 最大的渔场中鱼量为 x^*，可以解得

$$x^*=\begin{cases}\dfrac{\bar{x}}{2}+\dfrac{b}{2p}, & b\leqslant p\bar{x},\\ \bar{x}, & b>p\bar{x}.\end{cases} \tag{7.56}$$

由上可知，只要将渔场中鱼量保持在 x^*，就可在保持稳定产量条件下使收益 $s(x)$ 最大，这是独家经营的渔场能采用的最优开发策略. 而在自由竞争情况下，譬如在公海上捕鱼，特别是在贫困且失业率高的国家里，只要收益 $s(x)>0$，就会吸引开发者，于是渔场中鱼量不会稳定在 x^*，而是要趋向于某个 x_0，x_0 满足 $s(x_0)=0$. 在根据前面的假设得到的模型(7.55)中，$x_0=b/p\neq 0$(设 $b\leqslant p\bar{x}$)，即渔场资源不会枯竭.

但是在自由开发的实际情况下，会引起再生资源的枯竭. 为了解释这种现象需要修改(3)中对费用函数的假设. 事实上，若 $\tilde{b}$ 表示资源将近枯竭时单位捕获量所需费用，则不妨将(7.54)中的 $c(x)$ 和 $c_1(x)$ 改为

$$\tilde{c}(x)=\tilde{c}_1(x)f(x),\quad \tilde{c}_1(x)=\frac{\tilde{b}}{x+1}.$$

因为 $\tilde{b}\leqslant p$ 时 $\tilde{s}(x)=R(x)-\tilde{c}(x)\geqslant 0\ (0\leqslant x\leqslant\bar{x})$，且 $\tilde{s}(0)=0$，所以在自由开发下，为追求利润会使 $x\to 0$，即导致资源枯竭.

在长期经营时常要考虑收益 $s(x)$ 的时间效应，引入折扣率 δ，则长期经营者的收益折合成现值为 $G_1(x)=\int_0^\infty s(x)e^{-\delta t}dt=\frac{1}{\delta}s(x)$. 另外，不妨设开始时鱼量处于平衡位置 $\bar{x}$(这对结果没有影响)，则当鱼量保持在 x 时经营者的即时收益为 $G_2(x)=p(\bar{x}$

$-x)-\int_{x}^{\bar{x}}\bar{c}_1(x)\mathrm{d}x$. 这种情形下经营者的最优开发策略应由求解 x 使 $G(x)-G(x)+G_2(x)$ 达到最大得到.

设上述极值问题的解是 $\hat{x}$,并将 $\bar{c}_1(x)$ 重新记作 $c(x)$. 由 $G'(\hat{x})=0$ 和 $s(x)=f(x)(p-c(x))$ 可知,$\hat{x}$ 应满足

$$\delta-f'(\hat{x})=-\frac{f(\hat{x})c'(\hat{x})}{p-c(\hat{x})}.$$

记 $J(x)=\delta-f'(x)$, $H(x)=-\frac{f(x)c'(x)}{p-c(x)}$. 分两种情形讨论.

(1) 若 $\bar{b}\geq p$,则存在 $x_0\neq 0$,使 $p-c(x_0)=\frac{\bar{b}}{x_0+1}$,且 $s(x_0)=0$. 最优解 $\hat{x}$ 由 $J(x)$ 与 $H(x)$ 的交点求得(图 7.17). 在自由竞争下也不会使 x 趋于零,即不会导致资源枯竭.

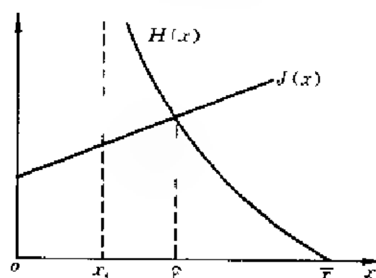


图 7.17

(2) 若 $\bar{b}<p$,则最优解 $\hat{x}$ 由图 7.18 得到. 可以证明,当 $\delta>2f'(0)-2a\bar{x}$ 时 $J(x)$ 与 $H(x)$ 无交点,且 $G'(x)<0$,于是 $G(x)$ 的极大点为 $x=0$,即追求 $G(x)$ 最大的策略将导致资源枯竭.

7.3.8 体育

用科学方法进行体育训练可以更快更有效地提高运动成绩,

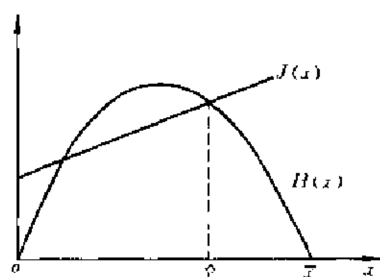


图 7.18

已经日益被体育界所接受.运动力学、运动生理学等正逐渐成为教练员、运动员的必修科目.在体育运动科学化的进程中,数学模型也起着一定的作用.

例 7.3.9 铅球掷远模型 这是体育项目中最简单的模型之一.已知铅球出手高度 h,出手速度 v,忽略空气阻力,问出手角度 α 多大时投得最远.并分析该成绩对出手速度和出手角度的灵敏性.

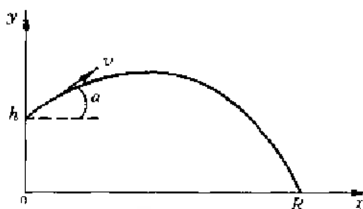


图 7.19

取坐标系如图 7.19,由力学定律知 $x(t)$、$y(t)$ 应满足

$$\begin{cases}\ddot{x}(t)=0, & x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=v\cos\alpha, \\ \ddot{y}(t)=-g, & y(0)=h, \quad \dot{y}(0)=v\sin\alpha,\end{cases}$$

其解为

$$x(t) = v\cos\alpha \cdot t, \quad y(t) = h + v\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

投掷距离 R 为 $y(t)=0$ 时的 x 值，即 R 满足

$$\begin{cases} R = v\cos\alpha \cdot t \\ 0 = h + v\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

消去 t 得

$$h + R\tan\alpha = \frac{gR^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

由 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\alpha}=0$ 可以求出使 R 达到最大的 α 满足

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\left(1+\frac{gh}{v^2}\right)}}. \tag{7.56}$$

最远投掷距离为

$$R_m = \frac{v^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v^2}}. \tag{7.57}$$

显然，$\sin\alpha<\frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $\alpha<45°$. 设 $h=1.5\,\mathrm{m}$，$v=10\,\mathrm{m/s}$，可以算出 $\alpha\approx41°$，$R_m\approx11.4\,\mathrm{m}$.

投掷距离 R 依赖于参数 v，α 和 h，可以解出

$$R = \frac{v^2\sin2\alpha}{2g}\left[1+\sqrt{1+\frac{2gh}{v^2}\frac{1}{\sin^2\alpha}}\right].$$

当 $\frac{2gh}{v^2}\frac{1}{\sin^2\alpha}$ 较小时，利用 $\sqrt{1+x}\approx1+\frac{x}{2}$ 得

$$R \approx \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha\left(1+\frac{gh}{2v^2\sin^2\alpha}\right).$$

由此可以推算出，对于出手速度的相对微小改变量 $\frac{\mathrm{d}v}{v}$，

$$\frac{\mathrm{d}R}{R} \approx 2\frac{\mathrm{d}v}{v}.$$

对于出手角度的相对微小改变量$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}$，

$$\left|\frac{\mathrm{d}R}{R}\right| \approx 2\alpha\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{\tan 2\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}.$$

在最佳角度 $\alpha \approx 41°$处，$\left|\frac{\mathrm{d}R}{R}\right| \approx 1.2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}$. 由此可知投掷距离对出手速度的灵敏程度比对出手角度的灵敏程度高.

8 不 等 式

8.1 引言

8.1.1 不等式的意义

通常总是在一定的集合(数的集合,函数的集合,向量的集合,矩阵的集合,序列的集合等)上来考察不等式问题.即要讨论的不等式,都包含着在某个集合内取“值”的变元,这里的“值”泛指各类集合的元素.有两种不同的情况:一种情况,称为**绝对不等式**(absolute inequality),在给定的集合上变元可以任意取值,不等式恒成立.另一种情况,称为**条件不等式**(conditional inequality),在给定集合内,仅对变元的某些特殊取值(即不等式的解),不等式才成立.这时不等式成为变元取值的条件.绝对不等式与条件不等式均相对一定的集合而言,对给定的集合进行扩充,绝对不等式对于扩充后的集合可能成为条件不等式;相反,如果已经求出条件不等式在给定集合上的解,并且限制在解集上,条件不等式便成为绝对不等式.本章主要介绍绝对不等式.

8.1.2 常用不等式的类型

常用不等式有下述三种基本类型:

(1) **有限不等式**.最主要的是表达某些有限和之间关系的不等式.基础的不等式都是有限的.

(2) **无限不等式**.最主要的是表达某些无穷级数之间关系的不等式.

(3) **积分不等式**.表达某些积分之间关系的不等式.

后两种不等式常常是有限不等式的推广.下面举一个典型的例子.

例 8.1.1 (1) 柯西不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$
$$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbf{R}$$

这是有限不等式.

(2) 推广为无限和不等式.设 $x_i, y_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots$,且 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$、$\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty$(即级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$ 收敛),则

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\right).$$

(3) 进一步可推广为积分不等式,称为施瓦兹不等式:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x,$$
$$\forall f, g \in L^2([a,b]).$$

本章着重提供一些较深入的不等式,特别是各种积分不等式.例如,在分析中,算术平均-几何平均不等式、赫尔德(Hölder)不等式和闵可夫斯基(Minkowski)不等式是基本的,在本章中着重给出这些不等式的积分形式,先引用一下有限形式只是为了便于读者理解.

8.1.3 几个特点

(1) 本章的重点放在现代分析方面,提供尽可能多的重要的不等式.

(2) 不等式的材料比较分散,进行过粗的分类(如只分成有限形式、无限形式和积分形式)或过细的分类(如一二个不等式就成为一节),都会显得混杂和零乱,故试图作一个比较恰当的分类.

(3) 本章主要篇幅用于各种不等式的描述而不作推证. 但是,也介绍能引出某些不等式的一些基本定理(尽管它们本身并不是不等式),指出一些重要基本不等式的背景,提示一些不等式推证的简单线索,以及给出可以用来建立某些不等式的方法.

(4) 在叙述方式上,一是大多数情况采用"正不等式"的方式,"正不等式"是指变元非负的有限和无限不等式,以及函数非负的积分不等式,这类不等式通过对变元或函数取绝对值和取模,便可适用于一切实值和复值的情形,因此具有一般性. 例如,由例(8.1.1)中的(1)和(3)两个对实值成立的柯西不等式推出

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right),$$

$$\left|\int_a^b fg\,\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \left(\int_a^b |fg|\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b |f|^2\mathrm{d}x\int_a^b |g|^2\mathrm{d}x,$$

在这里,x_i,y_i 可取任何复数,f 和 g 可取任何 L^2 可积复值函数. 二是关于假设条件,有的交代清楚,有的加以省略,对一些重要的基本不等式将比较严格而详细地说明其成立时必需具备的条件,但有些则不作具体的说明,这是因为许多情形下不等式成立所需具备的条件是自明的. 比如,一个积分不等式要成立,其所含的各个函数总要满足使积分有意义(存在)的某些条件.

8.2 几个基本不等式

8.2.1 杨不等式

下面是杨(Young)给出的简单而有用的不等式.

定理 8.2.1 设函数 $\varphi\in C([0,\infty))$ 严格单调递增,$\varphi(0)=0$,则 $\forall\ a,b\in[0,\infty)$ 有

$$ab \leqslant \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_0^b \varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x.$$

其中 φ^{-1} 是 φ 的反函数,等号仅当 $b=\varphi(a)$ 时成立.

如图 8.1 所示，定理 8.2.1 有明显的几何解释：ab 是直线 $x=0$，$x=a$，$y=0$，$y=b$ 围成的矩形的面积，它不超过曲线 $y=\varphi(x)$，直线 $x=a$，$y=0$ 所围面积 $\int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x$ 与曲线 $y=\varphi(x)$，直线 $x=0$，$y=b$ 所围面积 $\int_0^b \varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x$ 之和.

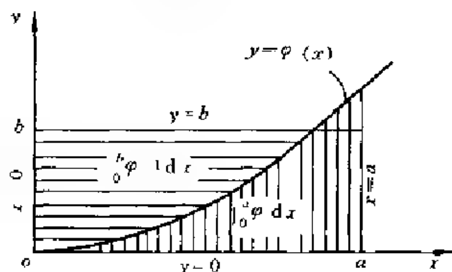


图 8.1

定理 8.2.1 的一个直接推论如下：

定理 8.2.2 在定理 8.2.1 的条件下，成立

$$ab \leqslant a\varphi(a)+b\varphi^{-1}(b).$$

定理 8.2.2 比定理 8.2.1 要弱，但在应用中常有同样的效果.

选取特殊的 φ，从定理 8.2.1 可得出一些有意义的结果.

例 8.2.3 设 $\varphi(x)=x^{p-1}$，$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则依定理 8.2.1，$\forall\, a>0, b>0$ 有

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},$$

等号仅当 $a^p=b^q$ 时成立. 由这个不等式可以推导出重要的赫尔德不等式.

例 8.2.4 设 $\varphi(x)=\log(1+x)$，$a>1$，$b>0$. 这时只要在定理 8.2.1中用 $a-1$ 代替 a，便得

$$ab \leqslant a\log a - a + e^b,$$
等号仅当 $b=\log a$ 时成立. 这个不等式在傅里叶级数理论中常有用.

在定理 8.2.1 中,如果利用数格子点(平面上具有整数坐标的点)的个数来代替计算面积,便得到如下定理.

定理 8.2.5 若函数 $\varphi:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ 严格单调递增,$\varphi(0)=0$,则对任何整数 $m\geqslant 0, n\geqslant 0$ 有
$$mn \leqslant \sum_{i=0}^{m}[\varphi(i)] + \sum_{j=0}^{n}[\varphi^{-1}(j)],$$
其中记号$[x]$表示 x 的整数部分.

现在给出两个更广泛的包含定理 8.2.1 的定理.

定理 8.2.6 设 $f_i\in C([0,\infty))(i=1,2,\cdots,n)$ 非负且严格单调递增,$\prod_{i=1}^{n} f_i(0)=0$,则对任何 $a_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$ 有
$$\prod_{i=1}^{n} f_i(a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_0^{a_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f_j(x)\cdot \mathrm{d}f_i(x),\quad n>1,$$
等号仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

定理 8.2.7 设 $g_i\in C([0,\infty))$严格单调递增且 $g_i(0)=0,(i=1,2,\cdots,n)$,又
$$\prod_{i=1}^{n} g_i^{-1}(x)=x,$$
则对任何 $a_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$有
$$\prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_0^{a_i}\frac{g_i(x)}{x}\mathrm{d}x$$
等号仅当 $g_1(a_1)=g_2(a_2)=\cdots=g_n(a_n)$时成立.

在定理 8.2.6 中,对于 $i=1,2,\cdots,n$,令 $f_i=g_i^{-1}$,且用 a_i 代替 $f(a_i)$,便直接得出定理 8.2.7. 进一步,如果令
$$n=2,\ g_1(x)=x\varphi(x),\ g_2(x)=x\varphi^{-1}(x),$$

容易验证

$$g_1^{-1}(x)g_2^{-1}(x) = x,$$

$$\varphi(x) = \frac{g_1(x)}{x} = g_2^{-1}(g_1(x)),\ \varphi^{-1}(x) = \frac{g_2(x)}{x} = g_1^{-1}(g_2(x)),$$

这时，从定理 8.2.7 直接得出定理 8.2.1.

8.2.2 关于积分的平均值不等式

有限的算术平均-几何平均不等式的一般形式为

$$(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n})^{1/p} \leqslant \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p}, \quad (8.1)$$

其中 $x_i \geqslant 0, p_i > 0, i = 1,2,\cdots,n, p = \sum_{i=1}^{n} p_i$，等号仅当所有 x_i 相等时成立.

式(8.1)的右端是加权平均，当 $p_i = 1(i = 1,2,\cdots,n)$ 时便是通常的算术平均，式(8.1)的左端是一种几何平均，可改写成

$$(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n})^{1/p} = \exp\left(\frac{p_1\log x_1 + p_2\log x_2 + \cdots + p_n\log x_n}{p}\right),$$

这样等式左端的指数部分也是加权平均.

在下面的讨论中，假设 $\Omega \subset E$（或 $E^n, n \geqslant 2$）是 L 可测集，f 是 Ω 上的非负函数，函数 p 在 Ω 上取正值并称为**权函数**(weight function)，函数 f 在 Ω 上关于权函数 p 的**加权平均**(weighted means)是指

$$\int_\Omega p(x)f(x)\mathrm{d}x \bigg/ \int_\Omega p(x)\mathrm{d}x \quad (8.2)$$

这里的积分是勒贝格(Lebesgue)积分，假定它们是存在的，而且当 $\Omega \subset E^n (n \geqslant 2)$ 时还是重积分，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 下面的定理是相应式(8.1)的关于积分的平均值不等式.

定理 8.2.8 设式(8.2)为有限值，则

$$\exp\left\{\frac{\int_\Omega p(x)\log f(x)\mathrm{d}x}{\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x}\right\} \leqslant \frac{\int_\Omega p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x}$$

等号仅当 $f=c$ (a.e.)时成立，即在几乎处处(almost everywhere)意义下 $f=c$ 时成立，这里 c 为任一常数. 更一般地，对任何常数 $r>0$，下述不等式当右端为有限值时便能成立：

$$\exp\left\{\frac{\int_\Omega p(x)\log f(x)\mathrm{d}x}{\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x}\right\} \leqslant \left\{\frac{\int_\Omega p(x)f^r(x)\mathrm{d}x}{\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x}\right\}^{1/r}, \quad (8.3)$$

等号仅当 $f=c$ (a.e.)时成立.

事实上，把定理 8.2.8 中的不等式用 f^r 代替 f，便能得出不等式(8.3).

从定理 8.2.8 可得到一个推论.

定理 8.2.9 设 f，g 是 Ω 上非负函数，则如下不等式

$$\exp\left\{\frac{\int_\Omega p(x)\log f(x)\mathrm{d}x}{\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x}\right\} + \exp\left\{\frac{\int_\Omega p(x)\log g(x)\mathrm{d}x}{\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x}\right\}$$

$$\leqslant \exp\left\{\frac{\int_\Omega p(x)\log(f(x)+g(x))\mathrm{d}x}{\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x}\right\}$$

当右端是有限值时成立，等号仅当右端的值为零或函数 f 与 g 成比例时成立.

函数 f 与 g(在 Ω 上)**成比例**(proportional)是指：存在两个不全为零的常数 λ 与 μ，使得在 Ω 上至多除去一个零测集外(即几乎处处)能成立等式 $\lambda f=\mu g$. 显然，零函数与任何函数成比例. 一族(有限个或无限个)函数称为**成比例的**，如果它们中的任何两个都成比例.

现在再给出几个有关平均值的不等式.

定理 8.2.10 若 $0<r<s$,则不等式

$$\left(\frac{\int_\Omega p(x)f^r(x)\mathrm{d}x}{\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x}\right)^{1/r} \leqslant \left(\frac{\int_\Omega p(x)f^s(x)\mathrm{d}x}{\int_\Omega p(x)\mathrm{d}x}\right)^{1/s}$$

当右端为有限值时成立,等号仅当 $f=c$ (a.e.)时成立.

定理 8.2.11 设 $\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta,\forall x\in\Omega\subset E$,其中 $\alpha,\beta\in\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$即可以是任何实数或无穷,$f$ 几乎处处不等于 α 和 β,函数 φ 满足条件 $\varphi''(t)>0,\forall t\in(\alpha,\beta)$,则不等式

$$\varphi\left(\frac{\int_\Omega pf\mathrm{d}x}{\int_\Omega p\mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_\Omega \varphi(f)p\mathrm{d}x}{\int_\Omega p\mathrm{d}x} \tag{8.4}$$

当右端为有限值时成立,等号仅当 $f=c$ (a.e.)时成立.

在式(8.4)中取 $\varphi(t)=t\log t$,得不等式

$$\frac{\int_\Omega pf\mathrm{d}x}{\int_\Omega p\mathrm{d}x} < \exp\left(\frac{\int_\Omega pf\log f\mathrm{d}x}{\int_\Omega pf\mathrm{d}x}\right) \tag{8.5}$$

等号仅当 $f=c$ (a.e.)时成立.

在式(8.4)中取 $\varphi(t)=-\log t$,且取权函数 p 使得 $\int_\Omega p\mathrm{d}x=1$,得不等式

$$\exp\left(\int_\Omega p\log f\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_\Omega pf\mathrm{d}x \tag{8.6}$$

8.2.3 关于积分的赫尔德不等式

有限的赫尔德不等式的常用形式是

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}, \tag{8.7}$$

其中 $x_i, y_i \geqslant 0, p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 当 $p<1\,(p\neq 0)$ 时，成立与式(8.6)有相反不等号的不等式；$p<0$ 时假设 $x_i, y_i>0$. 对每一种情形，等号仅当 $(x_1^p, x_2^p, \cdots, x_n^p)$ 与 $(y_1^q, y_2^q, \cdots, y_n^q)$ 线性相关(或说成比例)时成立.

这里用到满足关系

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p\neq 1,\ q\neq 1$$

的实数 p 与 q，通常称这样的 p 与 q 为**共轭指数**.

下面先引进相应于式(8.7)的关于积分的赫尔德不等式. 仍用 Ω 表示 $E^n(n\geqslant 1)$ 上的可测集.

定理 8.2.12 设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 若 $p>1, f\in L^p(\Omega), g\in L^q(\Omega)$，则

$$\int_\Omega |fg|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |g|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

等号仅当 $|f|^p$ 与 $|g|^q$ 在 Ω 上几乎处处(a.e.)成比例时成立. 利用 $L^p(p\geqslant 1)$ 空间的范数，上述不等式可简写成

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_q. \tag{8.8}$$

若 $0<p<1$ 或 $p<0$，$fg\in L^1(\Omega)$，且当 $0<p<1$ 时 $|g|^q\in L^1(\Omega)$，当 $p<0$ 时，$|f|^p\in L^1(\Omega)$，则

$$\int_\Omega |fg|\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_\Omega |f|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |g|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

等号仅当 $|f|^p$ 与 $|g|^q$ 成比例或 $fg=0$(a.e.)时成立.

式(8.8)是积分的赫尔德不等式的常用形式，当 $p=2$ 时 $q=2$，得

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\|g\|_2,$$

或

$$\int_\Omega |fg|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |f|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |g|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \tag{8.9}$$

即**施瓦兹(Schwarz)不等式**，也称**柯西-施瓦兹不等式**或**布尼雅科**

夫斯基 施瓦兹不等式.

定理 8.2.12 的 $p>1$ 的结论是如下更为一般的定理的一个直接推论，而 $p<1$ 时的结论可通过归结为 $p>1$ 的情形而推出.

定理 8.2.13 设 $f_i \in L^1(\Omega)$，$p_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，而且 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$，则

$$\int_\Omega |f_1|^{p_1}|f_2|^{p_2}\cdots|f_n|^{p_n}\,dx \leqslant$$

$$\left(\int_\Omega |f_1|\,dx\right)^{p_1}\left(\int_\Omega |f_2|\,dx\right)^{p_2}\cdots\left(\int_\Omega |f_n|\,dx\right)^{p_n},$$

或写成

$$\left\|\prod_{i=1}^{n}|f_i|^{p_i}\right\|_1 \leqslant \prod_{i=1}^{n}\|f_i\|_1^{p_i},$$

等号仅当 $|f_1|,|f_2|,\cdots,|f_n|$ 中有一个为零或两两均成比例时成立.

定理 8.2.12 与定理 8.2.13 中蕴涵着积分存在性的论断，共有如下四条：

(1) $p>1$：$f\in L^p(\Omega)$，$g\in L^q(\Omega)\Rightarrow fg\in L^1(\Omega)$；

(2) $0<p<1$：fg，$|g|^q\in L^1(\Omega)\Rightarrow |f|^p\in L^1(\Omega)$；

(3) $p<0$：fg，$|f|^p\in L^1(\Omega)\Rightarrow |g|^q\in L^1(\Omega)$；

以上 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

(4) $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$，$p_i>0$；$f_i\in L^1(\Omega)$，$i=1,2,\cdots,n$

$\Rightarrow |f_1|^{p_1}|f_2|^{p_2}\cdots|f_n|^{p_n}\in L^1(\Omega)$.

对于论断(1)～(4)，直接形式的逆命题都不成立，但是存在某种形式的逆定理. 下面是相应于论断(1)的此类定理，有颇为重要的意义.

定理 8.2.14 若 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，且

$$fg \in L^1(\Omega), \forall\, g \in L^q(\Omega),$$

则 $f \in L^p(\Omega)$.

从定理 8.2.12 与定理 8.2.15 可得出一个充要条件.

定理 8.2.15 若 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则

$$\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}x \leqslant K \Leftrightarrow \int_\Omega |fg| \mathrm{d}x \leqslant K^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{q}},$$

$$\forall\, g \in L^q(\Omega), \int_\Omega |g|^q \mathrm{d}x < L.$$

或者写成

$$\|f\|_p^p \leqslant K \Leftrightarrow \|fg\|_1 \leqslant K^{1/p} L^{1/q},$$

$$\forall\, g \in L^q(\Omega), \|g\|_q^q \leqslant L.$$

8.2.4 关于积分的闵可夫斯基不等式

有限的闵可夫斯基(Minkowski)不等式形如

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right]^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}, \quad (8.10)$$

其中 $x_i, y_i \geqslant 0, p>1$. 当 $p<1(p\neq 0)$时,成立与式(8.10)有相反不等号的不等式;$p<0$ 时假设 $x_i, y_i>0$. 对每一种情形,等号仅当$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$线性相关(成比例)时成立.

式(8.10)是常用形式,先引进与它相应的关于积分的闵可夫斯基不等式.

设 $\Omega \subset E^1$ 或 $E^n(n\geqslant 2)$是可测集.

定理 8.2.16 若 $p\geqslant 1$, $f, g \in L^p(\Omega)$,则

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

或者写成

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (8.11)$$

等号仅当 f 与 g(几乎处处)成比例时成立. 若 $p<1$,$(|f|+|g|)^p$

$\in L^1(\Omega)$，且 $|f|^p$ 或 $|g|^p\in L^1(\Omega)$，则

$$\left(\int_\Omega(|f|+|g|)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\geqslant\left(\int_\Omega|f|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_\Omega|g|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.\tag{8.12}$$

等号成立仅当 $|f|$ 与 $|g|$（几乎处处）成比例，或者 $p<0$ 且不等式两端皆为零.

式(8.11) 就是赋范线性空间 L^p 中范数满足的三角不等式. 关于积分的闵可夫斯基不等式，存在着包含多个函数的更一般形式.

定理 8.2.17 若 $p\geqslant1$，$f_i\in L^p(\Omega)$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\left(\int_\Omega|f_1+f_2+\cdots+f_n|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_\Omega|f_1|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$+\left(\int_\Omega|f_2|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\cdots+\left(\int_\Omega|f_n|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

或写成

$$\left\|\sum_{i=1}^n f_i\right\|_p\leqslant\sum_{i=1}^n\|f_i\|_p.\tag{8.13}$$

等号仅当 $f_1,f_2,\cdots,f_n$（几乎处处）成比例时成立. 若 $p<1$，$(|f_1|+|f_2|+\cdots+|f_n|)^p$，$|f_i|^p(i=1,2,\cdots,n)\in L(\Omega)$，则

$$\left(\int_\Omega(|f_1|+|f_2|+\cdots+|f_n|)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\geqslant\left(\int_\Omega|f_1|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$+\left(\int_\Omega|f_2|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\cdots+\left(\int_\Omega|f_n|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.\tag{8.14}$$

等号成立仅当 $|f_1|,|f_2|,\cdots,|f_n|$（几乎处处）成比例，或者 $p<0$ 且不等式两端皆为零.

赫尔德不等式的重要应用之一，就是用来证明闵可夫斯基不等式. 从(8.8)可以推出(8.11)及(8.13).

下面给出伴随着闵可夫斯基不等式的几个不等式，为了叙述简便些，假定所出现的积分都有意义，而且后两个定理只限于讨论 $p>1$ 的情形. 一般地说，当 $p<1$ 时不等式反号.

定理 8.2.18 若 $p>1$,则

$$\int_{\Omega}(|f_1|+|f_2|+\cdots+|f_n|)^p\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\int_{\Omega}|f_1|^p\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|f_2|^p\mathrm{d}x+\cdots+\int_{\Omega}|f_n|^p\mathrm{d}x,$$

若 $0<p<1$,或 $p<0$ 且 $f_i>0$ (a.e.),$i=1,2,\cdots,n$,则

$$\int_{\Omega}|f_1+f_2+\cdots+f_n|^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{\Omega}|f_1|^p\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|f_2|^p\mathrm{d}x+\cdots+\int_{\Omega}|f_n|^p\mathrm{d}x, \quad (8.15)$$

等号仅当 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 中至多有一个是非零(几乎处处不为零的)函数.

定理 8.2.19 若 $p>1$,则

$$\left[\left(\int_{\Omega}|f_1|\mathrm{d}x\right)^p+\left(\int_{\Omega}|f_2|\mathrm{d}x\right)^p+\cdots+\left(\int_{\Omega}|f_n|\mathrm{d}x\right)^p\right]^{1/p}$$

$$\leqslant\int_{\Omega}(|f_1|^p+|f_2|^p+\cdots+|f_n|^p)^{1/p}\mathrm{d}x,$$

等号仅当 $f_1,f_2,\cdots,f_n$(几乎处处)成比例时成立.

定理 8.2.20 设 $\Omega=A\times B\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}$,$p>1$,则

$$\left[\int_A\left\{\int_B|f(x,y)|\mathrm{d}y\right\}^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\leqslant\int_B\left\{\int_A|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\mathrm{d}y,$$

等号成立仅当 f 形如

$$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y), \quad \forall\ (x,y)\in\Omega.$$

8.3 与凸函数单调函数有关的不等式

8.3.1 凸函数、单调函数与不等式

定义 8.3.1 设 f 是区间 $I\subset E^1$ 上定义的函数.如果成立:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

$$\forall\ x_1,x_2\in I,\forall\ \lambda\in[0,1],$$

则称 f 为在 I 上的**凸函数**(convex function). 如果上述不等式的等号仅当 $x_1=x_2$ 时成立,则称 f 为在 I 上的**严格凸函数**(strictly convex function). 如果 $-f$ 是 I 上的凸函数或严格凸函数,则分别称 f 为 I 上的**凹函数**(concave function)或**严格凹函数**(strictly concave function).

定义中的区间 I 可以是开的,闭的,半开半闭的,有限的或无穷的.

由于凸(凹)函数是以不等式为特征性质的一类函数,因而它们本身具有由各种确定的不等关系式刻画的许多重要性质,而且也使它们与一些常用的不等式的建立和推广存在着有机的联系.

下面列出凸函数的几个充分必要条件.

定理 8.3.2 f 是区间 I 上的凸函数$\Leftrightarrow$对满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 的任意 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geqslant 0$ 成立

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i),\quad \forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in I.$$

定理 8.3.3 若 $f\in C(I)$,则下列两条件等价:

(1) f 是区间 I 上的凸函数.

(2) $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},\quad \forall x_1,x_2\in I.$

定理 8.3.3 中的(2)是说,曲线 $y=f(x)$ 的任一条弦的中点必在曲线的上方或在曲线上,这可作为凸函数的最弱形式的定义.

定理 8.3.4 若 f 在区间 I 上二次可微,则下列两条件等价:

(1) f 是 I 上的凸函数;

(2) $f''(x)\geqslant 0,\ \forall x\in I.$

定理 8.3.5 若 $f''(x)>0,\ \forall x\in I$,

则 f 是区间 I 上的严格凸函数.

以上凸函数的概念和性质可推广到多元函数.

单调函数的特征性质也可以用不等式刻划，这里给出几个有用的定理. 下面的定理 8.3.6 非常类似于定理 8.3.2.

定理 8.3.6 f 是区间 $(0,\infty)$ 上的单调递减函数 $\Leftrightarrow$ 对满足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 的任意 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geqslant 0$ 成立

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i),\quad \forall\ x_1,x_2,\cdots,x_n>0.$$

f 严格递减且 $n>1$ 时上述不等式取严格不等号. f 单调递增时取相反的不等式.

定理 8.3.7 若 f 是区间 $(0,\infty)$ 上的单调递减函数，则成立

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}x_i},\quad \forall\ x_1,x_2,\cdots,x_n>0.$$

f 严格递减且 $n>1$ 时上述不等式取严格不等号. f 单调递增时取相反的不等式.

如果在定理 8.3.2 中将条件"$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$"去掉，那末便产生一个非常具体的结论.

定理 8.3.8 对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$ 成立

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

的充分必要条件是 $f(x)=kx$，k 是常数.

8.3.2 有关凸(凹)函数的一些不等式

先看一个简单的例子. 考虑函数

$$f:(0,\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=-\log x.$$

由于 $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$，$\forall x\in(0,+\infty)$，依定理 8.3.5，f 是严格凸函数，利用定理 8.3.2，即可得出有限的算术平均–几何平均不等式(8.1)．

一般地说，我们可以从凸(凹)函数的观点去考察已有的不等式，或者去建立新的不等式．一个在一定条件下成立的不等式，往往是某个定义在一定区域上的凸(凹)函数的凸(凹)性的一种表现形式．当然，这并不是说，推证不等式总要去寻找某个凸函数为出发点，因为建立不等式有多种多样的线索．

下面是关于凸函数的一个一般结论，可用以得出具有交错符号的不等式．

定理 8.3.9 设 f 是区间 $[0,x_1]$ 上的凸函数，且有 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant 0$，$1\geqslant\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$，则

$$\Big[1-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\lambda_i\Big]f(0)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\lambda_i f(x_i)$$

$$\geqslant f\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\lambda_i x_i\Big).$$

特别，当 $n=2m-1$ 为奇数且 $\lambda_i=1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{2m-1}(-1)^{i-1}f(x_i)\geqslant f\Big(\sum_{i=1}^{2m-1}(-1)^{i-1}x_i\Big);\qquad(8.16)$$

当 $f(0)\leqslant 0$ 且 $\lambda_i=1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f(x_i)\geqslant f\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i\Big).\qquad(8.17)$$

例如，$f(x)=x^3$，当 $x>0$ 时 f 是凸函数．于是由式(8.17)有

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3}$$

$$\geqslant\Big(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Big)^3,$$

$$n^3-(n-1)^3+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot 1^3$$

$$\geqslant [n-(n-1)+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot 1]^{4}.$$

现在考虑一类逆不等式.施瓦兹不等式(8.9)是赫尔德不等式(8.8)的特殊情形,由于它对一切$f,g\in L^2(\Omega)$成立,因此显然不存在能对一切$f,g\in L^2(\Omega)$成立的形如

$$\left(\int_\Omega |fg|\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant K\left(\int_\Omega |f|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_\Omega |g|^2\mathrm{d}x\right)$$

的不等式,其中$K>0$是一常数.但是,如果f,g属于$L^2(\Omega)$的某些凹函数组成的子空间,此类不等式可以成立.

定理 8.3.10 设f与g是区间$[0,1]$上的凹函数,满足条件:

$$\int_0^1 f^2\mathrm{d}x=1,\quad \int_0^1 g^2\mathrm{d}x=1,$$

$$f(0)=f(1)=0,\quad g(0)=g(1)=0.$$

则

$$\int_0^1 fg\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2},$$

达到极小值$\frac{1}{2}$仅当

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{3}x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \sqrt{3}(1-x), & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

这个定理可以推广到一般L^p空间.

定理 8.3.11 设f与g是区间$[0,1]$上的凹函数,满足条件

$$\int_0^1 f^p\mathrm{d}x=1,\ \int_0^1 g^q\mathrm{d}x=1,\ p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

$$f(0)=f(1)=0,\ g(0)=g(1)=0.$$

则

$$\int_0^1 fg\mathrm{d}x \geqslant \frac{(p+1)^{1/p}(q+1)^{1/q}}{6}.$$

此不等式右边当$p=q=2$时达最大值.

进一步还可推广到多维情形.

定理 8.3.12 设函数 f,g 定义在域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 上且满足如下条件:

(1) $\Delta f,\Delta g\leqslant 0,\forall x\in\Omega$;

(2) $f|_{\partial\Omega}=g|_{\partial\Omega}=0$($\partial\Omega$ 是 Ω 的边界);

(3) $\int_\Omega f^2\mathrm{d}x=\int_\Omega g^2\mathrm{d}x=1$.

设 $G:(x,y)\in\Omega\times\Omega\mapsto G(x,y)$ 是关于域 Ω 的格林函数,且

$$G_2(x,y)=\int_\Omega G(x,t)G(t,y)\mathrm{d}t,$$

则

$$\int_\Omega fg\mathrm{d}x\geqslant\min\frac{G_2(x,y)}{\sqrt{G_2(x,x)}\sqrt{G_2(y,y)}}. \tag{8.18}$$

对各类型的域,要确定上述不等式右端的值并不容易.

我们再给出关于凹函数的两个不等式.

定理 8.3.13 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的一个非负连续的凹函数,不恒等于零,并且令

$$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

设 m 是区间 $[0,2\bar{f}]$ 上的有界非减函数,并且令

$$\psi(y)=\int_0^y m(t)\mathrm{d}t,\ \forall\ y\in[0,2\bar{f}].$$

则

$$\frac{1}{2\bar{f}}\int_0^{2\bar{f}}\psi(y)\mathrm{d}y\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\psi(f(x))\mathrm{d}x.$$

定理 8.3.13 是法瓦尔(Favard)得出的结果,他给出了取等号的条件,还给出了关于多元函数的相应结果.下面是伯瓦德(Berwald)对定理 8.3.13 的推广.

定理 8.3.14 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的一个非负连续的凹函数,不恒等于零.设函数 φ 在区间 $[0,y_0]$ 上严格单调且连续,y_0 是

充分大的数. 这时，方程

$$\frac{1}{z}\int_0^z \varphi(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\mathrm{d}x$$

有唯一的正根 $z=\bar{z}$. 又设 m 是区间 $[0,\bar{z}]$ 上单调有界函数，且令

$$\psi(y)=\int_0^y m(t)\mathrm{d}\varphi(t),\ \forall\ y\in[0,\bar{z}].$$

这是一个斯蒂尔切斯(Stieltjes)积分. 则当 φ 与 f 有相同单调性时，

$$\frac{1}{\bar{z}}\int_0^{\bar{z}}\psi(y)\mathrm{d}y \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(f(x))\mathrm{d}x; \tag{8.19}$$

当 φ 与 f 有相反单调性时，

$$\frac{1}{\bar{z}}\int_0^{\bar{z}}\psi(y)\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(f(x))\mathrm{d}x \tag{8.20}$$

作为定理 8.3.14 的一个应用，取

$$\varphi(y)=y^\alpha,\ m(y)=\beta y^{\beta-\alpha}/\alpha,\ \psi(y)=y^\beta,\ 0<\alpha<\beta.$$

这时，φ 与 m 当 $y>0$ 同为单调增，对满足定理 8.3.14 中条件的 f 可得

$$\left\{\frac{\beta+1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^\beta\mathrm{d}x\right\}^{1/\beta} \leqslant \left\{\frac{\alpha+1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^\alpha\mathrm{d}x\right\}^{1/\alpha},\ 0<\alpha<\beta. \tag{8.21}$$

特别，$\alpha=1,\beta=2$ 时，从(8.21)得

$$\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3(b-a)}\left\{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right\}^2, \tag{8.22}$$

这是**弗兰克-皮克**(Frank Pick)**不等式**. 取 $\alpha=1,\beta=p>1$，从(8.21)得法瓦尔的不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^p\mathrm{d}x \leqslant \frac{2^p}{p+1}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^p,\ p>1. \tag{8.23}$$

还可推出有用的不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x), \tag{8.24}$$

以及

$$\exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x\right\} \geqslant \frac{2}{e}\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{8.25}$$

其中 f 应满足定理 8.3.14 中的假设.

8.3.3 斯梯芬森不等式

有关单调函数的不等式，主要介绍由下一定理给出的斯梯芬森(Steffensen)不等式.

定理 8.3.15 设函数 f 在区间$[a,b]$上非负且单调递减，函数 g 满足条件

$$0 \leqslant g(t) \leqslant 1, \quad \forall\, t \in [a,b].$$

则

$$\int_{b-c}^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{a+c} f(t)\mathrm{d}t, \tag{8.26}$$

其中

$$c = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

按照推证式(8.26)的相同方式可以建立许多进一步的结果. 例如，斯梯芬森不等式有如下推广.

定理 8.3.16 设函数 $f\in L^p[a,b]$ 非负且单调递减，函数 $g\in L^q[a,b]$ 非负且满足

$$\int_a^b g^q\mathrm{d}t \leqslant 1$$

其中 $p>1$, $q=p/(p-1)$. 则

$$\left(\int_a^b fg\mathrm{d}t\right)^p \leqslant \int_a^{a+c} f^p\mathrm{d}t, \tag{8.27}$$

其中

$$c = a + \left(\int_a^b g\mathrm{d}t\right)^{p}$$

8.4 有关变分法的一些不等式

8.4.1 变分法与不等式

第6章中介绍了变分法. 其中最简单的问题是:设 J 是定义在

$$D(J) = \{y \in C^2[a,b] \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$$

上的泛函,

$$Jy = \int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

要寻求 $y^* \in D(J)$,使得 Jy^* 达极大值或极小值,即

$$Jy \leqslant Jy^*, \forall\ y \in D(J),$$

或

$$Jy \geqslant Jy^*, \forall\ y \in D(J).$$

这样的 y^* 必须满足欧拉方程(6.5),即

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.$$

因此,如果对于具体的 F,由欧拉方程能确定解 y^* 时,便得到了一个积分不等式.

例 8.4.1 设

$$Jy = \int_0^1 y'^2\mathrm{d}x, D(J) = \{y \in C^2[0,1] \mid y(0) = 0, y(1) = 1\}.$$

这时欧拉方程为 $y''=0$,解 $y^*(x)=x$. 由施瓦兹不等式(8.9),$\forall\ y\in D(J)$ 有

$$Jy^* = 1 = \left(\int_0^1 y'\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y'^2\mathrm{d}x = Jy,$$

等号仅当 $y'=1$ 即 $y=y^*$ 时成立. 因此 y^* 使 J 达极小,得不等式

$$\int_0^1 y'^2\mathrm{d}x \geqslant 1,$$

等号仅当 $y(x)=x$ 时成立.

在这个简单的例子中,我们获得的已经比原问题要求的更多,因为所得到的不等式对任何可导的 y(或者说 y 是一个积分)均成立.

变分法的概念是非常有用的.但是,利用变分法建立积分不等式时受到欧拉方程的求解困难、解的存在性、以及要求强的"光滑性"条件、推广到一般的函数类相当麻烦等因素的限制.

由上原因,变分法可以运用于建立一些特殊的积分不等式,而不是普遍地运用于各种积分不等式.值得指出的是,在有的情况下,当欧拉方程的解使所讨论的泛函达到极值时,所得的不等式可能是利用别的方法很难得到的结果.有时最终结果不能利用变分法来获得(证明),但可利用变分法来帮助发现.

8.4.2 包含一阶导数的一类不等式

给出利用变分法得到的包含一阶导数的几个积分不等式,先叙述一个例外情形.

定理 8.4.2 若 $y'\in L^2[0,\infty)$, $y(0)=0$, 且 $\|y'\|_2\neq 0$, 则

$$\int_0^\infty \left(4y'^2-\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x>0.$$

这个不等式左端的积分确定一个泛函 J,其欧拉方程的解为

$$y(x)=\sqrt{x}\,(\alpha+\beta\ln x),$$

显然 $y'\notin L^2(0,\infty)$.

为了利用变分法,对上述问题作了适当修改,得到了另一个不等式.

定理 8.4.3 若 $\mu>4$, $y'\in L^2[0,1]$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, 则

$$\int_0^1\left(\mu y'^2-\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x\geqslant\frac{2}{1-2a},$$

其中

$$a=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\mu}\right)^{1/2}$$

等号仅当 $y(x)=x^{\frac{1}{2}+a}$ 时成立.

定理 8.4.3 可用变分理论来证明. 在证明过程中可以推出

$$\int_0^1\left(4y'^2-\frac{y^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=4\int_0^1\left(y'-\frac{y}{2x}\right)^2\mathrm{d}x.$$

这个等式使得定理 8.4.2 成为明显的结论.

类似于定理 8.4.3 的证明,还得到一个更一般的不等式.

定理 8.4.4 若 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\mu>q^p=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$,且 $y'\in L^p[0,1],y(0)=0,y(1)=1$,则

$$\int_0^1\left(\mu y'^p-\frac{y^p}{x^p}\right)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{(p-1)(1-\lambda)},$$

其中 λ 是方程

$$\mu(p-1)\lambda^{p-1}(\lambda-1)+1=0$$

在 $1/q$ 与 1 之间的根.

8.4.3 温廷杰不等式

下面是可用变分法证明的又一个结论.

定理 8.4.5 若 $2k$ 为一正偶数,$y'\in L^{2k}[0,1]$,$y(0)=0$,则

$$\int_0^1 y^{2k}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2k-1}\left(\frac{2k}{\pi}\sin\frac{\pi}{2k}\right)^{2k}\int_0^1 y'^{2k}\mathrm{d}x.$$

考虑定理 8.4.5 中 $k=1$ 的情形,将上下限改变,可得

$$\int_0^{\pi/2}y^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi/2}y'^2\mathrm{d}x,\tag{8.28}$$

等号仅当 $y=c\sin x$(c 是常数)时成立.

事实上,还存在着关系式

$$\int_0^{\pi/2}(y'^2-y^2)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}(y'-y\cot x)^2\mathrm{d}x.\tag{8.29}$$

这使式(8.28)成为显而易见.

将式(8.29)稍加修改,可得下述结论.

定理 8.4.6 若 $y'\in L^2[0,\pi]$,$y(0)=y(\pi)=0$,则

$$\int_0^{\pi} y^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} y'^2\mathrm{d}x,$$

等号仅当 $y=c\sin x$ 时成立.

对式(8.29)作另外的修改,可得温廷杰(Wirtinger)给出的一个更值得注意的定理.

定理 8.4.7 若 y 是周期为 2π 的函数,$y'\in L^2[0,2\pi]$,而且

$$\int_0^{2\pi} y\mathrm{d}x=0,$$

则

$$\int_0^{2\pi} y^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{2\pi} y'^2\mathrm{d}x, \tag{8.30}$$

等号仅当 $y=\alpha\cos x+\beta\sin x$ 时成立.

8.4.4 包含二阶导数的一类不等式

考虑积分

$$\int_0^{\infty}|y|^p\mathrm{d}x,\quad \int_0^{\infty}|y'|^p\mathrm{d}x,\quad \int_0^{\infty}|y''|^p\mathrm{d}x$$

之间的关系,其中 $p\geqslant 1$. 对于 $p=2$ 的情形已得出结果.

定理 8.4.8 设 $y,y''\in L^2(0,\infty)$,则

$$\left(\int_0^{\infty} y'^2\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_0^{\infty} y^2\mathrm{d}x\int_0^{\infty} y''^2\mathrm{d}x,$$

等号成立仅当

$$y=\alpha\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}x}\sin\left(\lambda x\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right),$$

其中 α 与 λ 是任意常数.

推证这个不等式,直接利用变分法比较麻烦,可以转换为推证

下述定理.

定理 8.4.9 在定理 8.4.8 的假设下

$$\int_0^{\infty} (y''^2 - y'^2 + y^2)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

等号成立的条件与定理 8.4.8 等号成立的条件相同.

利用变分法推证定理 8.4.9 较为简单些.

对于区间$(-\infty,\infty)$,情况有较大的不同.

定理 8.4.10 设 $y, y'' \in L^2(-\infty,\infty)$,则

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} y'^2\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} y^2\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} y''^2\mathrm{d}x$$

等号仅当 $y=0$(a.e.)时成立.

8.4.5 其它不等式

定理 8.4.11 若 $y(0)=y(1)=0$, $y' \in L^2[0,1]$,则

$$\int_0^1 \frac{y^2}{x(1-x)}\mathrm{d}x < \frac{1}{2}\int_0^1 y'^2\mathrm{d}x,$$

等号仅当 $y=cx(1-x)$时成立.

定理 8.4.12 若 k 是一正整数,且

$$y(-1) = -1,\ y(1) = 1,\ y'(-1) = y'(1) = 0.$$

则

$$\int_{-1}^{1} (y'')^{2k}\mathrm{d}x \geqslant 2\left(\frac{4k-1}{2k-1}\right)^{2k-1} \tag{8.31}$$

等号成立仅当

$$y = \frac{4k-1}{2k}x - \frac{2k-1}{2k}x^{(4k-1)/(2k-1)}.$$

定理 8.4.13 设 y 在$[0,\infty)$上可微,则

$$4\int_0^{\infty} y^2\mathrm{d}x \int_0^{\infty} y'^2\mathrm{d}x \geqslant \{y(0)\}^4,$$

等号仅当 $y=ae^{-cx}$时成立.

定理 8.4.14 设 y 在$[0,+\infty)$上二次可微，则

$$\int_0^\infty (y^2+2y'^2+y''^2)\mathrm{d}x \geqslant \frac{3}{2}[y(0)]^2,$$

等号仅当 $y=ce^{-x}(x+2)$时成立.

定理 8.4.15 若 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，且

$$y\in L^p(-\infty,\infty),\ y''\in L^q(-\infty,\infty),$$

则

$$\int_{-\infty}^\infty y'^2\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{-\infty}^\infty |y|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_{-\infty}^\infty |y''|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

等号仅当 $y=0$ 时成立.

定理 8.4.16 设 $1<k<l$，$r=\frac{l}{k}-1$，$y'\in L^k[0,\infty)$且为正函数，则

$$\int_0^\infty \frac{y^l}{x^{l-r}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{l-r-1}\left[\frac{r\Gamma(l/r)}{\Gamma(1/r)\Gamma((l-1)/r)}\right]^r\left(\int_0^\infty y'^k\mathrm{d}x\right)^{l/k},$$

其中 Γ 是伽马函数，等号成立仅当

$$y=\frac{x}{(ax^r+b)^{1/r}}\quad (a,b>0).$$

特别，当 $k=2$，$l=4$ 时 $r=1$，有

$$\int_0^\infty \frac{y^4}{x^3}\mathrm{d}x < \frac{3}{2}\left(\int_0^\infty y'^2\mathrm{d}x\right)^2,$$

等号仅当 $y=\frac{x}{ax+b}$ $(a,b>0)$时成立.

8.5 与矩阵有关的一些不等式

8.5.1 正定矩阵的一些不等式

正定矩阵概念的本身正是用不等式来描述的. 用$(\cdot,\cdot)$表示酉空间 C^n 中的内积. 一个实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$称为**正定的**

(positive definite)，如果二次型

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j > 0 \tag{8.32}$$

$$\forall\ \boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n,\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

一个复埃尔米特矩阵 $\boldsymbol{H} = (h_{ij})_{n\times n}$(即满足 $\bar{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{H}$，具体说 $h_{ij} = \bar{h}_{ji}$)称为**正定的**，如果埃尔米特型

$$(\boldsymbol{H}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}x_i \bar{x}_j > 0, \tag{8.33}$$

$$\forall\ \boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^n,\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

如果(8.32)中的二次型或(8.33)中的埃尔米特型仅为非负，即对某些 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 可以等于零，则称相应的矩阵为**半正定的**(positive semidefinite)或**非负定的**(nonnegative definite).

在我们的讨论中，有时限于实正定矩阵的情形，实际上类似的结果对复正定矩阵也成立.

下面一个定理给出了正定矩阵的基本特征.

定理 8.5.1 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 正定 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式大于零，即

$$\det \boldsymbol{A}_{1k} > 0, k = 1,2,\cdots,n,$$

这里

$$\boldsymbol{A}_{1k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad k = 1,2,\cdots,n,$$

若下有关结果依赖一个无穷积分的求值定理.

定理 8.5.2 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，则

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^n}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}} = \frac{\pi^{n/2}}{(\det \boldsymbol{A})^{1/2}}.$$

这里 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

稍作加工，可得进一步的结论.

定理 8.5.3 若 A 与 B 是 n 阶实对称矩阵，A 还是正定的，则

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-x(A+\mathrm{i}B)x^{\mathrm{T}}}\mathrm{d}x = \frac{\pi^{n/2}}{[\det(A+\mathrm{i}B)]^{1/2}}, \quad (\mathrm{i}=\sqrt{-1})$$

其中平方根的主值按通常理解.

利用定理 8.5.2 和定理 8.5.3 即可推证下面的定理 8.5.4～定理 8.5.6.

定理 8.5.4 若 A 与 B 是实对称矩阵，且 A 是正定的，则

$$\det(A+\mathrm{i}B) \geqslant \det A,$$

等号仅当 $B=0$（零矩阵）时成立.

定理 8.5.5 若 A 与 B 是实正定矩阵，则

$$\det[\lambda A+(1-\lambda)B] \geqslant (\det A)^{\lambda}(\det B)^{1-\lambda}, \ \forall\, \lambda\in[0,1].$$

定理 8.5.6 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实正定矩阵，则

$$\det A_{1n} \leqslant (\det A_{1k})(\det A_{k+1,n}),$$

其中

$$A_{rs}=\begin{bmatrix} a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rs} \\ a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{sr} & a_{s,r+1} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix}, \quad 1\leqslant r\leqslant s\leqslant n,$$

特别

$$\det A \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对于一般的实矩阵 $X=(x_{ij})_{n\times n}$，如果 $\det X\neq 0$，则 XX^{T} 是正定矩阵. 这时，对 XX^{T} 应用定理 8.5.6，便可得到如下非常著名的不等式（当 $\det X=0$ 时它也适用）.

定理 8.5.7（阿达马（Hadamard）不等式） 若 $X=(x_{ij})_{n\times n}$ 是任一实矩阵，则

$$|\det X| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

下面也是一个重要的结果.

定理 8.5.8(沙斯(Szasz)不等式)　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是实正定矩阵,用 P_k 表示 A 的所有 k 阶主子式的乘积,即

$$P_k = \prod_{1 \leqslant r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leqslant n} \begin{vmatrix} a_{r_1 r_1} & a_{r_1 r_2} & \cdots & a_{r_1 r_k} \\ a_{r_2 r_1} & a_{r_2 r_2} & \cdots & a_{r_2 r_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r_k r_1} & a_{r_k r_2} & \cdots & a_{r_k r_k} \end{vmatrix}.$$

则

$$P_1 \geqslant P_2^{1/\binom{n-1}{1}} \geqslant P_3^{1/\binom{n-1}{2}} \geqslant \cdots \geqslant P_{n-1}^{1/\binom{n-1}{n-2}} \geqslant P_n. \tag{8.34}$$

现在给出与定理 8.5.2 类似的定理.

定理 8.5.9　若 H 是正定埃尔米特矩阵,则

$$\int_{\mathbf{E}^n}\int_{\mathbf{E}^n} e^{-(z, Hz)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^n}{\det \bar{H}},$$

其中 $z=x+iy$,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.

有了定理 8.5.9,可将定理 8.5.3～定理 8.5.8 中关于实对称矩阵陈述的结论推广于埃尔米特矩阵.

下面再介绍几个不等式.

定理 8.5.10(伯格斯曲(Bergstrom)不等式)　设 A 与 B 是正定矩阵,用 A_i 与 B_i 分别表示 A 与 B 删去第 i 行和第 i 列后的矩阵,则

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_i+B_i)} \geqslant \frac{\det A}{\det A_i} + \frac{\det B}{\det B_i}. \tag{8.35}$$

定理 8.5.11　设 A 与 B 是 n 阶正定矩阵,$C=\lambda A+(1-\lambda)B$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$. 记号 A_{jn}为 A 删去前 $j-1$ 行与前 $j-1$ 列而得到的主子矩阵,记号 B_{jn}与 C_{jn}含类似意思. 则不等式

$$\prod_{j=1}^{n} (\det C_{jn})^{k_j} \geqslant \prod_{j=1}^{n} (\det A_{jn})^{\lambda k_j} (\det B_{jn})^{(1-\lambda)k_j} \qquad (8.36)$$

对满足条件

$$\sum_{i=1}^{j} k_i \geqslant 0, \ j = 1,2,\cdots,n$$

的任何 n 个实数 $k_1,k_2,\cdots k_n$ 均成立.

定理 8.5.12 若实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的,则

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}) \geqslant (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2, \forall \ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$$

从式(8.35)可直接导出式(8.36),而式(8.35)又是定理8.5.12的一个特殊情形. 对后一论断稍作说明,这会有利于对伯格斯曲不等式的理解. 事实上,从定理 8.5.12 可推出

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y})^{-1} = \min_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2}, \ \forall \ \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n,$$

由此即得

$$(\boldsymbol{y},(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{y})^{-1} \geqslant (\boldsymbol{y},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y})^{-1} + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{y})^{-1}, \ \forall \ \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n, \qquad (8.37)$$

这个不等式对任何实正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 成立. 特别,在式(8.37)中取 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个分量为 1 其余分量为 0 的向量,我们有

$$(\boldsymbol{e}_i,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{e}_i)^{-1} \geqslant (\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{e}_i)^{-1} + (\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{e}_i)^{-1}. \qquad (8.38)$$

注意到,如$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{e}_i)$就是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 i 个对角元素,而且依据线性代数方程组解的克拉默(Cramer)法则可知

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{e}_i) = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}},$$

因此式(8.38)即式(8.35)中的不等式.

定理 8.5.13 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实正定矩阵,则

$$(\det \boldsymbol{A})^{1/n} = \min_{\det \boldsymbol{B}=1} \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})/n,$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

实际上，定理 8.5.13 提供了一个可以使用的不等式.

$$(\det \boldsymbol{A})^{1/n} \leqslant \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})/n, \qquad (8.39)$$

其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，且 $\det \boldsymbol{B}=1$.

定理 8.5.14 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定矩阵，则

$$(\det \boldsymbol{A})^{1/n} + (\det \boldsymbol{B})^{1/n} \leqslant [\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})]^{1/n}.$$

这是闵可夫斯基的一个不等式，它直接由定理 8.5.13 导出. 下面是樊畿给出的进一步的结果.

定理 8.5.15 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定矩阵，记号 $\boldsymbol{A}_{1k}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的由前 k 行和前 k 列形成的主子矩阵，则

$$\left(\frac{\det \boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}_{1k}}\right)^{1/(n-k)} + \left(\frac{\det \boldsymbol{B}}{\det \boldsymbol{B}_{1k}}\right)^{1/(n-k)} \leqslant \left(\frac{\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}{\det(\boldsymbol{A}_{1k}+\boldsymbol{B}_{1k})}\right)^{1/(n-k)}.$$

8.5.2 有关特征值的一些不等式

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复矩阵，我们将用 $\lambda_i(\boldsymbol{A})(i=1,2,\cdots,n)$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，用 $\lambda(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，$\boldsymbol{A}$ 的谱半径(spectral radius)是指

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i(\boldsymbol{A})|.$$

值得最先给出的是关于特征值上界的一个简单不等式.

定理 8.5.16 设 $\boldsymbol{A}$ 是复矩阵，$\|\cdot\|$ 是任何常用的矩阵范数，则

$$\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \|\boldsymbol{A}\|.$$

或者说，

$$|\lambda_i(\boldsymbol{A})| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

实际应用时，定理 8.5.16 给出的整体的界一般过大. 著名的格尔施戈林(Gersgorin)定理给出了矩阵特征值在复平面上较为局部化的分布区域.

定理 8.5.17(格尔施戈林(Gersgorin)定理) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是复矩阵，记

$$D_i=\{Z\in \mathbf{C} \mid |Z-a_{ii}|\leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\},\ i=1,2,\cdots,n.$$

这些集合都是复平面上的圆盘,称为**格尔施戈林圆盘**或简称**圆盘**(circular dise). 则

(1) $\lambda_j(A)\in\bigcup_{i=1}^{n}D_i,\ j=1,2,\cdots,n$,即 A 的任一特征值必落在某些圆盘中;

(2) 如果 S 是 m 个圆盘的并集,构成复平面的一个连通域,且与其余 $n-m$ 个圆盘均不相交,则 S 中正好包含 A 的 m 个特征值(重数计算在内).

定理 8.5.17 中的(1)也可叙述为:对于任一 $\lambda_j(A)$,至少存在一个 i,使得

$$|\lambda_j(A)-a_{ii}|\leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|.$$

定理 8.5.17 的一个修正过程如下:

定理 8.5.18(维金生(Wilkinson)定理) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是复矩阵,$0<\alpha\leqslant 1$,且圆盘

$$D=\{Z\in \mathbf{C} \mid |Z-a_{ii}|\leqslant \alpha\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\}$$

与所有圆盘

$$\{Z\in \mathbf{C} \mid |Z-a_{kk}|\leqslant \alpha^{-1}|a_{ki}|-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k,i}}^{n}|a_{kj}|\},$$

$$k=1,2,\cdots,n,\quad k\neq i$$

不相交. 则 D 恰好包含 A 的一个特征值.

应用定理 8.5.17 可得出另一个结论.

定理 8.5.19(樊畿(Ky Fan)定理) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是复矩阵,且 $b_{ij}\geqslant|a_{ij}|,\ \forall\, i,j=1,2,\cdots,n$.

记 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$,则对于 $\boldsymbol{A}$ 的任 ·特征值 $\lambda_j(\boldsymbol{A})$,至少存在 ·个 i,使得

$$|\lambda_j(\boldsymbol{A})-a_{ii}|\leqslant\rho(\boldsymbol{B})-b_{ii},$$

其中 $\rho(\boldsymbol{B})$是 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径.

奥斯特洛夫斯基对定理 8.5.17 作了 ·个推广,而且还给出了 ·种由非圆盘几何图形组成的特征值的分布区域.

定理 8.5.20(奥斯特洛夫斯基(Ostrowski)定理) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是 n 阶复矩阵,则对任一 $\lambda_j(\boldsymbol{A})$成立

(1) 对于每个 α,$0\leqslant\alpha\leqslant1$,至少存在 ·个 i,使得

$$|\lambda_j(A)-a_{ii}|\leqslant\Big(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ji}|\Big)^{1-\alpha}$$

(2) 当 $n>2$ 时,$\lambda_j(\boldsymbol{A})$必落在所有集合

$$\Big\{z\in\mathbf{C}\ \Big|\ |z-a_{ii}|\,|z-a_{jj}|\leqslant\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|a_{ik}|\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|a_{jk}|\Big\},\quad 1\leqslant i<j\leqslant n$$

的并集之中.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称或实正定的情形,特征值都是实的,将假定

$$\lambda_1(\boldsymbol{A})\geqslant\lambda_2(\boldsymbol{A})\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(\boldsymbol{A}),$$

即 $\lambda_k(A)$是 $\boldsymbol{A}$ 的从大到小的第 k 个特征值.我们来看一些不等式.

定理 8.5.21(柯朗 费希尔(Courant Fischer)定理) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,则

$$\lambda_k(A)=\min_{\substack{\|y_i\|=1\\1\leqslant i\leqslant k-1}}\ \max_{\substack{\|x\|=1\\(x,y_i)=0\\1\leqslant i\leqslant k-1}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}),\ k=1,2,\cdots,n,$$

$$\lambda_1(A)=\max_{\substack{x\in\mathbf{R}^n\\x\neq0}}\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}=\max_{\|x\|_2=1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}),$$

$$\lambda_n(A) = \min_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{(x, Ax)}{(x, x)} = \min_{\|x\|_2 = 1} (x, Ax),$$

因此有不等式

$$\lambda_n(A) \leqslant \frac{(x, Ax)}{(x, x)} \leqslant \lambda_1(A), \ \forall\, x \in \mathbf{R}^n,\ x \neq \mathbf{0}. \tag{8.40}$$

由(8.40),对任何实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及非负定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 成立不等式

$$\lambda_k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \geqslant \lambda_k(\boldsymbol{A}), \quad k = 1, 2, \cdots, n, \tag{8.41}$$

通常,称 $\dfrac{(x, Ax)}{(x, x)}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的瑞利商(Rayleigh quotient).

定理 8.5.22 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵,则

(1) $\lambda_n(\boldsymbol{B}) \leqslant \lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) - \lambda_i(\boldsymbol{A}) \leqslant \lambda_1(\boldsymbol{B})$, $i = 1, 2, \cdots, n$;

(2) $|\lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) - \lambda_i(\boldsymbol{A})| \leqslant \|\boldsymbol{B}\|_2$, $i = 1, 2, \cdots, n$;

(3) $\|\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A})\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{B})\|_2$,这里 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}) = (\lambda_1(A), \lambda_2(A), \cdots, \lambda_n(A))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{B})$,$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 的含意类似.

定理 8.5.22 可用来估计特征值的摄动,表明矩阵 A 的元素的小变化只引起 A 的特征值的小变化,因此实对称矩阵的特征值是良态的.

定理 8.5.23 在定理 8.5.22 的假设下,若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 还是正定的,则

$$\left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\right\}^{1/k} \geqslant \left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\boldsymbol{A})\right\}^{1/k} + \left\{\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(\boldsymbol{B})\right\}^{1/k},$$

$$k = 1, 2, \cdots, n.$$

定理 8.5.24 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一个 $n-1$ 阶主子矩阵,则

$$\lambda_1(\boldsymbol{A}) \geqslant \lambda_1(\boldsymbol{B}) \geqslant \lambda_2(\boldsymbol{A}) \geqslant \lambda_2(\boldsymbol{B}) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n-1}(\boldsymbol{B}) \geqslant \lambda_n(\boldsymbol{A}).$$

下面引进两个记号. 设 A 是 n 阶实对称矩阵,记

$$P_k(\boldsymbol{A}) = \lambda_n(\boldsymbol{A})\lambda_{n-1}(\boldsymbol{A})\cdots\lambda_{n-k+1}(\boldsymbol{A}),$$

即前 k 个最小特征值之积. 记

$$S_k(A) = \lambda_n(A) + \lambda_{n-1}(A) + \cdots + \lambda_{n-k+1}(A),$$

即前 k 个最小特征值之和

定理 8.5.25(樊畿定理)　若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实正定矩阵，且 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，则成立不等式

$$P_k(\alpha \boldsymbol{A} + (1-\alpha)\boldsymbol{B}) \geqslant [P_k(\boldsymbol{A})]^{\alpha}[P_k(\boldsymbol{B})]^{1-\alpha}$$

和

$$S_k(\alpha \boldsymbol{A} + (1-\alpha)\boldsymbol{B}) \geqslant \alpha S_k(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha)S_k(\boldsymbol{B}).$$

定理 8.5.26(柯西-庞加莱(Cauchy-Poincaré)定理)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k(k\leqslant n)$ 是 n 维规范正交向量组，且以 $(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j)$ 为元素构成如下矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2) & \cdots & (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k) \\ (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2) & \cdots & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2) & \cdots & (\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k) \end{bmatrix}.$$

则

$$\lambda_{n-k+i}(\boldsymbol{A}) \leqslant \lambda_i(\boldsymbol{B}) \leqslant \lambda_i(\boldsymbol{A}), \quad i = 1,2,\cdots,k. \tag{8.42}$$

定理 8.5.27(樊畿定理)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵. 则

$$\prod_{i=k}^{n}\lambda_i(A) = \min\Big\{ \prod_{i=k}^{n}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i) \,\Big|\, \|\boldsymbol{x}_i\| = 1,\ (\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j) = 0,\ i,j = k,k+1,\cdots,n,\ i \neq j\Big\},$$

$$k = 1,2,\cdots,n$$

定理 8.5.28(樊畿定理)　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实对称矩阵. 则

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{A}) = \max\Big\{ \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i) \,\Big|\, \|\boldsymbol{x}_i\| = 1,\ (\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j) = 0,\ i,j = 1,2,\cdots,k,\ i \neq j\Big\},$$

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_{n-i+1}(\boldsymbol{A}) = \min\Big\{ \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i) \,\Big|\, \|\boldsymbol{x}_i\| = 1,\ (\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j) = 0,$$

$$i,j = 1,2,\cdots,k,\quad i \neq j\Big\},\quad k = 1,2,\cdots,n.$$

特别，

$$\sum_{i=k}^{n}\lambda_i(A) \leqslant \sum_{i=k}^{n}a_{ii},\quad k = 1,2,\cdots,n.$$

定理 8.5.29 设 A 是 n 阶实对称矩阵，B 是任何 n 阶实矩阵，则对任一 $\lambda_j(B)$，存在 $\lambda_i(A)$，使得

$$|\lambda_i(A) - \lambda_j(B)| \leqslant \|A - B\|_2.$$

此外，若 $\|Ax - \lambda x\|_2 < \varepsilon$，其中 $\|x\|_2 = 1$，则存在 $\lambda_i(A)$，使得

$$|\lambda_i(A) - \lambda| \leqslant \varepsilon.$$

定理 8.5.30 设 A 是 n 阶实对称矩阵，且令

$$\|Ax - \lambda x\|_2 \leqslant \varepsilon,\ \|x\|_2 = 1.$$

假定对某个 j 有

$$|\lambda - \lambda_i(A)| \geqslant d > 0,\quad i \neq j.$$

则对应于 $\lambda_j(A)$，存在 A 的规范化特征向量 u_j，使得

$$\|x - u_j\|_2 \leqslant \gamma(1 + \gamma^2)^{1/2},$$

这里 $\gamma = \varepsilon/d$.

定理 8.5.30 是关于特征向量灵敏度的一个后验估计，它的一个简单推论是如下关于特征向量扰动的结果.

定理 8.5.31 设 A 与 B 是 n 阶实对称矩阵，且对某个 j 有

$$|\lambda_i(A) - \lambda_j(A)| \geqslant \beta > \|A - B\|_2,\quad i \neq j.$$

则对应于 $\lambda_j(A)$ 与 $\lambda_j(B)$，分别存在 A 与 B 的特征向量 u_j 与 v_j，使得

$$\|u_j - v_j\| \leqslant \gamma(1 + \gamma^2)^{1/2},$$

其中 $\gamma = \|A - B\|_2/(\beta - \|A - B\|_2)$.

定理 8.5.32 设 A 是 n 阶实对称矩阵，给定具有 $\|x\|_2 = 1$ 的 x，记

$$\lambda_R = (x, Ax).$$

假定存在某个 j 有

$$|\lambda_R - \lambda_i| \geqslant d > 0,\quad i \neq j.$$

则

$$|\lambda_R - \lambda_j| \leqslant \varepsilon\gamma/(1-\gamma^2),$$

其中 $\gamma = \varepsilon/d$, $\varepsilon = \|Ax - \lambda_R x\|_2$.

下面是两个较一般的关于特征值扰动定理.

定理 8.5.33 设 $A = PDP^{-1}$ 是 n 阶复矩阵，其中 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，且 B 是任一复矩阵，则对任一 $\lambda_j(B)$，存在 λ_i(即 $\lambda_i(A)$)，使得

$$|\lambda_i - \lambda_j(B)| \leqslant \|P^{-1}(A-B)P\|_p.$$

此外，如果 λ_i 为 m 重特征值，且圆盘

$$D_i = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - \lambda_i| \leqslant \|P^{-1}(A-B)P\|_p\}$$

和圆盘

$$D_k = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - \lambda_k| \leqslant \|P^{-1}(A-B)P\|_p\}, k \neq i$$

均不相交，则 D_i 正好包含 B 的 m 个特征值.

定理 8.5.34 设 $A = PDP^{-1}$ 是 n 阶复矩阵，其中 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，且

$$\|Ax - \lambda x\|_p \leqslant \varepsilon,\ \|x\|_p = 1$$

其中 x 是给定的. 则

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i - \lambda| \leqslant \varepsilon \|P^{-1}\|_p \|P\|_p$$

在定理 8.5.33 与定理 8.5.34 中，$\|\cdot\|_p$ 是矩阵或向量的 p 范数，$1 \leqslant p \leqslant \infty$.

8.5.3 正矩阵的几个不等式

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是实矩阵. 如果

$$a_{ij} \geqslant 0,\ \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$$

则称 A 是**非负矩阵**(nonnegative matrix)，记作 $A \geqslant O$. 如果

$$a_{ij} > 0,\ \forall\, i,j = 1,2,\cdots,n$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是**正矩阵**(positive matrix),记作 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{O}$.

两个 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 如果满足 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\geqslant\boldsymbol{O}$,则记作 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$. 如果满足 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}>\boldsymbol{O}$,则记作 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$.

类似地,可以说非负向量与正向量,并分别记作 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$.

正矩阵的最基本定理如下.

定理 8.5.35(佩龙(Perron)定理) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{O}$,且谱半径

$$\rho(\boldsymbol{A}) = |\lambda_1(\boldsymbol{A})| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i(\boldsymbol{A})|,$$

则 $\rho(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值,即

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \lambda_1(\boldsymbol{A}) > |\lambda_i(\boldsymbol{A})|,\quad i=2,\cdots,n,$$

且对应于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征向量是一正向量.

正矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\rho(\boldsymbol{A})$ 可以表示为变分问题的解,这种表示可方便地导出 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的某些基本性质.

定理 8.5.36 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正矩阵,则

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{A}) &= \max\{\lambda\geqslant 0 \mid \exists\, \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant\lambda\boldsymbol{x}\}\\ &= \min\{\lambda>0 \mid \exists\, \boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\lambda\boldsymbol{x}\}.\end{aligned}$$

也可以写成

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{A}) &= \max\left\{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j}{x_i}\,\middle|\, x_i\geqslant 0, \sum_{i=1}^{n}x_i=1\right\}\\ &= \min\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j}{x_i}\,\middle|\, x_i\geqslant 0, \sum_{i=1}^{n}x_i=1\right\}.\end{aligned}$$

此结果是由几位学者独立发现的,首先出现在柯拉兹(Collatz)的一文中,伯克霍夫(Birkhoff)和瓦尔加(Varga)将 $\rho(\boldsymbol{A})$ 表示成更精美的形式.

定理 8.5.37 设矩阵 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{O}$,则

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max\left\{\min_{\boldsymbol{y}>0,\ \|\boldsymbol{y}\|_2=1}\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0},\ \|\boldsymbol{x}\|_2=1\right\}$$

$$=\min\left\{\max_{\boldsymbol{x}>0,\ \|\boldsymbol{x}\|_2=1}\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\,\middle|\,\boldsymbol{y}\geqslant \boldsymbol{0},\ \|\boldsymbol{y}\|_2=1\right\}.$$

从 $\rho(\boldsymbol{A})$的变分表达式可以很直观地得出如下结论.

定理 8.5.38 设 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{B}\geqslant\boldsymbol{O}$ 是同阶矩阵,则

$$\rho(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\geqslant\rho(\boldsymbol{A}).$$

若 $\boldsymbol{A}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 删去同指标的一行和一列后的正矩阵,则

$$\rho(\boldsymbol{A}_1)\leqslant\rho(\boldsymbol{A}).$$

现在引进一个术语. 如果 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是实矩阵,且所有非对角元素为正数,即

$$a_{ij}>0,\quad \forall\, i,j=1,2,\cdots,n,\quad i\neq j,$$

则称 A 是**输入-输出矩阵**(input-output matrix). 这样,正矩阵都是输入-输出矩阵.

定理 8.5.39 设 $\boldsymbol{A}$ 是输入-输出矩阵. 则

(1) $\boldsymbol{A}$ 具有一个实部最大的特征值,而且此特征值是实的,记作 $r(\boldsymbol{A})$;

(2) 相应于 $r(\boldsymbol{A})$的特征向量是正的,而且在可以相差一个数乘因子的意义下是唯一的;

(3) $r(\boldsymbol{A})$有变分表示形式

$$r(\boldsymbol{A})=\max\left\{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j}{x_i}\,\middle|\,x_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1\right\};$$

(4) 对与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的任何正矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\geqslant r(\boldsymbol{A})$.

8.6 与微分算子有关的一些不等式

8.6.1 一阶线性常微分算子

初值问题

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = a(t)u + f(t), \quad u(0) = c$$

的解为

$$u = c\exp\left\{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right\} + \int_0^t \exp\left\{\int_\tau^t a(s)\mathrm{d}s\right\} f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

由此立即得出一个基本结果.

定理 8.6.1 若函数 u 在$[0,T]$上满足线性微分方程和初始条件

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = a(t)u, \qquad u(0) = c,$$

函数 v 在$[0,T]$上满足线性微分不等式和初始条件

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \geqslant a(t)v, \qquad v(0) = c,$$

则

$$v(t) \geqslant u(t), \ \forall\, t \in [0,T].$$

下面几个结果,在常微分方程的存在性、唯一性及稳定性的研究中有重要作用.

定理 8.6.2(贝尔曼(Bellman)定理) 设函数 u 满足

$$|u(t)| \leqslant \beta + \alpha\int_{t_0}^t |u(\tau)|\mathrm{d}\tau, \quad \forall\, t \in [t_0,t_1],$$

其中 α,β 是非负常数,则

$$|u(t)| \leqslant \beta \mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)}, \ \forall\, t \in [t_0,t_1]. \tag{8.43}$$

定理 8.6.3(格隆沃尔(Gronwall)定理) 设非负连续函数 u 满足

$$u(t) \leqslant \beta(t) + \int_{t_0}^t \alpha(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \ \forall\, t \in [t_0,t_1],$$

其中 α,β 是$[t_0,t_1]$上的非负函数,则

$$u(t) \leqslant \beta(t) + \int_{t_0}^t \alpha(\tau)\beta(\tau)\exp\left\{\int_\tau^t \alpha(s)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}\tau. \tag{8.44}$$

定理 8.6.4(比哈里(Bihari)定理)　设非负连续函数 u 满足

$$u(t) \leqslant \beta + \alpha\int_{t_0}^{t} v(s)g(u(s))\mathrm{d}s,\ \forall\, t \in [t_0, t_1],$$

其中常数 $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$，$v$ 是$[t_0, t_1]$上非负连续函数，g 是连续函数且当 $t > 0$ 时 $g(t) > 0$，则

$$u(t) \leqslant G^{-1}\left[G(\beta) + \alpha\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right], \tag{8.45}$$

这里

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}, \qquad u > u_0 > 0.$$

定理 8.6.5(兰吉霍普(Langenhop)定理)　设 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}}$ 是一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = F(x, z), \quad x \in [a, b]$$

的解，其中每个 z_i 是$[a, b]$上的一元复值函数，$F=(F_1, F_2, \cdots, F_n)^{\mathrm{T}}$，每个 F_i 是 $n+1$ 元复值连续函数，而且对于某种向量范数 $\|\cdot\|$ (例如 $\|\cdot\|_1$)满足

$$\|F(x, y)\| \leqslant v(x)g(\|y\|), \quad \forall\, x \in [a, b], y \in \mathbf{C}^n,$$

这里 v 是$[a, b]$上非负连续函数，g 是连续非减函数且当 $t > 0$ 时 $g(t) > 0$. 则

$$\|z(x)\| \geqslant G^{-1}\left[G(\|z(a)\|) - \int_a^x v(s)\mathrm{d}s\right], \quad \forall\, x \in [a, b], \tag{8.46}$$

此处

$$G(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}, \qquad u_0 > 0,$$

式(8.45)提供上界，式(8.46)得出下界.

为了将定理 8.6.1 推广于多维情况，考虑向量-矩阵微分不等式和初始条件

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \geqslant \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c},$$

其中 $\boldsymbol{A}(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$，$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$.
上述不等式是否蕴含 $\boldsymbol{x}$ 以问题

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{c}$$

的解为下界呢？定理 8.6.1 对于一维情形作了肯定的回答. 对于多维情形却没有如此一致的结论，但是当 $\boldsymbol{A}$ 是常数矩阵时有以下定理.

定理 8.6.6 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是常数矩阵. 不等式问题

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \geqslant \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$$

关于 $t \geqslant 0$ 时的解以方程问题

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{c}$$

的解为下界的充分必要条件是

$$a_{ij} \geqslant 0 \ (i \neq j)\text{，且 } a_{ii} \text{ 为实数.}$$

8.6.2 二阶及高阶线性常微分算子

定理 8.6.7 若

(1) $u'' + p(t)u' - q(t)u > 0, \quad t \geqslant 0$,

(2) $v'' + p(t)v' - q(t)v = 0, \quad t \geqslant 0$,

(3) $q(t) \geqslant 0, \quad t \geqslant 0$,

(4) $u(0) = v(0), \quad u'(0) = v'(0)$,

则

$$u(t) > v(t), \quad \forall\, t > 0.$$

在定理 8.6.7 中，考虑特殊情形：$p(t) = 0$，$\forall\, t \geqslant 0$，且存在 $a > 0$，$u(a) = u(0) = 0$. 则有

$$\int_0^a u(u''-qu)\mathrm{d}t = -\int_0^a (u'^2+qu^2)\mathrm{d}t.$$

由此立即得到如下结果.

定理 8.6.8 若

(1) $u''-q(t)u\geqslant 0,\quad 0\leqslant t\leqslant a$,

(2) $u(0)=u(a)=0$,

(3) $\int_0^a (u'^2+q(t)u^2)\mathrm{d}t \geqslant 0$,

则

$$u(t)\leqslant 0,\quad \forall\, t\in[0,a].$$

利用变分法,通过求解由

$$Ju=\int_0^a\left[u'^2-q(t)u^2+2f(t)u\right]\mathrm{d}t$$

定义的泛函 J 在边界条件 $u(0)=u(a)=0$ 下的极小问题,可产生下述论断.

定理 8.6.9 若

(1) $u''+q(t)u=f(t),\quad 0\leqslant t\leqslant a$,

(2) $u(0)=u(a)=0$,

(3) $q(t)\leqslant\dfrac{\pi^2}{a^2}-d,\quad d>0,\quad \forall\, t\in[0,a]$,

(4) $f(t)\geqslant 0,\quad \forall\, t\in[0,a]$,

则

$$u(t)\leqslant 0,\quad \forall\, t\in[0,a].$$

当 $q(t)=0\ (0\leqslant t\leqslant a)$时,定理 8.6.9 是显然的. 如果 q 不满足(3),则定理 8.6.9 不一定成立.

现在考察更一般的情形. 设 L 是 n 阶线性常微分算子

$$Lu=\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}u}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)u, \tag{8.47}$$

其中每个 a_i 是区间$[0,T]$上的连续函数. 又设 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是方程

$$Lu = 0$$

的 n 个线性无关的解. 引入沃隆斯基(Wronskian)行列式

$$W_i(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_i(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_i'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1^{(i-1)}(t) & u_2^{(i-1)}(t) & \cdots & u_i^{(i-1)}(t) \end{vmatrix}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

如果 $W_i(t)>0$, $\forall\, t\in[0,T]$, $i=1,2,\cdots,n-1$, 则在区间 $[0,T]$ 上, 算子 L 可表示为

$$L = \frac{W_n}{W_{n-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{W_{n-1}^2}{W_{n-2}W_n}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{W_2^2}{W_1W_3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{W_1^2}{W_2}\right)\cdots\right)\right] \tag{8.48}$$

由此不难推出下面的定理.

定理 8.6.10 不等式

$$Lu \geqslant 0, \qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0,$$

能推出

$$u(t) \geqslant 0, \quad \forall\, t \in [0,T]$$

的一个充分条件是方程 $Lu=0$ 存在线性无关的解 $u_1,u_2,\cdots,u_n$, 使得 $W_i(t)>0$, $\forall\, t\in[0,T]$, $i=1,2,\cdots,n$.

8.6.3 广义凸性

w 是区间 $[a,b]$ 上的凸函数, 可以利用微分算子按新的方式来描述: 对于满足 $a<t_1<t_2<b$ 的任何 t_1 与 t_2, 若 u 是边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = 0, \\ u(t_1) = w(t_1),\ u(t_2) = w(t_2) \end{cases}$$

的解, 则

$$w(t) \leqslant u(t), \quad \forall\, t \in [t_1,t_2].$$

显然, 上述对应任何 $a<t_1<t_2<b$ 的 u, 实际上是通过点 $(t_1,w(t_1))$

与点$(t_2,u(t_2))$的直线，且在区间$[t_1,t_2]$上位于w的上方，见图8.2.

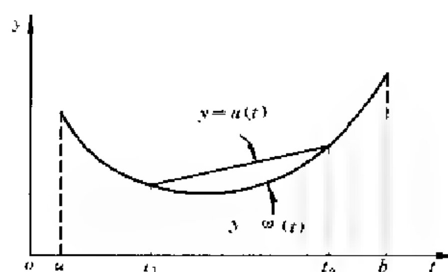


图 8.2

因为w是凸函数，具有$w''\geqslant 0$. 所以，上面的描述是将凸函数的概念转换成研究满足不等式$w''\geqslant 0$的函数与满足方程$u''=0$的函数之间的关系.

可以通过推广所考虑的微分算子来推广凸性概念. 有人考虑过二阶线性微分方程

$$u''+p(t)u'+q(t)u=0.$$

而皮克苏托(Peixoto)利用更一般的非线性微分方程

$$u''=g(t,u,u'),\tag{8.49}$$

并给出下面的结果.

定理 8.6.11 记$\Omega=(a,b)\times\mathbf{E}^1\times\mathbf{E}^1$. 假定式(8.49)中的方程具有如下性质：

(1) g是在Ω上连续的三元函数.

(2) 对于任何点$(t_0,u_0,u_0')\in\Omega$，式(8.49)在区间(a,b)上存在满足条件

$$u(t_0)=u_0,\quad u'(t_0)=u_0'$$

的唯一解.

(3) 给定任何两点$(t_i,u_i,u_i')\in\Omega$，$i=1,2$，式(8.49)存在满

足条件

$$u(t_i)=u_i,\quad u'(t_i)=u'_i,\quad i=1,2$$

的唯一解.

又设

(1) 函数 $w\in C^2(a,b)$，u 是依(3)所说的条件确定的，且 $w(t_i)=u(t_i)$，$i=1,2$.

则

$$w(t)\leqslant u(t),\quad \forall\, t\in[t_1,t_2]\Leftrightarrow w''(t)\geqslant g(t,w,w'),$$
$$\forall\, t\in(a,b).$$

定理 8.6.11 刻画了满足不等式

$$w''\geqslant g(t,w,w') \tag{8.50}$$

的函数与满足方程(8.49)的函数之间的关系. 具体地说，在定理 8.6.11 中的条件(1)～(4)下，只要函数 w 在区间(a,b)上满足式(8.50)，则对应任何 $a<t_1<t_2<b$ 的满足式(8.49)及 $u(t_i)=w(t_i)$ $(i=1,2)$的 u，实际上是通过点$(t_1,w(t_1))$与点$(t_2,w(t_2))$的曲线，且在区间$[t_1,t_2]$上位于 w 的上方. 这样，通常的凸性已成为现在取 g 恒为零时的特例. 因此，在定理 8.6.11 中的条件(1)～(4)的意义下，可以说满足式(8.50)的函数 w 是具有广义凸性的.

进一步研究满足不等式

$$w^{(n)}>g(t,w,w',\cdots,w^{(n-1)})$$

的函数与满足方程

$$u^{(n)}=g(t,u,u',\cdots,u^{(n-1)})$$

的函数之间的关系，可得结论：若

$$w^{(k)}(0)=u^{(k)}(0)=c_k,\quad k=0,1,\cdots,n-1,$$

则存在一个区间$[0,T]$，使得

$$w(t)\geqslant u(t),\quad \forall\, t\in[0,T].$$

8.6.4 二阶线性偏微分算子

推导定理 8.6.9 的方法可以应用于椭圆型方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+q(x,y)u=f(x,y), & (x,y)\in\Omega, \\ u=0, & (x,y)\in\partial\Omega. \end{cases}$$

其中 $\Omega\subset E^2$，$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界.

考虑二次泛函 J，其定义为

$$Ju=\iint_{\Omega}[u_x^2+u_y^2-qu^2+2fu]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

可得如下结论：

定理 8.6.12 设 λ_1 是斯图姆-刘维尔(Sturm Liouville)方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+\lambda u=0, & (x,y)\in\Omega, \\ u=0, & (x,y)\in\partial\Omega \end{cases}$$

的最小特征值. 若

$$q(x,y)\leqslant\lambda_1-d,\quad d>0,\quad (x,y)\in\Omega,$$

且 u 满足

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+q(x,y)u\geqslant 0, & (x,y)\in\Omega, \\ u=0, & (x,y)\in\partial\Omega, \end{cases}$$

则

$$u(x,y)\leqslant 0,\quad \forall\ (x,y)\in\Omega.$$

现在转向抛物型算子，最简单情形的一个结论如下.

定理 8.6.13 若二元函数 u 满足

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}, & 0<x<1,\quad t>0, \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=g(x), & 0<x<1, \end{cases}$$

且令

$$I_n(t)=\int_0^1[u(x,t)]^{2n}\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

则每个 I_n 是关于 $t\geqslant 0$ 的单调递减函数.

从定理 8.6.13 可推出，由 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|u(x,t)|$ 确定的函数关于 $t\geqslant 0$ 也是单调递减的. 为了证明这个性质，可以利用下一定理.

定理 8.6.14 若 $v\in C[a,b]$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b[v(x)]^{2n}\mathrm{d}x\right\}^{1/2n}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|v(x)|$$

定理 8.6.15 若

(1) $u_t-u_{xx}+q(x,t)u\geqslant 0,\quad 0<x<1,\quad t>0,$

(2) $u(x,0)\geqslant 0,\quad 0<x<1,$

(3) $u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t>0$

(4) 对任何 $T>0$，存在仅依赖于 T 的常数 $k(T)$（可正，可负），使得

$$q(x,t)\geqslant k(T),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

则

$$u(x,t)\geqslant 0,\quad \forall x\in(0,1),\quad t>0.$$

下面是温德洛夫(Wendroff)的几个不等式，它们是前面式(8.43)～(8.45)类型定理的一些推广.

定理 8.6.16 若

$$u(x,y)\leqslant c+\int_0^y\int_0^x v(r,s)u(r,s)\mathrm{d}r\mathrm{d}s,$$

其中 $c\geqslant 0$，u 和 v 是非负函数，则

$$u(x,y)\leqslant c\exp\left\{\int_0^y\int_0^x v(r,s)\mathrm{d}r\mathrm{d}s\right\}.$$

定理 8.6.17 若

$$u(x,y)\leqslant a(x)+b(y)+\int_0^y\int_0^x v(r,s)u(r,s)\mathrm{d}r\mathrm{d}s,$$

其中 a 与 b 是正函数，它们的导函数 a' 与 b' 是非负函数，u 与 v 是非负函数，则

$$u(x,y) \leqslant \frac{[a(0)+b(y)][a(x)+b(0)]}{a(0)+b(0)}\exp\left\{\int_0^x\int_0^y v(r,s)\mathrm{d}r\mathrm{d}s\right\}$$

定理 8.6.18 若

$$u(x,y) \leqslant c + \alpha\int_0^x u(s,y)\mathrm{d}s + \beta\int_0^y u(x,s)\mathrm{d}s,$$

则

$$u(x,y) \leqslant c\exp(\alpha x + \beta y + \alpha\beta xy).$$

定理 8.6.19 若

$$u(x,y) \leqslant a(x) + b(y) + \alpha\int_0^x u(s,y)\mathrm{d}s + \beta\int_0^y u(x,s)\mathrm{d}s,$$

则

$$u(x,y) \leqslant \frac{\left[a(0)+b(0)+\int_0^y b'(s)\exp(-\beta s)\mathrm{d}s\right]}{a(0)+b(0)}$$

$$\times\left[a(0)+b(0)+\int_0^x a'(s)\exp(-\alpha s)\mathrm{d}s\right]\exp(\alpha x+\beta y+\alpha\beta xy).$$

8.6.5 几个定理

定理 8.6.20(纳吉(Sz-Nagy)定理) 设 f 是定义在$(-\infty,\infty)$上的函数,且对某个 $a>0$ 与某个 $p>1$,存在下列两个积分:

$$J_a = \int_{-\infty}^{\infty}|f|^a\mathrm{d}x,\ K_p = \int_{-\infty}^{\infty}|f'|^p\mathrm{d}x,$$

则下式成立

$$\max_{-\infty<x<\infty}|f(x)| \leqslant \left(\frac{r}{2}\right)^{1/r} J_a^{(p-1)/(pr)}K_p^{1/(pr)},$$

其中 $r=1+(p-1)a/p$. 而且,对任何 $b>0$,

$$J_{a+b} \leqslant \left[\frac{r}{2}H\left(\frac{r}{b},\frac{p-1}{p}\right)\right]^{b/r}J_a^{1+b(p-1)/(pr)}K_p^{b/(pr)},$$

这里,

$$H(u,v) = \frac{(u+v)^{(u+v)}\Gamma(1+u+v)}{u^u v^v\Gamma(1+u)\Gamma(1+v)}.$$

定理 8.6.21（卡尔逊（Carlson）定理） 若 g 是非负函数，且存在下列两个积分

$$\int_0^\infty [g(t)]^2 \mathrm{d}t, \quad \int_0^\infty [tg(t)]^2 \mathrm{d}t,$$

则下式成立

$$\int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\pi}\left\{\int_0^\infty [g(t)]^2 \mathrm{d}t\right\}^{1/4}\left\{\int_0^\infty [tg(t)]^2 \mathrm{d}t\right\}^{1/4}.$$

在定理 8.6.20 中，取 f 为

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(t)\cos xt\mathrm{d}t, \quad p = q = 2,$$

便可推出定理 8.6.21.

定理 8.6.21 可以得到较大的推广．一般的问题是：已知积分 $\int_0^\infty x^\alpha f^p \mathrm{d}x$ 和 $\int_0^\infty x^\beta f^q \mathrm{d}x$ 存在，利用它们来确定 $\int_0^\infty f\mathrm{d}x$ 的一个界，这里 f 是非负函数. 下面是一般的结果.

定理 8.6.22 若 f 是非负函数，且 $p,q>0$，$0<\lambda<p+1$，$0<\mu<q+1$，则

$$\left(\int_0^\infty f\mathrm{d}x\right)^{p\mu+q\lambda}$$

$$\leqslant K(p,q,\lambda,\mu)\left(\int_0^\infty x^{p-1-\lambda}f^p \mathrm{d}x\right)^{\mu}\left(\int_0^\infty x^{q-1+\mu}f^q \mathrm{d}x\right)^{\lambda},$$

其中 K 依赖 p,q,λ,μ，而与 f 无关．

$$K(p,q,\lambda,\mu) = C_1^{\mu p}C_2^{\lambda q}k\left(\frac{\lambda}{p+1}, \frac{\mu}{q+1}+\frac{\lambda}{p+1}\right)$$

$$C_1 = \int_0^\infty x^{(p-\lambda)/p}(x+1)^{-(p+1)/p}\mathrm{d}x$$

$$C_2 = \int_0^\infty x^{(q+\mu)/q}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-(q+1)/q}\mathrm{d}x$$

$$k(u,v) = \left[\left(\frac{u}{v}\right)^{u} - \left(\frac{u}{v}\right)^{v}\right]^{u}$$

定理 8.6.22 的推导，可先利用赫尔德不等式，然后再应用下述定理.

定理 8.6.23 若 $v>u>0$, $a,b,c>0$，且

$$bx^u \leqslant c + ax^v, \quad \forall x > 0,$$

则

$$c^{v-u}a^u \geqslant k(u,v)b^v,$$

这里的 $k(u,v)$ 与定理 8.6.22 中的相同.

我们知道，若 $a,b,c\geqslant 0$，且

$$bx \leqslant c + ax^2, \quad \forall x \geqslant 0,$$

则

$$b^2 \leqslant 4ac.$$

定理 8.6.23 正是这个显著事实的一个推广.

8.6.6 联系函数及其导数的不等式

首先介绍关于函数及其导数所属函数类的几个结论，由它们能产生不等式

最先是关于 u、u' 和 u'' 的一个结论.

定理 8.6.24 若 $u\in L^p([0,\infty))$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$u''\in L^r([0,\infty))$，$1\leqslant r\leqslant\infty$，$m\geqslant\max\{p,r\}$，则 $u'\in L^m([0,\infty))$.

若 $p=\infty$，条件 $u\in L^p([0,\infty))$ 意指 $\|u\|_\infty=\max\limits_{0\leqslant t<\infty}|u(t)|\leqslant c<\infty$. 定理 8.6.24 的两种最令人感兴趣的情形是 $p=r=m=\infty$，$p=r=m=2$.

下面是更一般的关于 u、$u^{(k)}$ 和 $u^{(n)}$ $(n>k>1)$ 的一个结果，是对定理 8.6.24 的一个推广.

定理 8.6.25 若 $u\in L^p$，$u^{(n)}\in L^r$，$p,r\geqslant 1$，$n>1$，$m\geqslant\max\{p,r\}$，则 $u^{(k)}\in L^m$，$k=0,1,\cdots,n-1$.

定理 8.6.24 的另一个推广

定理 8.6.26 若

(1) $u''+a_1(t)u'+a_2(t)u\in L^p$,

(2) $u\in L^r$,

(3) $|a_1(t)|$, $|a_2(t)|\leqslant c_1<\infty$, $\forall\, t\geqslant 0$,

(4) $m\geqslant\max\{p,r\}$,

则 $u,u'\in L^m$.

现以关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t}(u'+u)]=\mathrm{e}^{-t}(u''-u) \tag{8.51}$$

为例,说明依据上述的定理 8.6.24~定理 8.6.26 可获得实际的不等式.若 u 满足定理 8.6.24 的假设,则从式(8.51)可得关系式

$$u'=-u-\mathrm{e}^{t}\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{-s}[u''-u]\mathrm{d}s.$$

因此得不等式

$$\max_{0\leqslant t<\infty}|u'|\leqslant 2\max_{0\leqslant t<\infty}|u|+\max_{0\leqslant t<\infty}|u''|. \tag{8.52}$$

用 $u(rt)(r>0)$ 代替 $u(t)$,得另一不等式

$$r\max_{0\leqslant t<\infty}|u'|\leqslant 2\max_{0\leqslant t<\infty}|u|+r^2\max_{0\leqslant t<\infty}|u''|,\quad \forall\ r>0. \tag{8.53}$$

由此及定理 8.6.23,又得不等式

$$(\max_{0\leqslant t<\infty}|u'|)^2\leqslant 8(\max_{0\leqslant t<\infty}|u|)(\max_{0\leqslant t<\infty}|u''|). \tag{8.54}$$

以上三个不等式也可用范数 $\|\cdot\|_{\infty}$ 来表达.

类似地,可以得到联系 $\int_0^{\infty}|u'|^m\mathrm{d}t$, $\int_0^{\infty}|u|^m\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^{\infty}|u''|^m\mathrm{d}t$ 的不等式.

下面再写出两个结果.

定理 8.6.27 若

(1) $u(t)=u(t+2\pi)$,

(2) $u,u',\cdots,u^{(k-1)}$ 绝对连续,

(3) $\int_0^{2\pi}u(s)\mathrm{d}s=0$,

则

$$\max_{0\le t\le 2\pi}|u(t)|\leqslant a_k\max_{0\le t\le 2\pi}|u^{(k)}(t)|,$$

其中$\{a_k\}$是规定如下的序列：

$$a_1=\frac{\pi}{2},\quad a_2=\frac{\pi^2}{8},\quad a_3=\frac{\pi^3}{24},\cdots.$$

此结果在如此意义下是最好的，即对任何k，存在使等号成立的函数u.

定理 8.6.28 若

(1) $u(t)=u(t+2\pi)$，

(2) $u',\cdots,u^{(k-1)}$均存在；

(3) $u^{(k-1)}$是$L^{2r}[0,2\pi]$中一函数的积分；

(4) $\int_0^{2\pi}u(s)\mathrm{d}s=0$.

则

$$\int_0^{2\pi}[u(t)]^{2r}\mathrm{d}t\leqslant a_k^{2r}\int_0^{2\pi}[u^{(k)}(t)]^{2r}\mathrm{d}t$$

这里的a_k与定理 8.6.27 中的相同.

定理 8.6.28 中的不等式可写成

$$\left\{\int_0^{2\pi}[u(t)]^{2r}\mathrm{d}t\right\}^{1/2r}\leqslant a_k\left\{\int_0^{2\pi}[u^{(k)}(t)]^{2r}\mathrm{d}t\right\}^{1/2r},$$

此不等式当$r\to\infty$时的极限情形，就是定理 8.6.27 中的不等式.

8.6.7 离散情形

定理 8.6.29 设等边多边形具有n条边，面积为A，周长为L，则

$$L^2\geqslant\left(4n\tan\frac{\pi}{n}\right)A,$$

等号仅对正多边形成立.

这是离散情形的一个最初的结果，是布拉施凯(Blaschke)给

出的.

定理 8.6.30 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个实数，$x_1=0$，则

$$\sum_{i=2}^{n}(x_i-x_{i-1})^2 \geqslant 4\sin^2\frac{\pi}{2(2n-1)}\sum_{i=2}^{n}x_i^2,$$

等号成立仅当

$$x_i=c\sin\frac{(i-1)\pi}{2n-1},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中 c 是任一常数.

定理 8.6.31 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个实数，且 $x_0=x_{n+1}=0$，则

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_i-2x_{i+1}+x_{i+2})^2 \geqslant 16\sin^4\frac{\pi}{2(n+1)}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

等号成立仅当

$$x_i=c\sin\frac{\pi i}{n+1},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

定理 8.6.30 与定理 8.6.31 分别是关于一阶差分与二阶差分的不等式，可以归结为有关的变分问题加以推证. 但也可从二次型的观点去进行考察.

定理 8.6.32 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个复数，使得

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

则对任何正整数 r 有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|^r \leqslant [a_1(n)]^r\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i+1}|^r$$

与

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|^r \leqslant [a_2(n)]^r\sum_{i=1}^{n}|x_{i-1}-2x_i+x_{i+1}|^r,$$

其中 $x_0=x_n$，$x_{n+1}=x_1$，且 $a_1(n)=\frac{n-1}{2}$，$a_2(n)=\frac{n^2-1}{2}$.

以上两个不等式在各自的形式下是最好的结果，即对任何 r，存在

使等号成立的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.

定理 8.6.33 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个实数，在下列两个条件下变化：

(1) $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$,

(2) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = 1$,

且令 $x_{n+1}=x_1$，则

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - x_{i+1}|$$

的最小值如下：

当 n 是偶数时为 $\frac{4}{n}$，故 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - x_{i+1}| \geqslant \frac{4}{n}$；

当 n 是奇数时为 $\frac{4n}{n^2-1}$，故 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - x_{i+1}| \geqslant \frac{4n}{n^2-1}$.

以上两个定理是前面某些结果的离散情形. 定理 8.6.32 类似于定理 8.6.28，定理 8.6.33 类似于定理 8.6.27.

离散情形的结论与常微分方程及偏微分方程的数值求解有重要关系.

8.7 其它不等式

8.7.1 从多线性型到积分的类似情形

设 $\{x_i^{(k)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个序列，每个 $x_i^{(k)}$ 均为实或复变元，记

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{\infty} a_{i_1 i_2\cdots i_n} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_n}^{(n)}, \tag{8.55}$$

其中系数 $a_{i_1 i_2\cdots i_n}$ 可以是实数或复数，则称式(8.55)为 n 线性型(n linear form). 当 $n=1,2$ 时，称为**线性型**(linear form)，**双线性型**(bilinear form). 通常，统称 $n\geqslant 3$ 的情形为**多线性型**(multili

near form). 式(8.65)中可以只有有限个系数不为零,这时便成为有限和的情形.

关于双线性型和多线性型的不等式可以作为一个专门的课题,不在此介绍.在本章中将涉及的双线性型或多线性型的一些结论,均具有积分的类似情形.

定理 8.7.1 若 $\lambda>0,\mu>0,\lambda+\mu<1$, $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ 与 $\{y_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ 为非负序列,且

$$z_n=\sum_{i+j=n}x_iy_j,$$

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n^{\frac{1}{1-\lambda-\mu}}\right)^{1-\lambda-\mu}\leqslant\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}x_i^{\frac{1}{1-\lambda}}\right)^{1-\lambda}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}y_j^{\frac{1}{1-\mu}}\right)^{1-\mu}.$$

等号成立仅当所有的 x_i 为零,或所有的 y_j 为零,或所有的 x_i 中只有一个和所有的 y_j 中只有一个不为零.

这个定理可以推广.

定理 8.7.2 若 $\lambda_k>0$, $k=1,2,\cdots,m$, $\sum_{k=1}^{m}\lambda_k<1$, $\{x_i^{(k)}\}_{i=-\infty}^{\infty}$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 是非负序列,且

$$w_n=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n}x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(2)}\cdots x_{i_m}^{(m)},$$

则

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}w_n^{\frac{1}{1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_m}}\right)^{1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_m}$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty}(x_i^{(k)})^{\frac{1}{1-\lambda_k}}\right]^{1-\lambda_k}.$$

等号成立仅当有一序列之元素皆为零,或每一序列中仅有一个元素不为零.

定理 8.7.3 若 $\{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ 为非负序列,且

$$c_n=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k},$$

则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2 \leqslant \left(\sum a_i^{\frac{2k}{2k-1}}\right)^{2k-1}.$$

等号成立仅当所有 a_i 至多有一个不为零.

下面是定理 8.7.1～定理 8.7.3 的积分的类似情形.

定理 8.7.4 若 $\lambda>0$, $\mu>0$, $\lambda+\mu<1$; f, g 为非负函数，且

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} h^{\frac{1}{1-\lambda-\mu}}\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda-\mu} \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^{\frac{1}{1-\lambda}}\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g^{\frac{1}{1-\mu}}\mathrm{d}x\right)^{1-\mu},$$

等号仅当 f 或 g 为零时成立.

定理 8.7.5 若 $\lambda>0$, $\mu>0$, $\lambda+\mu<1$, f, g 为非负函数，且

$$h(x)=\int_0^{x} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\int_0^{\infty} h^{\frac{1}{1-\lambda-\mu}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\infty} f^{\frac{1}{1-\lambda}}\mathrm{d}x\int_0^{\infty} g^{\frac{1}{1-\mu}}\mathrm{d}x,$$

等号仅当 f 或 g 为零时成立.

定理 8.7.6 若 $k\geqslant 2$ 为一正整数，f 为非负函数，且

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{k-1})$$
$$\times f(x-x_1-x_2-\cdots-x_{k-1})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{k-1},$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^{\frac{2k}{2k-1}}\mathrm{d}x\right)^{2k-1}.$$

定理 8.7.7 若 $k\geqslant 2$ 为一正整数，f 为非负函数，且

$$\varphi(x)=\int_0\cdots\int f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{k-1})$$
$$\times f(x-x_1-x_2-\cdots-x_{k-1})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{k-1},$$

其中积分区域

$$\Omega = \{(x_1, \cdots, x_{k-1}) \in E^{k-1} : x_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k-1} x_i \leqslant x\}.$$

则

$$\int_0^{\infty} \varphi^2 \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{\infty} f^{\frac{2k}{2k-1}} \mathrm{d}x\right)^{2k-1}. \tag{8.56}$$

定理 8.7.8 若 $k \geqslant 2$ 为一正整数，f 是周期为 2π 的非负函数，且

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} & f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_{k-1}) \\ & \times f(x - x_1 - x_2 - \cdots - x_{k-1}) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{k-1},\end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\frac{2k}{2k-1}} \mathrm{d}x\right)^{2k-1}.$$

8.7.2 希尔伯特不等式及其推广和应用

现在给出关于重要的双线性型

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}$$

的一个不等式及其积分的类似情形. 这个双线性型是由希尔伯特(Hilbert)首先加以研究的，它是本节后面结论的起源.

定理 8.7.9 若 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\{a_m\}_{m=1}^{\infty} \in l^p$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^q$ 是非负序列，且

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \leqslant A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \leqslant B,$$

则

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} A^{1/p} B^{1/q},$$

除非所有 a_m 皆为零或所有 b_n 皆为零.

定理 8.7.10 若 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f\in L^p(0,\infty)$ 和 $g\in L^q(0,\infty)$ 是非负函数，且

$$\int_0^\infty f^p\mathrm{d}x\leqslant F,\quad \int_0^\infty g^q\mathrm{d}y\leqslant G,$$

则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}F^{1/p}G^{1/q},$$

除非 $f\equiv 0$ 或 $g\equiv 0$.

定理 8.7.9 与定理 8.7.10 中的常数 $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ 皆为可能最好的常数.

$p=q=2$ 时的定理 8.7.9 就是所谓**希尔伯特二重级数定理**.

下面是关于一类较为广泛的双线性型的一个结论，从它能导出定理 8.7.9.

定理 8.7.11 若 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\{a_m\}_{m=1}^\infty\in L^p$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^\infty\in L^q$ 是非负序列，K 是二元函数，具有如下性质：

(1) K 为非负，且为 -1 次齐次式；

(2) $\int_0^\infty K(x,1)x^{-1/p}\mathrm{d}x=\int_0^\infty K(1,y)y^{-1/q}\mathrm{d}y=k$;

(3) 在(2)中的两个被积函数均为严格递减. 或者，条件更弱些，(2)中的两个被积函数在区间 $(1,\infty)$ 上为严格递减，而区间 $(0,1)$ 可分成两部分：$(0,\xi)$ 和 $(\xi,1)$，其中有一个可以为空集，在 $(0,\xi)$ 上函数为严格递减，在 $(\xi,1)$ 上函数为严格递增；

(4) 当 $K(x,x)$ 无意义时，规定 $K(x,x)=0$.

则

$$\sum_{m,n=1}^\infty K(m,n)a_mb_n\leqslant k\Big(\sum_{m=1}^\infty a_m^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=1}^\infty b_n^q\Big)^{1/q},\qquad(8.57)$$

等号成立仅当所有 a_m 皆为零或所有 b_n 皆为零；

而且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}K(m,n)a_m\right)^p \leqslant k^p\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p, \tag{8.58}$$

等号仅当所有 a_m 皆为零时成立；类似地

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}K(m,n)b_n\right)^q \leqslant k^q\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q, \tag{8.59}$$

等号仅当所有 b_n 皆为零时成立.

在上述式中，作为结论的三个不等式实际上是等价的. 在最为重要的应用中，取 K 为

$$K(x,y)=\frac{1}{x+y},$$

即得定理 8.7.9. 这时，能满足(3)中的较强条件.

如果取 K 为

$$K(x,y)=\frac{1}{(x+y)^{1-\alpha}|x-y|^{\alpha}} \qquad (0<\alpha<1),$$

则能满足(3)中的较弱条件. 但这时需要用到条件(4)，以便将相等的对 $\{m,m\}$ 从求和中去掉.

存在相应于定理 8.7.11 的积分不等式.

定理 8.7.12 若 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$f\in L^p(0,\infty)$ 和 $g\in L^q(0,\infty)$ 是非负函数，K 是非负的二元 -1 次齐次函数，且

$$\int_0^{\infty}K(x,1)x^{-1/p}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}K(1,y)y^{-1/q}\mathrm{d}x=k,$$

则

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant k\left(\int_0^{\infty}f^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^{\infty}g^q\mathrm{d}y\right)^{1/q}, \tag{8.60}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\left(\int_0^{\infty}K(x,y)g(y)\mathrm{d}y\right)^q \leqslant k^q\int_0^{\infty}g^q\mathrm{d}y.$$

若 K 为正，则以上不等式成立等号依次仅当：

$$f \equiv 0 \text{ 或 } g \equiv 0;\ f \equiv 0;\ g \equiv 0$$

在式(8.60)中取 $K(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$,即得定理 8.7.10.

接着是关于式(8.57)与(8.60)的推广.先给出一个定理,比之定理 8.7.11 某些方面要广一些,但某些方面又要差一些;后给出一个定理,是推广到任意多重的级数或积分.

定理 8.7.13 若 $p>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}\in l^p$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^q$ 是非负序列,K 是二元严格递减函数,且满足定理 8.7.11 中之条件(1)与(2);又设

$$\Lambda_m=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m,\ \lambda_m>0,\ m=1,2,\cdots,$$
$$M_n=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n,\ \mu_n>0,\ n=1,2,\cdots,$$

则

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}K(\Lambda_m,M_n)\lambda_m^{1/q}\mu_n^{1/p}a_m b_n\leqslant k\Big(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\Big)^{1/q},\tag{8.61}$$

特别,若取 $K(x,y)=1/(x+y)$,则

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\lambda_m^{1/q}\mu_n^{1/p}}{\Lambda_m+M_n}a_m b_n\leqslant\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\Big)^{1/q}.$$

在两种情形下,仅当所有 a_m 皆为零或所有 b_n 皆为零时等号成立.

式(8.61)的特殊情形 $\Lambda_m=m$, $M_n=n$ 也是式(8.59)的一个特殊情形.

定理 8.7.14 若 $p_i>1$, $i=1,2,\cdots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=1$, $f_i\in L^{p_i}(0,\infty)$, $(i=1,2,\cdots,n)$ 是非负函数,K 是正的 n 元 $-n+1$ 次齐次函数,且

$$\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}K(1,x_2,\cdots,x_n)x_2^{-1/p_2}\cdots x_n^{-1/p_n}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=k,$$

则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty K(x_1,x_2,\cdots,x_n)f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$\leqslant k\left(\int_0^\infty f_1^{p_1}\mathrm{d}x_1\right)^{1/p_1}\left(\int_0^\infty f_2^{p_2}\mathrm{d}x_2\right)^{1/p_2}\cdots\left(\int_0^\infty f_n^{p_n}\mathrm{d}x_n\right)^{1/p_n}. \quad (8.62)$$

又若由

$$K(1,x_2,\cdots,x_n)x_2^{-1/p_2}x_3^{-1/p_3}\cdots x_n^{-1/p_n},$$
$$K(x_1,1,\cdots,x_n)x_1^{-1/p_1}x_3^{-1/p_3}\cdots x_n^{-1/p_n},$$
$$\cdots$$
$$K(x_1,x_2,\cdots,1)x_1^{-1/p_1}x_2^{-1/p_2}\cdots x_{n-1}^{-1/p_{n-1}}$$

确定的函数均为严格递减函数，$\{a_m^{(i)}\}_{m=1}^\infty\in l^{p_i}$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\sum_{m_1=1}^\infty\sum_{m_2=1}^\infty\cdots\sum_{m_n=1}^\infty K(m_1,m_2,\cdots,m_n)a_{m_1}^{(1)}a_{m_2}^{(2)}\cdots a_{m_n}^{(n)}$$
$$\leqslant k\left(\sum_{m_1=1}^\infty a_{m_1}^{p_1}\right)^{1/p_1}\left(\sum_{m_2=1}^\infty a_{m_2}^{p_2}\right)^{1/p_2}\cdots\left(\sum_{m_n}^\infty a_{m_n}^{p_n}\right)^{1/p_n}.$$

定理 8.7.9 有一个稍微精密些的形式.

定理 8.7.15 若 $p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\{a_m\}_{m=0}^\infty\in l^p$ 和 $\{b_n\}_{n=0}^\infty\in l^q$ 是非负序列，则

$$\sum_{m,n=0}^\infty\frac{a_mb_n}{m+n+1}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{m=0}^\infty a_m^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=0}^\infty b_n^q\right)^{1/q}.$$

作为定理 8.7.9 与定理 8.7.10 的应用，可得出下述两个结果.

定理 8.7.16 若 $f\in L^2(0,1)$是非零实函数，记

$$a_n=\int_0^1 x^nf(x)\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

则

$$\sum_{n=0}^\infty a_n^2<\pi\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x,$$

这里常数 π 是可能最好的.

定理 8.7.17 设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$是非负序列，令

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad A^*(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!},$$

则

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n+1}\leqslant\pi\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!n!}\frac{a_m a_n}{2^{m+n+1}},$$

$$\int_0^1 A^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\pi\int_0^{\infty}\{e^{-x}A^*(x)\}^2\mathrm{d}x.$$

8.7.3 哈代不等式及其类似情形

为了简化希尔伯特不等式原先的证明，顺带发现了级数(离散)型及其相应的积分型的两个定理，它们是由哈代(Hardy)首先证明的.

定理 8.7.18 设$p>1$，且

$$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad a_n\geqslant 0,\quad n=1,2,\cdots,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p,$$

等号仅当所有a_n皆为零时成立.

定理 8.7.19 设$p>1$，$f\in L^p(0,\infty)$，且

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\quad f(x)\geqslant 0,\quad \forall\, x\in(0,\infty),$$

则

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{\infty}[f(x)]^p\mathrm{d}x,$$

等号仅当$f=0$时成立.

定理 8.7.18 与定理 8.7.19 有许多类似情形和推广. 先看几个积分不等式，它们能从式(8.60)用一种简单一致的方法导出.

在式(8.60)中，取

$$K(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & x\leqslant y,\\ 0, & x>y.\end{cases}$$

于是

$$k=\int_0^\infty K(x,1)x^{-1/p}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{-1/p}\mathrm{d}x=\frac{p}{p-1},$$

这时得出下面的结论.

定理 8.7.20 设 $p>1$,且

$$F(x)=\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t,\ f(x)\geqslant 0,\quad \forall\ x\in(0,\infty),$$

则

$$\int_0^\infty F^p\mathrm{d}x\leqslant p^p\int_0^\infty (xf)^p\mathrm{d}x,$$

等号仅当 $f=0$ 时成立.

在式(8.60)中,取

$$K(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(r)}\dfrac{(y-x)^{r-1}}{y^r}, & x<y,\\ 0, & x\geqslant y,\end{cases}$$

其中 $r>0$, Γ 是伽马函数. 于是

$$k=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^1 x^{-1/p}(1-x)^{r-1}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(1-\dfrac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(r+1-\dfrac{1}{p}\right)},$$

这时得出下面的结论.

定理 8.7.21 设 $p>1$, $r>0$,且

$$f_r(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^x(x-t)^{r-1}f(t)\mathrm{d}t,\ f(x)\geqslant 0,\quad \forall\ x\in(0,\infty),$$

则

$$\int_0^\infty \left(\frac{f_r(x)}{x^r}\right)^p \mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(r+1-\frac{1}{p}\right)}\right]^p \int_0^\infty [f(x)]^p \mathrm{d}x.$$

等号仅当 $f\equiv 0$ 时成立. 设

$$f_r(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_x^\infty (t-x)^{r-1}f(t)\mathrm{d}t,\ f(x)\geqslant 0,\quad \forall\ x\in(0,\infty)$$

则

$$\int_0^\infty f_r^p \mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(r+\frac{1}{p}\right)}\right]^p \int_0^\infty (x^r f)^p \mathrm{d}x$$

等号仅当 $f\equiv 0$ 时成立.

在式(8.60)中,取

$$K(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^\alpha}{x^\alpha}, & x\leqslant y,\\ 0, & x>y,\end{cases}$$

其中 $\alpha<1/q$. 于是

$$k=\int_0^1 x^{-\alpha-\frac{1}{p}}\mathrm{d}x=\frac{p}{p-\alpha p-1}.$$

这时得出下面的结论.

定理 8.7.22 设 $p>1$, $r\neq 1$, f 是非负函数,且定义函数 F 如下:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\quad 当\ r>1\ 时,$$

$$F(x)=\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t,\quad 当\ r<1\ 时.$$

则

$$\int_0^\infty x^{-r}F^p\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p \int_0^\infty x^{-r}(xf)^p\mathrm{d}x, \tag{8.63}$$

等号仅当 $f\equiv 0$ 时成立.

现在再看两个级数不等式.

定理 8.7.23 设 $p>1$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是非负序列,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1}+\cdots)^p\leqslant p^p\sum_{n=1}^{\infty}(na_n)^p,$$

等号仅当所有 a_n 皆为零时成立.

定理 8.7.24 设 $p>1$,且

$$\begin{aligned}\Lambda_n&=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n, & \lambda_n&>0,\\ A_n&=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n, & a_n&\geqslant 0\end{aligned}\qquad n=1,2,\cdots,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(\frac{A_n}{\Lambda_n}\right)^p<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_na_n^p \tag{8.64}$$

除非所有 a_n 皆为零.

定理 8.7.23 与定理 8.7.18 之间的关系,类似定理 8.7.20 与定理 8.7.19 之间的关系. 式(8.64)与定理 8.7.18 之间的关系,则类似式(8.61)中后一不等式与定理 8.7.9 之间的关系.

若在定理 8.7.18 中用 $a_n^{1/p}$ 代替 a_n,则得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1^{1/p}+a_2^{1/p}+\cdots+a_n^{1/p}}{n}\right)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

由此,令 $p\to\infty$,可得到卡莱曼(Carleman)的一个不等式.

定理 8.7.25 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是非负序列,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}<e\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

等号仅当所有 a_n 皆为零时成立.

下面是相应的积分定理.

定理 8.7.26 若 f 为正函数,则

$$\int_0^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x\log f(t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x<e\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.7.4　$0<p<1$ 及两个参数的情形

前面的定理当涉及参数 p 时都假定了 $p>1$，实际上对 $0<p<1$ 的情形也常有确定的结论，两种情形之间最主要的差别在于不等号反号. 下面列出几个定理.

定理 8.7.27　若 $0<p<1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$f$ 和 g 是非负的一元函数，K 是非负的二元 -1 次齐次函数，且

$$\int_0^\infty K(x,1)x^{-1/p}\mathrm{d}x=\int_0^\infty K(1,y)y^{-1/q}\mathrm{d}y=k<\infty,$$

则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant k\left(\int_0^\infty f^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty g^q\mathrm{d}y\right)^{1/q},\tag{8.65}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}y\left(\int_0^\infty K(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right)^p\geqslant k^p\int_0^\infty f^p\mathrm{d}x.$$

这个定理对应定理 8.7.12，其中第一个不等式应理解为“若左端积分与右端第二个积分存在(即为有限值)，则右端第一个积分也存在，且使不等式成立”；第二个不等式应理解为“若左端积分存在，则右端积分也存在，且使不等式成立”.

因为当 $0<p<1$ 时取 $K(x,y)=1/(x+y)$ 会导致 $k=\infty$，所以不存在与希尔伯特定理 8.7.9 或定理 8.7.10 完全对应的定理.

定理 8.7.28　若 $0<p<1$，f 是非负函数，且

$$\int_0^\infty f^p\mathrm{d}x<\infty，即\ f^p\in L(0,\infty),$$

又设

$$F(x)=\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p \mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \int_0^{\infty}[f(x)]^p \mathrm{d}x, \qquad (8.66)$$

等号仅当 $f\equiv 0$ 时成立.

这个定理可以和定理 8.7.19 比较. 下面是对应定理 8.7.22 的结果.

定理 8.7.29 若 r 和 F 满足定理 8.7.22 的条件, 但 $0<p<1$, 则

$$\int_0^{\infty} x^{-r} F^p \mathrm{d}x > \left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p \int_0^{\infty} x^{-r}(xf)^p \mathrm{d}x.$$

下一个定理可与定理 8.7.23 比较.

定理 8.7.30 若 $0<p<1$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是非负序列, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p<\infty$, 则

$$\left(1+\frac{1}{1-p}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_n+a_{n+1}+\cdots}{n}\right)^p \geqslant \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

等号仅当所有 a_n 皆为零时成立.

现在将给出的定理也是希尔伯特定理的一个推广, 但是涉及两个彼此无关的参数 p_1 与 p_2 以及一个未定的常数 c.

定理 8.7.31 若 $p_1>1$, $p_2>1$, 且

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \geqslant 1, \quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1, \quad \frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=1,$$

记

$$\lambda=2-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2},$$

这样 $0<\lambda \leqslant 1$. 则

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{(m+n)^{\lambda}} \leqslant c\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^{p_1}\right)^{1/p_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p_2}\right)^{1/p_2}, \qquad (8.67)$$

其中 $c=c(p_1, p_2)$ 只与 p_1 和 p_2 有关

当 $p_2=p_1$ 时 $\lambda=1$, 式(8.67)即化为定理 8.7.9, 这时已知道 c

的可能最好值.在一般情形，c 的最好值未定.

下面是相应式(8.67)的积分不等式.

定理 8.7.32 在定理 8.7.31 的假定下，有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant c\left(\int_0^\infty f^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{1/p_1}\left(\int_0^\infty g^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{1/p_2}$$

8.7.5 重新排列

先讨论有限个非负数的数组

$$a_1, a_2, \cdots, a_n.$$

设 φ 是任何从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个一一对应，并记 $\varphi(k)=i_k$，$k=1,2,\cdots,n$，则称 φ 是一个**排列函数**，称

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$$

是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个**重新排列**(rearrangement). 因此，当说 a_1'，a_2'，$\cdots$，a_n' 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个重新排列时，意味着存在一个排列函数 φ，使得

$$a_k' = a_{i_k},\ i_k = \varphi(k),\ k=1,2,\cdots,n.$$

数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的从小到大的重新排列称为递增排列，记作

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots, \bar{a}_n,$$

即有 $\bar{a}_1 \leqslant \bar{a}_2 \leqslant \cdots \leqslant \bar{a}_n$. 同样可定义递减排列，且即 $\bar{a}_n, \bar{a}_{n-1}, \cdots, \bar{a}_1$.

下面是关于两个数组重新排列的一个非常简单而重要的定理.

定理 8.7.33 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是给定的两个非负数组，则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k$$

当两个数组互为同向单调(即同为递增或同为递减)时为最大，互为反向单调时为最小. 也就是说，成立

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k. \qquad (8.68)$$

式(8.68)有一个变形,有时颇为有用.

定理 8.7.34 若对于 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的任何重新排列 $b_1', b_2', \cdots, b_n'$ 皆有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k' \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 排法相同,即对每个 k, a_k 与 b_k 在各自数组中所处的大小序次相同,或者写成

$$(a_k - a_l)(b_k - b_l) \geqslant 0, \quad \forall\, k, l = 1, 2, \cdots, n.$$

下面再介绍涉及三个数组的定理,为此规定几种记号表示.设非负数组

$$a_{-n}, \cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_n,$$

它的几种特殊的重新排列的记号如下:

(1) $a_{-n}^+, \cdots, a_{-1}^+, a_0^+, a_1^+, \cdots, a_n^+$,满足 $a_0^+ \geqslant a_1^+ \geqslant a_{-1}^+ \geqslant a_2^+ \geqslant a_{-2}^+ \geqslant \cdots$;

(2) ${}^+a_{-n}, \cdots, {}^+a_{-1}, {}^+a_0, {}^+a_1, \cdots, {}^+a_n$,满足 ${}^+a_0 \geqslant {}^+a_{-1} \geqslant {}^+a_1 \geqslant {}^+a_{-2} \geqslant {}^+a_2 \geqslant \cdots$;

(3) $a_{-n}^*, \cdots, a_{-1}^*, a_0^*, a_1^*, \cdots, a_n^*$,满足 $a_0^* \geqslant a_1^* = a_{-1}^* \geqslant a_2^* = a_{-2}^* \geqslant \cdots$.

这种排列称为**对称递减的**.这时 $a_k^+ = {}^+a_k = a_k^*$, $k = -n, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n$.自然,不是任何包含奇数个数的数组都存在这种排列.

定理 8.7.35 设 $x_{-n}, \cdots, x_n$ 和 $y_{-n}, \cdots, y_n$ 为给定的包含 $2n+1$ 个数的非负数组,且 $c_{-2n}, \cdots, c_{2n}$ 为包含 $2n+1$ 个数的对称递减的非负数组.则双线性型

$$\sum_{i,j=-n}^{n} c_{i-j} x_i y_j$$

当 $x_{-n}, \cdots, x_n$ 为 $x_{-n}^+, \cdots, x_n^+$ (或 ${}^+x_{-n}, \cdots, {}^+x_n$)和 $y_{-n}, \cdots, y_n$ 为

$y_{-n}^{+},\cdots,y_n^{+}$（或 ${}^{+}y_{-n},\cdots,{}^{+}y_n$）时为最大. 也就是说，成立

$$\sum_{i,j=-n}^{n} c_{i-j}x_iy_j \leqslant \sum_{i,j=-n}^{n} c_{i-j}x_i^{+}y_j^{+} = \sum_{i,j=-n}^{n} c_{i-j}\,{}^{+}x_i\,{}^{+}y_j. \tag{8.69}$$

定理 8.7.36 设 $a_{-n},\cdots,a_n$；$b_{-n},\cdots,b_n$；$c_{-n},\cdots,c_n$ 为三个非负数集满足条件

$$a_0 \geqslant a_i = a_{-i},\ b_0 \geqslant b_i = b_{-i},\ c_0 \geqslant c_i = c_{-i},\ i = -n,\cdots,n.$$

则对于使得 a_0,b_0,c_0 不动之重新排列，和数

$$\sum_{i+j+k=0} a_ib_jc_k$$

当 $a_{-n},\cdots,a_n$ 为 $a_{-n}^{+},\cdots,a_n^{+}$；$b_{-n},\cdots,b_n$ 为 $b_{-n}^{+},\cdots,b_n^{+}$；$c_{-n},\cdots,c_n$ 为 $c_{-n}^{+},\cdots,c_n^{+}$ 时为最大. 也就是说，成立

$$\sum_{i+j+k=0} a_ib_jc_k \leqslant \sum_{i+j+k=0} a_i^{+}b_j^{+}c_k^{+}.$$

定理 8.7.37 设 $a_{-n},\cdots,a_n$；$b_{-n},\cdots,b_n$；$c_{-n},\cdots,c_n$ 为三个非负数集，且 $c_{-n},\cdots,c_n$ 存在对称递减的排列，则

$$\sum_{i+j+k=0} a_ib_jc_k \leqslant \sum_{i+j+k=0} a_i^{+}\,{}^{+}b_jc_k^{*} = \sum_{i+j+k=0} {}^{+}a_ib_j^{+}c_k^{*}.$$

此外，还有关于任意多个数组的重新排列的定理.

现在讨论函数的重新排列问题. 对于依赖单连续变元的函数有类似于前面定理 8.7.33～定理 8.7.37 的结论. 在列出定理之前，简单描述一下关于函数重新排列的概念.

设函数 $\varphi\in L^1(0,1)$ 且非负，因而 φ 可测且几乎处处为有限. 用 $M(y)$ 记集合

$$E(\varphi\geqslant y) = \{x\in(0,1)\,|\,\varphi(x)\geqslant y\}$$

的测度，M 明显是 y 的单调递减函数. 若用 $\bar{\varphi}$ 表示 M 的逆函数，即有

$$\bar{\varphi}(M(y)) = y,$$

则 $\bar{\varphi}$ 称为 φ 的**重新排列**，它也是一个单调递减函数. 图 8.3 是函数 φ、M、$\bar{\varphi}$ 的示意图.

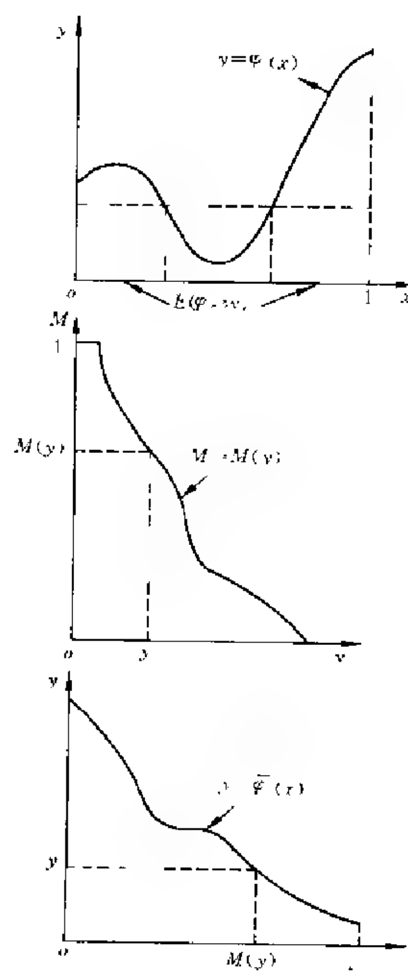


图 8.3

由定义及示意图可得知

$$\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \bar{\varphi}(t)\mathrm{d}t, \qquad \forall\ x \in (0,1).$$

依照上述方式,可以对任何区间上的非负函数定义它的重新排列.

此外还将用到函数的另一类型重新排列的概念. 设 $\varphi \in L(-\infty,\infty)$,$M(y)$表示集合

$$E(\varphi \geqslant y) = \{x \in (-\infty,\infty) \mid \varphi(x) \geqslant y\}$$

的测度,$\bar{\varphi}$是 M 的逆函数即已定义的 φ的重新排列.
利用规定

$$\varphi^*\left(\frac{1}{2}M(y)\right) = y \text{ 即 } \varphi^*(x) = \bar{\varphi}(2x)\ (\forall\ x > 0)$$

和

$$\varphi^*(-x) = \varphi^*(x)$$

来定义一个偶函数 φ^*. 于是当从原点出发时,φ^* 在原点两边对称递减的,则称 φ^* 是 φ 的对称递减的**重新排列**.

下面定理 8.7.38 是相应于式(8.68)的关于两个函数重新排列的积分不等式,定理 8.7.39 是相应于定理 8.7.36 与定理 8.7.37的关于三个函数重新排列的积分不等式.

定理 8.7.38 设 φ,ψ 为区间$(0,a)$上的非负函数,a 为有限或无穷,则

$$\int_0^a \varphi\psi\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a \bar{\varphi}\bar{\psi}\,\mathrm{d}x.$$

定理 8.7.39 若 f,g,h 为$(-\infty,\infty)$上的非负函数,f^*,g^*,h^* 为相应的对称递减重新排列. 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)h(-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g^*(y)h^*(-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定理 8.7.39 中与定理 8.7.35 相应的特殊情形如下.

定理 8.7.40 若 f,g,h 为 $(-\infty,\infty)$ 上的非负函数,且 h 是对称递减的(即 h 是偶函数且当 $x>0$ 时是递减的). 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)h(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^{*}(x)g^{*}(y)h(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

应用式(8.69)和定理 8.7.40 于特殊情形

$$c_{i,j} = |i-j|^{-\lambda}$$

和

$$h(x-y) = |x-y|^{-\lambda},$$

引出下述两个定理.

定理 8.7.41 若 $a_{-n},\cdots,a_n$ 和 $b_{-n},\cdots,b_n$ 为非负数组,$p_1>1$,$p_2>1$,且

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1,\quad \lambda = 2-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2},$$

这样 $0<\lambda<1$. 又

$$\sum_{i=-n}^{n} a_i^{p_1} = A,\quad \sum_{j=-n}^{n} b_j^{p_2} = B.$$

则

$$\sum_{\substack{i,j=-n\\ i\neq j}}^{n} \frac{a_i b_j}{|i-j|^{\lambda}} \leqslant c A^{1/p_1} B^{1/p_2} \tag{8.70}$$

其中 $c=c(p_1,p_2)$ 只与 p_1 和 p_2 有关.

定理 8.7.42 若 f 和 g 是非负函数,$p_1>1$,$p_2>1$,且

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1,\quad \lambda = 2-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2},$$

又

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)]^{p_1}\mathrm{d}x = F,\quad \int_{-\infty}^{\infty}[g(x)]^{p_2}\mathrm{d}x = G,$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{|x-y|^{\lambda}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant cF^{1/p_1}G^{1/p_2}, \tag{8.71}$$

其中 $c=c(p_1,p_2)$ 只与 p_1 和 p_2 有关.

在推证定理 8.7.42 的同时得出一个定理.

定理 8.7.43 设 $p>1$, $f\in L^p(0,\infty)$ 为非负函数, 且

$$0<\alpha<\frac{1}{p}, \quad r=\frac{p}{1-\alpha p}$$

和

$$f_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(y)(x-y)^{\alpha-1}\mathrm{d}y,$$

这里 Γ 是伽马函数. 则 $f_\alpha\in L^r(0,\infty)$ 且

$$\int_0^\infty f_\alpha^r\mathrm{d}x \leqslant c\left(\int_0^\infty f^p\mathrm{d}x\right)^{r/p}, \tag{8.72}$$

其中 c 只依赖 p 和 α.

最后, 给出另外一个关于将一函数按递减重新排列的定理, 它在函数论中有重要应用, 可表述成下面的两种形式.

定理 8.7.44 设函数 f 在一有限区间 $(0,a)$ 中为非负且可积, $\bar{f}$ 是 f 依递减的重新排列,

$$\Theta(x)=\max_{0\leqslant\xi<x}\frac{1}{x-\xi}\int_\xi^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$\bar{\Theta}$ 是 Θ 依递减的重新排列. 则

$$\bar{\Theta}(x)\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

定理 8.7.45 设函数 f 满足定理 8.7.44 中的条件, 函数 Θ 如定理 8.7.44 中的定义, 又设 h 是区间 $[0,\infty)$ 上的任一递增函数, 则

$$\int_0^a h(\Theta(x))\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a h\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

参考文献

1. Hardy G H, Littlewood J E and Pòlya G 著,越民义译. 不等式. 科学出版社,1965
2. Beckenbach E F and Bellman R. Inequalities. Springer Verlag, Berlin. Gottingen · Heidelberg,1961

9 特殊函数

9.1 引言

特殊函数(special functions)一般是指在数学、物理学、技术科学及其它学科中经常使用的一些非初等函数.特殊函数的公式、定理的推导一般都较烦琐,这里只给出主要的定义和结论.

以下举一个数学物理问题中出现特殊函数的例子.

例 9.1.1 设在球域上讨论均匀物体的定常温度场,空间中的点用球坐标(r,θ,φ)表示,温度$u(r,\theta,\varphi)$满足以下边值问题:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

$$0\leqslant r<r_0,0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi. \tag{9.1}$$

$$u(r_0,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi). \tag{9.2}$$

其中式(9.1)是球域上的**拉普拉斯方程**,式(9.2)是在球面$r=r_0$上给定的边界条件,f是已知的二元函数.

用分离变量法解边值问题(9.1)~(9.2),设u具有分离变量的形式,即$u=R(r)Y(\theta,\varphi)$,代入式(9.1)可整理成

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R}=-\frac{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{Y}$$

此式左边是变量r的函数,右边是变量θ,φ的函数.要使等号成立,只能两边都等于常数,记为$-\lambda$,λ是待定的.这样可得到:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R=0, \tag{9.3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0, \tag{9.4}$$

式(9.3)是欧拉方程，若 λ 确定了，容易求出其解. 而式(9.4)还比较复杂，可再进行分离变量. 令 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，代入式(9.4)，类似上述过程，再引入待定常数 μ，得到

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\mu\Phi=0, \tag{9.5}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0 \tag{9.6}$$

因为 u 满足周期性条件 $u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta,\varphi+2\pi)$，所以 Φ 是以 2π 为周期的函数，利用周期性的条件，可求得式(9.5)的解为

$$\Phi(\varphi)=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi,\quad m=0,1,2,\cdots,$$

$$\mu=m^2 \qquad m=0,1,2,\cdots. \tag{9.7}$$

对于式(9.6)，一般不容易直接看出它的解. 作自变量的变换 $t=\cos\theta$，式(9.6)化为

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{d\Theta}{dt}\right]-\frac{m^2}{1-t^2}\Theta+\lambda\Theta=0 \tag{9.8}$$

或

$$(1-t^2)\frac{d^2\Theta}{dt^2}-2t\frac{d\Theta}{dt}-\left(\frac{m^2}{1-t^2}-\lambda\right)\Theta=0.$$

由于 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以有 $-1\leqslant t\leqslant1$，可以在 $t=\pm1$ 上 Θ 有界的条件下求解式(9.8). 由二阶线性常微分方程(9.8)及有关边界条件所确定的函数 $\Theta(t)$ 就是一种特殊函数，我们将在(9.6)讨论这种特殊函数.

一些初等函数，例如 $\sin kx$ 和 $\cos kx$，除了初等数学中的定义外，还可以用幂级数来定义，也可以通过微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$ 的解来定义，有时还能通过不同形式的积分式来定义. 本章讨论的特殊函数也可以通过不同方法来定义. 上述例子就是通过微分方程

的解来定义函数. 只要给出某类特殊函数的定义,讨论清楚它们的性质,便可以像初等函数那样应用它们. 在需要某一特殊函数的函数值时,可以查各种特殊函数的函数表,当然,也可以通过有关的程序在计算机上计算出来.

9.2 Γ 函数和 B 函数

9.2.1 Γ 函数的定义

Γ 函数(Γ function)是一种经常使用的函数,通常由如下的积分式定义:

定义 9.2.1 对于 $z\in\mathbf{C}$,

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt,\quad \mathrm{Re}z>0$$

所确定的函数称为 **Γ 函数**(Γ function).

以上积分式称为欧拉积分. 它定义了一个复变量的函数. 规定 $\mathrm{Re}z>0$ 可保证积分式的收敛性. 如果自变量取为实的,即 $z\in\mathbf{R}$,上式变成 $\Gamma(x)$,在 $x>0$ 有意义.

Γ 函数的其它定义如下:

定义 9.2.2 Γ 函数的魏尔斯特拉斯(Weierstrass)定义

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)\right]$$

所确定的函数称为 Γ 函数.

定义 9.2.2 中的 γ 为欧拉常数.

定义 9.2.3 欧拉常数定义为

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$
$$=0.5772156649\cdots.$$

定义 9.2.4 Γ 函数的欧拉定义

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right\}$$

所确定的函数称为Γ函数.

在定义9.2.2和定义9.2.4中,都是用无穷乘积来定义Γ函数,其中的表达式除 $z=0,-1,-2\cdots$ 外都是有意义的,所以它们是定义9.2.1的扩张,定义9.2.1只对 $\mathrm{Re}z>0$ 有意义.

定理 9.2.5 定义9.2.2和定义9.2.4是等价的.对于 $\mathrm{Re}z>0$,它们与定义9.2.1亦等价.

9.2.2 Γ函数的性质

(1) 除 z 取为非正整数及 $z=\infty$ 外,$\Gamma(\cdot)$ 是解析函数.

(2) $z=0,-1,-2,\cdots$ 是Γ函数的简单极点.

(3) $\Gamma(z)$ 取非零函数值.

(4) Γ函数满足以下关系:

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z). \tag{9.9}$$

$$\Gamma(1)=1. \tag{9.10}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{9.11}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{9.12}$$

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(z+n)}, \tag{9.13}$$

其中 γ 为欧拉常数.

式(9.9)一般可由定义9.2.4推出,但在 $\mathrm{Re}z>0$ 的情形下,也可以由定义9.2.1作分部积分得出.若 $-1<\mathrm{Re}z<0$,按照定义9.2.1,$\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ 有意义,所以 $\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ 可以看成定义9.2.1在 $-1<\mathrm{Re}z<0$ 的推广.同理,可推广到 $-2<\mathrm{Re}z<-1$,$-3<\mathrm{Re}z<-1$,……上去.

对于 $m=$ 正整数，根据式(9.9)有

$$\Gamma(m+1)=m! \tag{9.14}$$

这里，按一般规定 $0!=1$.

对于 $z=1$，由式(9.10)与(9.13)，有

$$\begin{aligned}\Gamma'(1) &= -1-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+n)} \\ &= -1-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= -\gamma.\end{aligned}$$

类似可得

$$\frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)}=-\gamma-2\ln 2.$$

9.2.3 B函数

定义 9.2.6

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0$$

所确定自变量为 p,q 的函数称为 **B 函数**(B function).

B 函数有如下性质：

$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p), \tag{9.15}$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{9.16}$$

在定义 9.2.6 的积分式中，若令 $t=\sin^2\varphi$，则有

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0.$$

再令 $2p-1=m,2q-1=n$，得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\varphi\cos^n\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)},$$

$$\mathrm{Re}\,m > -1, \mathrm{Re}\,n > -1. \tag{9.17}$$

这是计算三角函数积分很有用的一个公式.

例 9.2.7 设 $m=2k+1$(k 为非负整数),$n=0$. 则式(9.17)成为

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}.$$

再利用式(9.9)的递推公式,得到

$$I=\frac{k!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{2k(2k-2)\cdots4\cdot2}{(2k+1)(2k-1)\cdots5\cdot3},$$

这是微积分中经常使用的积分公式.

9.3 超几何函数

9.3.1 超几何级数和超几何函数

这里引入复变量 z 的一种幂级数,它的表示式是有普遍性的,可以包括很多特殊的情形.这个幂级数写成:

$$1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}$$
$$+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!}+\cdots. \tag{9.18}$$

引入记号

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)},\ n\geqslant1,$$
$$(\alpha)_0=1,\ \alpha\neq0. \tag{9.19}$$

则式(9.18)可以写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

不难验证

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1} z^{n+1}}{(c)_{n+1}(n+1)!} \middle/ \frac{(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!} \right| = |z|.$$

所以级数(9.18)具有收敛圆 $|z|<1$. 而在圆周 $|z|=1$ 上,可以证明,若 c 非零,亦非负整数,则在条件 $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$ 下,式(9.18)绝对收敛,所以我们引入以下的定义和符号:

定义 9.3.1

$$\mathrm{F}(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

称为**超几何级数**(hypergeometric series). 它在单位圆 $|z|<1$ 所确定的解析函数或经解析延拓后所得到的函数,称为**超几何函数**(hypergeometric function). 其函数值亦用记号 $\mathrm{F}(a,b;c;z)$,有时记为

$$\mathrm{F}\begin{bmatrix} a, & b; & \\ & c; & z \end{bmatrix}.$$

例 9.3.2 若取 $a=c$, $b=1$,则得

$$\mathrm{F}(a,1;a;z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

即为几何级数.

一些初等函数可以通过超几何函数来表示,例如:

$$\mathrm{F}(-a,b;b;-z)=(1+z)^a, \tag{9.20}$$

$$z\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right)=\arcsin z, \tag{9.21}$$

$$z\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2\right)=\arctan z, \tag{9.22}$$

$$z\mathrm{F}(1,1;2;-z)=\ln(1+z). \tag{9.23}$$

将定义 9.3.1 中$(b)_n$,$(c)_n$用式(9.19)所示的Γ函数表示,再利用B函数的性质(9.16)及二项式展开定理,可以得到超几何级数的积分表示式:

定理 9.3.3 若$|z|<1$,$\mathrm{Re}c>\mathrm{Re}b>0$,则

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\mathrm{d}t.$$

类似的推导方法,可得到

定理 9.3.4(高斯定理) 若$\mathrm{Re}(c-a-b)>0$,c不为零及负整数,则

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

定理 9.3.5(范德蒙德(Vandermonde)定理) 设n为正整数,则

$$F(-n,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(c-b)}=\frac{(c-b)_n}{(c)_n}.$$

在超几何函数$F(a,b;c;z)$中,若参数a加上或减去1,得到$F(a+1,b;c,z)$或$F(a-1,b;c;z)$.参数b或c亦可类似加减1,这些函数之间有如下性质.

性质 9.3.6 **邻接函数关系**(contiguous function relations)如下:

记$F=F(a,b;c;z)$,$F(a+)=F(a+1,b;c;z)$,$F(a-)=F(a-1,b;c;z)$,类似确定$F(b+)$,$F(b-)$,$F(c+)$,$F(c-)$的意义,则有

(1) $(a-b)F=aF(a+)-bF(b+)$,

(2) $(a-c+1)F=aF(a+)-(c-1)F(c-)$,

(3) $[a+(b-c)z]F=a(1-z)F(a+)$

$$-c^{-1}(c-a)(c-b)zF(c+),$$

(4) $(1-z)F=F(a-)-c^{-1}(c-b)zF(c+)$,

(5) $(1-z)F=F(b-)-c^{-1}(c-a)zF(c+)$,

由以上5个基本的邻接关系可以得到：

(6) $[2a-c+(b-a)z]F=a(1-z)F(a+)-(c-a)F(a-)$,

(7) $(a+b-c)F=a(1-z)F(a+)-(c-b)F(b-)$,

(8) $(c-a-b)F=(c-a)F(a-)-b(1-z)F(b+)$,

(9) $(b-a)(1-z)F=(c-a)F(a-)-(c-b)F(b-)$,

(10) $[1-a+(c-b-1)z]F=(c-a)F(a-)$
$$-(c-1)(1-z)F(c-),$$

(11) $[2b-c+(a-b)z]F=b(1-z)F(b+)-(c-b)F(b-)$,

(12) $[b+(a-c)z]F=b(1-z)F(b+)$
$$-c^{-1}(c-a)(c-b)zF(c+),$$

(13) $(b-c+1)F=bF(b+)-(c-1)F(c-)$,

(14) $[1-b+(c-a-1)z]F=(c-b)F(b-)$
$$-(c-1)(1-z)F(c-),$$

(15) $[c-1+(a+b+1-2c)z]F=(c-1)(1-z)F(c-)$
$$-c^{-1}(c-a)(c-b)zF(c+).$$

从定义 9.3.1 的级数式对 z 求导，可以推导出 $w=F(a,b;c;z)$满足以下**超几何微分方程**(hypergeometric differential equation)

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz}-abw=0. \quad (9.24)$$

也可以从方程(9.24)出发，求形为 $w=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{k+\rho}$ 的级数解，可以得到一个解为 $w_1=F(a,b;c;z)$，另一个线性无关解为

$$w_2=z^{1-c}F(a+1-c,b+1-c;2-c;z). \quad (9.25)$$

可以通过超几何函数的定义和某些简单的变换，证明以下定理：

定理 9.3.7 若 $|z|<1$ 及 $\left|\frac{z}{1-z}\right|<1$，则

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{-a}F\left(a,c-b;c;\frac{-z}{1-z}\right).$$

定理 9.3.8 若 $|z|<1$，则

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z).$$

定理 9.3.9 若 $2b$ 既不是零亦不是负整数，且 $|z|<1$，$|4z(1+z)^{-2}|<1$，则

$$(1+z)^{-2a}F\left(a,b;2b;\frac{4z}{(1+z)^2}\right)=F\left(a,a-b+\frac{1}{2};b+\frac{1}{2};z^2\right).$$

定理 9.3.10 若 $2b$ 既不是零亦不是负整数，且 $|z|<\frac{1}{2}$，$\left|\frac{z}{1-z}\right|<1$，则

$$(1-y)^{-a}F\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a+\frac{1}{2};b+\frac{1}{2};\frac{y^2}{(1-y)^2}\right)=F(a,b;2b;2y).$$

定理 9.3.11 若 $a+b+\frac{1}{2}$ 既不是零亦不是负整数，且 $|z|<1$，$|4z(1-z)|<1$，则

$$F\left(a,b;a+b+\frac{1}{2};4z(1-z)\right)=F\left(2a,2b;a+b+\frac{1}{2};z\right).$$

9.3.2 广义超几何函数

在超几何函数定义 9.3.1 的一般项中，分子有两个参数 a,b，分母有一个参数 c，它的一种自然的推广是将分子和分母的参数分别设为 p 个和 q 个.

定义 9.3.12 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p}(\alpha_i)_n}{\prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_n}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n(\beta_2)_n\cdots(\beta_q)_n}\frac{z^n}{n!}$$

所确定的函数称为**广义超几何函数**(generalized hypergeometric

function)，其函数值记为

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p;\\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q;\end{matrix}z\right] \text{或} {}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q;z), $$

或简记为${}_pF_q$. 其中参数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q$ 不能取值零和负整数.

关于定义 9.3.12 中幂级数的收敛性，可以证明，当 $p\leqslant q$ 时，级数对所有有限的 z 值都收敛. 当 $p=q+1$ 时，级数对 $|z|<1$ 收敛而对 $|z|>1$ 发散，若 $\operatorname{Re}\left(\sum\limits_{j=1}^{q}\beta_j-\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i\right)>0$，则在 $|z|=1$ 亦收敛. 当 $p>q+1$ 时，级数对除 $z=0$ 外的任何 z 值都发散. 但在级数中断为 z 的多项式的情况下，就不存在收敛性的问题.

当 $p=2,q=1$ 时(符合 $p=q+1$)，即得${}_2F_1(\alpha_1,\alpha_2;\beta_1;z)$，这种情形就是超几何函数.

当 $p=0$ 时，可以认为定义 9.3.12 中分子不出现参数 α_i，所缺参数位置上记“—”，例如

$$ {}_0F_1(-;b;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(b)_n n!}. $$

$q=0$ 或 $p=q=0$ 时亦类似，例如

$$ {}_0F_0(-;-;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z $$

$$ \begin{aligned} {}_1F_0(a;-;z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!}z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)(-a-1)\cdots(-a-n+1)}{n!}(-z)^n \\ &= (1-z)^{-a}. \end{aligned} $$

可以验证，当 b_j 都不是非正整数时，$w={}_pF_q(a_1,\cdots,a_p;b_1,\cdots,b_q;z)$满足微分方程

$$ \left[\theta\prod_{j=1}^{q}(\theta+b_j-1)-z\prod_{i=1}^{p}(\theta+a_i)\right]w=0, \qquad (9.26) $$

其中 $\theta = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$.

广义超几何函数有如下的积分表达式：

定理 9.3.13 若 $p\leqslant q+1$, $\mathrm{Re}\,b_1>\mathrm{Re}\,a_1>0$, $b_1,b_2,\cdots,b_q$ 均不是零或负整数，则在条件 $|z|<1$ 时

$$
{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\cdots,a_p;\\ b_1,b_2,\cdots,b_q;\end{matrix}z\right]
$$

$$
=\frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1-a_1)}\int_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{b_1-a_1-1}\,{}_{p-1}F_{q-1}\left[\begin{matrix}a_2,\cdots,a_p;\\ b_2,\cdots,b_q;\end{matrix}zt\right]\mathrm{d}t.
$$

若 $p\leqslant q$，则条件 $|z|<1$ 可略去.

定理 9.3.14 若 $\mathrm{Re}\alpha>0$, $\mathrm{Re}\beta>0$, k 及 s 为正整数，则在以下所得级数的收敛域内有：

$$
\int_0^t x^{\alpha-1}(t-x)^{\beta-1}\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p;\\ b_1,\cdots,b_q;\end{matrix}cx^k(t-x)^s\right]\mathrm{d}x
$$

$$
=\mathrm{B}(\alpha,\beta)t^{\alpha+\beta-1}\,{}_{p+k+s}F_{q+k+s}
$$

$$
\left[\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p,\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha+1}{k},\cdots,\frac{\alpha+k-1}{k},\frac{\beta}{s},\frac{\beta+1}{s},\cdots,\frac{\beta+s-1}{s};\\ b_1,\cdots,b_q,\frac{\alpha+\beta}{k+s},\frac{\alpha+\beta+1}{k+s},\cdots,\frac{\alpha+\beta+k+s-1}{k+s};\end{matrix}\frac{k^ks^sct^{k+s}}{(k+s)^{k+s}}\right].
$$

定理 9.3.15 若 $\mathrm{Re}\alpha>0$, $\mathrm{Re}\beta>0$, k 为正整数，则在以下所得级数收敛域内有：

$$
\int_0^t x^{\alpha-1}(t-x)^{\beta-1}\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p;\\ b_1,\cdots,b_q;\end{matrix}cx^k\right]\mathrm{d}x=\mathrm{B}(\alpha,\beta)t^{\alpha+\beta-1}\times
$$

$$
{}_{p+k}F_{q+k}\left[\begin{matrix}a_1,\cdots,a_p,\frac{\alpha}{k},\frac{\alpha+1}{k},\cdots,\frac{\alpha+k-1}{k};\\ b_1,\cdots,b_q,\frac{\alpha+\beta}{k},\frac{\alpha+\beta+1}{k},\cdots,\frac{\alpha+\beta+k-1}{k};\end{matrix}ct^k\right].
$$

以下是几个特殊的广义超几何函数的性质.

定理 9.3.16（萨耳许茨(Saalschütz)定理） 若 n 为非负的整数，且 a,b,c 与 n 无关，则

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,a,b;\\ c,1-c+a+b-n;\end{matrix}\ 1\right]=\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n}.
$$

定理 9.3.17(萨耳许茨定理) 若 n 为非负的整数,且 a,b 与 n 无关,则

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,a+n,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b;\\ 1+a-b,\frac{1}{2}a+\frac{1}{2};\end{matrix}\ 1\right]=\frac{(b)_n}{(1+a-b)_n}.
$$

定理 9.3.18(惠普尔(Whipple)定理) 若 n 为非负的整数,且 b,c 与 n 无关,则

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,b,c;\\ 1-b-n,1-c-n;\end{matrix}\ x\right]
$$

$$
=(1-x)^n\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2}n,-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},1-b-c-n;\\ 1-b-n,1-c-n;\end{matrix}\ \frac{-4x}{(1-x)^2}\right].
$$

定理 9.3.19(惠普尔定理) 若 $a-b,a-c$ 及 a 均不是负整数,则

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c;\\ 1+a-b,1+a-c;\end{matrix}\ x\right]
$$

$$
=(1-x)^{-a}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a+\frac{1}{2},1+a-b-c;\\ 1+a-b,1+a-c;\end{matrix}\ \frac{-4x}{(1-x)^2}\right].
$$

定理 9.3.20(狄克逊(Dixon)定理) 若 a,b 及 c 使下式有意义,则

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c;\\ 1+a-b,1+a-c;\end{matrix}\ 1\right]
$$

$$
=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}a\right)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}a-b-c\right)}{\Gamma(1+a)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}a-b\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}a-c\right)\Gamma(1+a-b-c)}.
$$

9.3.3 合流超几何函数

广义超几何函数的一些特殊情形，如${}_0F_0$（指数函数），${}_1F_0$（二项式），${}_0F_1$ 及${}_2F_1$（超几何函数）等例子已经见到了．另一个重要例子就是以下的函数：

定义 9.3.21

$$ {}_1F_1(a;b;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} $$

所确定的函数称**合流超几何函数**(confluent hypergeometric function)，或称为**库默尔(Kummer)函数**.

根据式(9.26)，$w={}_1F_1(a;b;z)$满足方程

$$ [\theta(\theta+b-1)-z(\theta+a)]w=0, \qquad (9.27) $$

其中$\theta\equiv z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$，也可以写成

$$ z\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+(b-z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-aw=0. \qquad (9.28) $$

若 b 不是整数，方程(9.28)与 ${}_1F_1(a;b;z)$线性无关的解可取为

$$ w=z^{1-b}{}_1F_1(a+1-b;2-b;z) \qquad (9.29) $$

${}_1F_1$ 和它的邻接函数有如下关系

$$ \begin{aligned} &(a-b+1){}_1F_1(a;b;z)\\ &=a{}_1F_1(a+1;b;z)-(b-1){}_1F_1(a;b-1;z), \qquad (9.30)\\ &b(a+z){}_1F_1(a;b;z)\\ &=ab{}_1F_1(a+1;b;z)-(a-b)z{}_1F_1(a;b+1;z), \qquad (9.31)\\ &b{}_1F_1(a;b;z)=b{}_1F_1(a-1;b;z)+z{}_1F_1(a;b+1;z). \end{aligned} $$

(9.32)

若 $\mathrm{Re}b>\mathrm{Re}a>0$，以下积分式成立：

$$ {}_1F_1(a;b;z)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}\mathrm{d}t. $$

(9.33)

${}_1F_1$ 还有如下性质：

定理 9.3.22（库默尔定理） 若 b 不为零亦不为负整数，则

$${}_1F_1(a;b;z) = e^z\,{}_1F_1(b-a;b;-z).$$

定理 9.3.23（库默尔定理） 若 $2a$ 不是负的奇整数，则

$$e^{-z}\,{}_1F_1(a;2a;2z) = {}_0F_1\left(-;a+\frac{1}{2};\frac{1}{4}z^2\right).$$

9.4 贝塞尔函数

9.4.1 第一类贝塞尔函数的基本概念

贝塞尔(Bessel)函数是科学技术和工程中经常使用的一种特殊函数.

定义 9.4.1 若 ν 为不是负整数的实数或复数，则令

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\,{}_0F_1\left(-;1+\nu;-\frac{z^2}{4}\right),$$

若 $\nu=-n$ 是负整数，则令

$$J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z).$$

这样确定的函数称为 **ν 阶的第一类 Bessel 函数**(Bessel function of the first kind).

根据广义超几何函数的定义 9.3.12 有

$$\begin{aligned}{}_0F_1\left(-;1+\nu;-\frac{z^2}{4}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^k}{(1+\nu)_k k!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\nu)(-1)^k z^{2k}}{k!\Gamma(1+\nu+k)2^{2k}}.\end{aligned}$$

所以可得到贝塞尔函数的级数表示式

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(1+\nu+k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{9.34}$$

关于 J_ν 满足的微分方程，可以先从 $u={}_0F_1(-;b;y)$ 出发，类似式(9.26)，u 满足方程

$$[\theta(\theta+b-1)-y]u=0$$

其中 $\theta=y\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$. 这样可得到 $u={}_0F_1\left(-;1+\nu;-\dfrac{z^2}{4}\right)$ 满足方程

$$z\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+(2n+1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+zu=0.$$

再令 $w=z^\nu u$,得到 **ν 阶贝塞尔方程**

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+(z^2-\nu^2)w=0. \tag{9.35}$$

根据以上推导,式(9.35)有一个解是

$$w=z^\nu{}_0F_1\left(-;1+\nu;\frac{-z^2}{4}\right).$$

它和 $J_\nu(z)$只差常数因子.

对于方程(9.35),也可以用级数解的办法. 令 $w=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{k+\rho}$ $(c_0\neq 0)$ 代入方程,确定出系数 c_k 的递推关系,并适当选择系数 c_0. 可以说明式(9.34)表示的 $J_\nu(z)$是式(9.35)的一个解. 同时 $J_{-\nu}(z)$也是式(9.35)的一个解.

若 ν 不是整数,式(9.35)的两个线性无关解可取为 $w_1=J_\nu(z)$, $w_2=J_{-\nu}(z)$. 若 $\nu=n$ 为整数, $J_n(z)$与 $J_{-n}(z)$是线性相关的,这时式(9.35)的一个解可取为 $w=J_n(z)$,另一线性无关解则要另外求出.

可以由式(9.34)推导不同贝塞尔函数之间的关系. 例如,对变量 z 求导,即可验证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\nu J_\nu(z)]=z^\nu J_{\nu-1}(z), \tag{9.36}$$

或化成

$$zJ'_\nu(z)-zJ_{\nu-1}(z)=-\nu J_\nu(z).$$

同理可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^{-\nu}\mathrm{J}_\nu(z)\right] = -z^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(z), \tag{9.37}$$

或

$$z\mathrm{J}_\nu'(z) = -z\mathrm{J}_{\nu+1}(z) + \nu\mathrm{J}_\nu(z).$$

由式(9.36)与(9.37)分别消去$\mathrm{J}_\nu(z)$及$\mathrm{J}_\nu'(z)$可得到

$$2\mathrm{J}_\nu'(z) = \mathrm{J}_{\nu-1}(z) - \mathrm{J}_{\nu+1}(z), \tag{9.38}$$

$$2\nu\mathrm{J}_\nu(z) = z[\mathrm{J}_{\nu-1}(z) + \mathrm{J}_{\nu+1}(z)]. \tag{9.39}$$

式(9.36)~(9.39)称为贝塞尔函数的**递推关系**(recurrence relations).例如,当$\nu=0$时,有

$$\mathrm{J}_0'(z) = -\mathrm{J}_1(z) \tag{9.40}$$

可以证明,$\mathrm{J}_\nu(z)$有如下的积分表达式.

定理 9.4.2 若$\mathrm{Re}\nu > -\frac{1}{2}$,$\arg(1-t^2)=0$,则

$$\mathrm{J}_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t.$$

在此定理中,令$t=\cos\theta$,可得到

$$\mathrm{J}_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

或化为如下的**泊松(Poisson)积分表达式**

$$\mathrm{J}_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi \cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,\mathrm{d}\theta. \tag{9.41}$$

9.4.2 整数阶和半奇数阶的第一类贝塞尔函数

$\nu=n\,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时的贝塞尔函数就是整数阶的贝塞尔函数,它们有一些特殊的性质.

定义 9.4.3 若以z,t为自变量的函数F按照一个自变量t展开为罗朗(Laurent)级数

$$F(z,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z)t^n,$$

则称F生成函数集$\{f_n\}$,F称为$\{f_n\}$的**生成函数**(generating function).

定理 9.4.4 对$t\neq 0$及所有有限的z,

$$\exp\left[\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n.$$

定义 9.4.4 说明$\exp\left[\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]$是整数阶的第一类贝塞尔函数的生成函数.

由定理 9.4.4 可推出一系列重要的展开式,如令$t=ie^{i\theta}$,得到

$$e^{iz\cos\theta}=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(z)\cos n\theta. \tag{9.42}$$

比较它的实部和虚部,得到

$$\cos(z\cos\theta)=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(z)\cos 2n\theta, \tag{9.43}$$

$$\sin(z\cos\theta)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(z)\cos(2n+1)\theta. \tag{9.44}$$

若令$\theta=0$,得到

$$\cos z=J_0(z)-2J_2(z)+2J_4(z)-\cdots+(-1)^n 2J_{2n}(z)+\cdots, \tag{9.45}$$

$$\sin z=2J_1(z)-2J_3(z)+\cdots+(-1)^n 2J_{2n+1}(z)+\cdots. \tag{9.46}$$

这就是$\cos z$和$\sin z$的贝塞尔函数展开.

利用生成函数,令$z=x+y$,可推得如下的加法公式:

$$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)J_{n-k}(y). \tag{9.47}$$

还有一个重要的加法公式是

$$\mathrm{J}_0(R) = \mathrm{J}_0(r_1)\mathrm{J}_0(r_2) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{J}_m(r_1)\mathrm{J}_m(r_2)\cos m\theta. \quad (9.48)$$

其中 $R=(r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$. 如果 r_1, r_2 分别表示平面上任两点 P_1, P_2 到原点 O 的距离, θ 表示 $\overline{OP_1}$ 和 OP_2 之间的夹角, 则 R 表示 P_1 和 P_2 之间的距离.

对于整数阶的贝塞尔函数, 除了有式(9.41)的表达式外, 还有**贝塞尔积分表达式**

$$\mathrm{J}_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta - z\sin\theta)\mathrm{d}\theta. \quad (9.49)$$

对于半奇数阶的函数 $\mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(z)$ $(n=0,\pm 1,\pm 2\cdots)$, 有一些重要的性质, 其中之一是这些函数可以用初等函数来表示. 例如, 根据式(9.34)

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{2k-1}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}.\end{aligned}$$

所以有

$$\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z. \quad (9.50)$$

同理可得

$$\mathrm{J}_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z. \quad (9.51)$$

对于一般的 $\mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(z)$, 可以利用递推公式, 得到

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\left(\frac{\sin z}{z}\right). \tag{9.52}$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\left(\frac{\cos z}{z}\right), \tag{9.53}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$.

9.4.3 第二类和第三类贝塞尔函数

当 ν 是整数时,$J_\nu(z)$ 与 $J_{-\nu}(z)$ 是线性相关的. 这样,在以上的讨论中,关于方程(9.35)ν 是整数的情形只找到一个独立解 $J_\nu(z)$. 以下给出另一个线性无关解.

首先,当 ν 不是整数时,取 $J_\nu(z)$ 与 $J_{-\nu}(z)$ 的线性组合

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}, \tag{9.54}$$

显然,$Y_\nu(z)$ 也满足 ν 阶贝塞尔方程(9.35). 可以证明,当 $\nu\to n$ (n 为整数)时 $Y_\nu(z)$ 极限存在,

$$\lim_{\nu\to n} Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right\}_{\nu=n},$$

且是满足 n 阶贝塞尔方程并与 $J_n(z)$ 线性无关的解.

定义 9.4.5 当 ν 不是整数时

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos\nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi},$$

当 $\nu=n$(整数)时

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right\}_{\nu=n}$$

所确定的函数称为**第二类贝塞尔函数**(Bessel function of the second kind),又称**诺依曼函数**(Neumann function).

根据定义 9.4.5,$Y_n(z)$ 可以用以下级数表示

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi}J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n},$$

(9.55)

其中 $\psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$, $n=0,1,2,\cdots,|\arg z|<\pi$.

定义 9.4.6

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iY_\nu(z)$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iY_\nu(z)$$

所确定的函数称为**第三类贝塞尔函数**(Bessel function of the third kind),又称为**汉开尔(Hankel)函数**.

$H_\nu^{(1)}(z)$和$H_\nu^{(2)}(z)$是方程(9.35)的线性无关解.事实上,可以选择$J_\nu(z)$,$Y_\nu(z)$,$H_\nu^{(1)}(z)$,$H_\nu^{(2)}(z)$中任两者作为式(9.35)的基本解.

第二、三类贝塞尔函数满足和第一类贝塞尔函数同样的递推关系(9.36)~(9.39).事实上,若记$Z_\nu(z)$为$J_\nu(z)$,$Y_\nu(z)$,$H_\nu^{(1)}(z)$,$H_\nu^{(2)}(z)$中任一者,有

$$\frac{d}{dz}[z^\nu Z_\nu(z)]=z^\nu Z_{\nu-1}(z), \tag{9.56}$$

$$\frac{d}{dz}[z^{-\nu}Z_\nu(z)]=-z^{-\nu}Z_{\nu+1}(z), \tag{9.57}$$

$$2Z_\nu'(z)=Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z), \tag{9.58}$$

$$2\nu Z_\nu(z)=z[Z_{\nu-1}(z)+Z_{\nu+1}(z)]. \tag{9.59}$$

9.4.4 变型的贝塞尔函数

在一些数学物理问题中要讨论方程

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}-(z^2+\nu^2)w=0. \tag{9.60}$$

该方程和(9.35)只差一个负号.可以用级数解法求解方程(9.60),类似于贝塞尔函数,得到变型的贝塞尔函数(modified Bessel

function).

定义 9.4.7

$$I_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\,{}_0F_1\left(\ ;1+\nu;\frac{z^2}{4}\right)$$

所确定的函数称为**第一类变型的贝塞尔函数**. 当 ν 不是整数时,

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)\right];$$

当 $\nu=n$(整数)时,

$$K_n(z)=\lim_{\nu\to n}K_\nu(z)$$

所确定的函数称为**第二类变型的贝塞尔函数**.

按照定义 9.4.7, $I_\nu(z)$ 可用级数形式给出:

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu},\tag{9.61}$$

也可以从方程(9.60)求级数解,适当选取系数得到这个结果. 对方程(9.60),可以选择 $I_\nu(z)$ 和 $K_\nu(z)$ 为两个线性无关解.

I_ν 和 K_ν 与 $J_\nu, Y_\nu, H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$ 有如下关系:

$$I_\nu(z)=e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}J_\nu\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right),\tag{9.62}$$

$$K_\nu(z)=\frac{\pi i}{2}e^{\frac{\nu\pi i}{2}}H_\nu^{(1)}\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right)=-\frac{\pi i}{2}e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}H_\nu^{(2)}\left(ze^{-\frac{\pi i}{2}}\right),\tag{9.63}$$

$$K_n(z)=\frac{\pi i}{2}e^{\frac{n\pi i}{2}}\left[J_n\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right)+iY_n\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right)\right],\tag{9.64}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$.

9.4.5 几个图形

以下是几个以实变量 x 为自变量的贝塞尔函数的图形.

图 9.1 为 $J_0(x)$, $J_1(x)$ 的图形.

图 9.2 为 $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$ 的图形.

图 9.3 为 $I_0(x)$ 和 $K_0(x)$ 的图形.

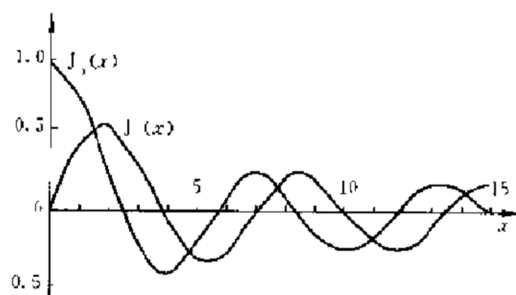


图　9.1

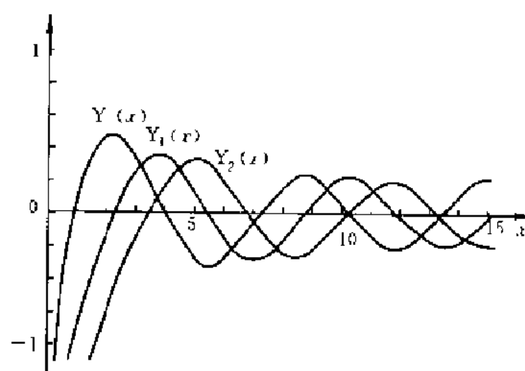


图　9.2

9.4.6　渐近展开式和零点

当$|z|\to\infty$时，贝塞尔函数有如下的渐近表达式：

$$
J_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,2m)}{(2z)^{2m}}-\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}\right],(-\pi<\arg z<\pi) \tag{9.65}
$$

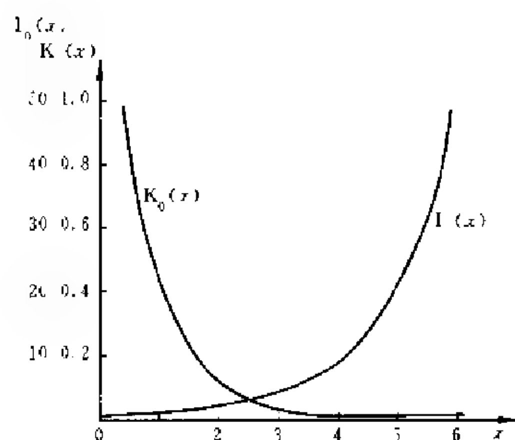


图 9.3

$$
\mathrm{Y}_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Big[\sin\Big(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,2m)}{(2z)^{2m}}
$$

$$
+\cos\Big(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}\Big],(-\pi<\arg z<\pi).
$$

(9.66)

$$
\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{\mathrm{i}\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)_n\left(\frac{1}{2}-\nu\right)_n}{n!(2\mathrm{i}z)^n}\right],
$$

$$
(-\pi<\arg z<2\pi). \qquad (9.67)
$$

$$
\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-\mathrm{i}\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)_n\left(\frac{1}{2}-\nu\right)_n}{n!(2\mathrm{i}z)^n}\right],
$$

$$
(-2\pi<\arg z<\pi). \qquad (9.68)
$$

其中(ν,p)的意义为

$$
(\nu,0)=1,
$$

$$(\nu,p)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+p\right)}{p!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-p\right)}.$$

例如，若自变量取为实变量 x，当 $|x|$ 大时，式(9.65)可进一步近似为

$$J_n(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

它是振幅变小的振荡函数. 当 $n=0,1$ 时，图 9.1 也说明了这个性质. 同时，也可大致看出，$J_n(x)$ 有无穷多个零点，且 $J_n(x)$ 与 $J_{n+1}(x)$ 的零点是相间的.

关于贝塞尔函数的零点，有如下结论.

定理 9.4.8 (1) 设 ν 为任意实数，则 $J_\nu(z)$ 有无穷多个实数零点.

(2) 设 α,β 及 ν 均为实数，则对实自变量 $x(x>0)$ 的函数 $Z_\nu(x)=\alpha J_\nu(x)+\beta Y_\nu(x)$，有无穷多个正数零点. 而且 $Z_\nu(x)$ 及 $Z_{\nu+1}(x)$ 的正数零点是相间的. 对于同一阶的实函数 $Z_\nu(x)$ 及 $\overline{Z}_\nu(x)$，若它们是线性无关的，则它们的正数零点也是相间的.

(3) 若 ν 为实数，则当 $\nu>-1$ 时，$J_\nu(z)$ 的零点都是实数.

9.4.7 傅里叶-贝塞尔展开

函数按傅里叶-贝塞尔级数展开，是广义傅里叶级数的一种，在数学物理中有很重要的应用.

设 ν 为实数，且 $\nu>-1$，从 $J_\nu(z)$ 满足的方程(9.35)，令 $z=\alpha t$ 及 $z=\beta t$，可得

$$\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left[t\frac{dJ_\nu(\alpha t)}{dt}\right]+\left(\alpha^2-\frac{\nu^2}{t^2}\right)J_\nu(\alpha t)=0$$

$$\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left[t\frac{dJ_\nu(\beta t)}{dt}\right]+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{t^2}\right)J_\nu(\beta t)=0$$

以 $tJ_\nu(\beta t)$ 乘上面第一式，减去 $tJ_\nu(\alpha t)$ 乘第二式，取 t 为实变量，从 0 到 x 积分，得

$$(\alpha^2-\beta^2)\int_0^x tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)\mathrm{d}t = \left[tJ_\nu(\alpha t)\frac{\mathrm{d}J_\nu(\beta t)}{\mathrm{d}t} - tJ_\nu(\beta t)\frac{\mathrm{d}J_\nu(\alpha t)}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0}^{t=x}.$$

因为设了 $\nu>-1$，从 $J_\nu(x)$ 的级数表达式(9.34)，可得到上式右方当 $t=0$ 时之值为零. 故若 $\alpha\neq\beta$，有

$$\int_0^x tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)\mathrm{d}t = \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\left[J_\nu(\alpha x)\frac{\mathrm{d}J_\nu(\beta x)}{\mathrm{d}x} - J_\nu(\beta x)\frac{\mathrm{d}J_\nu(\alpha x)}{\mathrm{d}x}\right]. \tag{9.69}$$

若 $\alpha=\beta$，式(9.69)右方为一不定式，可以利用洛必达(L'Hospital)法则求 $\alpha\to\beta$ 时的极限，这样可得到如下的定理.

定理 9.4.9 若 $\nu>-1$，且 α 与 β 满足 $J_\nu(\alpha)=J_\nu(\beta)=0$，则 $\alpha\neq\beta$ 时有

$$\int_0^1 tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)\mathrm{d}t=0,$$

$\alpha=\beta$ 时有

$$\int_0^1 tJ_\nu^2(\beta t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[J_\nu'(\beta)]^2.$$

此定理为贝塞尔函数的正交性定理(orthogonality of Bessel functions)，它说明 $J_\nu(\alpha t)$ 与 $J_\nu(\beta t)$ 在 t 的区间[0,1]上以 t 为权函数正交.

在一定条件下函数 f 在区间[0,1]上可以展开为无穷级数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_\nu(\alpha_kx), \tag{9.70}$$

其中 α_k 为 $J_\nu(x)$ 的正根. 和式是取遍 $J_\nu(x)$ 所有的正根 α_k 求和，类似一般的三角级数展开，为了确定系数 $\{a_k\}$，在式(9.70)两边乘 $xJ_\nu(\alpha_jx)$，再从 0 到 1 积分，利用定理 9.4.9 得

$$a_j = \frac{2}{[\mathrm{J}'_\nu(\alpha_j)]^2}\int_0^1 x f(x)\mathrm{J}_\nu(\alpha_j x)\mathrm{d}x, \quad j = 1,2,\cdots \tag{9.71}$$

定义 9.4.10 若 a_j 如式(9.71)所示，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathrm{J}_\nu(\alpha_k x)$$

称 $f(x)$ 的**傅里叶-贝塞尔级数**.

此级数是基于定理 9.4.9 建立的，还可有其它意义下的正交性定理和对应的傅里叶-贝塞尔级数，关于式(9.70)的收敛性，有如下定理：

定理 9.4.11 设 $f(x)$ 在(0,1)上有定义，$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ 存在(若为奇异积分，则设绝对收敛). 设 $0<a<b<1$，x 是 (a,b) 上任一点，f 在 (a,b) 上是囿变的，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathrm{J}_\nu(\alpha_k x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

其中 a_k 由式(9.71)确定，$\nu+\frac{1}{2}\geqslant 0$，$\alpha_k(k=1,2,\cdots)$ 是 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的所有正数零点.

若 f 在 (a,b) 上连续，则在 $[a+\delta, b-\delta]$ 上，

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathrm{J}_\nu(\alpha_k x) = f(x).$$

且级数是一致收敛的，其中 $\delta>0$.

9.4.8 应用举例

设有半径为 1，高为 h 的圆柱形均匀物体，如图 9.4. 在圆柱的侧面及底面温度保持为零，在顶面保持恒定的温度 u_0. 讨论此物体的定常温度分布.

用 $u(\rho,\varphi,z)$ 表示物体各点的定常温度，其中 (ρ,φ,z) 为柱坐标. 在所讨论的圆柱区域上 $0\leqslant\rho\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant h$，$-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 根据有

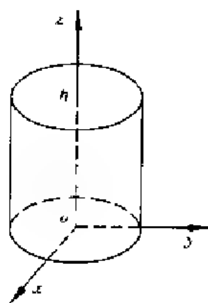


图 9.4

关物理原理，u 满足如下的拉普拉斯方程和边界条件：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

$$0<\rho<1,\quad 0<z<h,\qquad \pi\leqslant\varphi<\pi. \tag{9.72}$$

$$u(1,\varphi,z)=0,\quad 0<z<h,\quad -\pi\leqslant\varphi<\pi. \tag{9.73}$$

$$u(\rho,\varphi,0)=0,\quad u(\rho,\varphi,h)=u_0,\quad 0\leqslant\rho<1,\quad -\pi\leqslant\varphi<\pi. \tag{9.74}$$

式(9.72)～(9.74)组成微分方程的边值问题．从本问题边界条件的对称性，可以设 u 与 φ 无关，即

$$u=u(\rho,z).$$

式(9.72)成为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

用分离变量法求解 u，令 $u=R(\rho)Z(z)$ 代入方程，经过整理，得到

$$\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)}{R}=-\frac{\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}}{Z}$$

此式左边和右边分别是自变量 ρ 和 z 的函数，要使等式成立，两边

均应为常数. 记此待定常数为 $-\lambda$, 得

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \lambda Z = 0, \quad 0 < z < h$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \lambda R = 0, \quad 0 < \rho < 1.$$

不难看出 R 满足的常微分方程正是零阶的贝塞尔方程, 它的一般解是

$$R(\rho) = AJ_0(\sqrt{\lambda}\rho) + BY_0(\sqrt{\lambda}\rho).$$

从问题的物理意义出发, 为保证在 $\rho\to 0$ 时 u 有界, 解不能取 $Y_0(\sqrt{\lambda}\rho)$, 所以令 $B=0$. 又由式(9.73), 可推得 R 满足 $R(1)=0$, 即

$$J_0(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

现设 $J_0(x)$ 的所有正根为 $\alpha_j (j=1,2,\cdots)$, 不妨假设从小到大依次排列, 即可确定 λ 为

$$\lambda_j = \alpha_j^2, \quad j = 1,2,\cdots.$$

再求方程 $\frac{d^2Z}{dz^2} - \lambda_j Z = 0$ 的一般解, 得

$$Z_j(z) = C_j \operatorname{sh}\alpha_j z + D_j \operatorname{ch}\alpha_j z, \quad j = 1,2,\cdots.$$

这样就可求得所有分离变量形式的解为

$$[C_j \operatorname{sh}\alpha_j z + D_j \operatorname{ch}\alpha_j z]J_0(\alpha_j\rho), \quad j = 1,2,\cdots.$$

不难验证, 对于任意的常数 C_j 和 D_j, 它都满足方程(9.72)和边界条件(9.73). 把所有这些分离变量解迭加起来, 得

$$u(\rho,z) = \sum_{j=1}^{\infty}[C_j \operatorname{sh}\alpha_j z + D_j \operatorname{ch}\alpha_j z]J_0(\alpha_j\rho).$$

再考虑式(9.74)中 $z=0$ 时条件, 得到

$$0 = \sum_{j} D_j J_0(\alpha_j\rho),$$

这正是零函数的傅里叶-贝塞尔展开(参见式(9.70)). 根据系数公

式(9.71),得

$$D_j = 0,\quad j = 1,2,\cdots.$$

用式(9.74)的另一边界条件,可得

$$u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \mathrm{sh}\alpha_j h \mathrm{J}_0(\alpha_j \rho).$$

这就是 u_0 的傅里叶-贝塞尔展开.由式(9.71)

$$C_j \mathrm{sh}\alpha_j h = \frac{2}{[\mathrm{J}_1'(\alpha_j)]^2}\int_0^1 \rho u_0 \mathrm{J}_0(\alpha_j \rho)\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{2u_0}{[\mathrm{J}_0'(\alpha_j)]^2\alpha_j^2}\int_0^{\alpha_j} x\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x,$$

用 $\nu=1$ 时的式(9.36)式,即可将上述积分计算出来.并利用式(9.40)可得到

$$C_j = \frac{2u_0}{\mathrm{J}_1(\alpha_j)\alpha_j}\frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_j h}.$$

最后求得

$$u = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2u_0}{\mathrm{J}_1(\alpha_j)\alpha_j}\frac{\mathrm{sh}\alpha_j z}{\mathrm{sh}\alpha_j h}\mathrm{J}_0(\alpha_j \rho).$$

其中 $\alpha_j(j=1,2,\cdots)$ 是 $\mathrm{J}_0(x)=0$ 的所有正根.

从本例可看出,圆柱形区域上求解拉普拉斯方程或有关的问题中,贝塞尔函数是一种有用的工具.有时称贝塞尔函数为**柱函数**.

9.5 正交多项式

9.5.1 正交多项式的基本概念

正交多项式是一类常用的特殊函数,它们是多项式函数,又具有正交性,故应用较方便.

定义 9.5.1 若给定 $\varphi_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式,$n=0,1,2,\cdots$,且 $\varphi_n(x)$ 的 n 次项系数非零,则全体 φ_n 组成的集合 $\{\varphi_n\}$ 称为一个多

项式的简单集(simple set of polynomials).

本节只考虑实变量 x. 显然,若有 $p_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式,则存在常数 $c_0, c_1, \cdots, c_m$,使

$$p_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \varphi_k(x).$$

定义 9.5.2 若在区间 (a,b) 上,存在函数 w,满足 $w(x) > 0$,对于一个多项式的简单集 $\{\varphi_n\}$,

$$\int_a^b w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n,\ m,n = 0,1,2,\cdots,$$

则称 $\{\varphi_n\}$ 是 (a,b) 上对 w 的**正交多项式集**(orthogonal polynomial set). w 称为**权函数**(weight function).

定义 9.5.3 设 (a,b) 上 f,g 为使得以下所出现积分有意义的函数,w 为满足 $w(x) > 0$ 的函数,则

$$(f,g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

称为 f,g 对权函数 w 的**内积**(inner product).

据定义 9.5.2 和定义 9.5.3,若 $\{\varphi_n\}$ 是正交多项式集,则

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0, \quad m \neq n,\ m,n = 0,1,2,\cdots.$$

同时,因为 $w(x) > 0$,所以

$$(\varphi_n, \varphi_n) \neq 0,\ n = 0,1,2,\cdots.$$

若 $\{\varphi_n\}$ 是正交多项式集,则对任意的次数低于 n 次的多项式函数 p 有

$$(\varphi_n, p) = 0,\ n = 0,1,2,\cdots.$$

而且

$$(x^k, \varphi_n) = \int_a^b w(x)x^k\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0,\ k = 0,1,\cdots,n-1.$$

9.5.2 正交多项式的基本性质

一般的 n 次实多项式 $p_n(x)$,最多有 n 个实数零点,而且有的

零点可能是多重的.而关于正交多项式的零点，有如下的特殊性质.

定理 9.5.4 若$\{\varphi_n\}$是(a,b)上对权w的正交多项式集，则每个多项式$\varphi_n(x)$的零点都在开区间(a,b)上，且这些零点都是分离的，共有n个.

关于正交多项式集$\{\varphi_n\}$中函数之间的关系，有下述关于递推关系的定理.

定理 9.5.5 若$\{\varphi_n\}$是(a,b)上对权w的正交多项式集，则存在数列$\{A_n,B_n,C_n\}$，使得对$n\geqslant 1$有

$$x\varphi_n(x)=A_n\varphi_{n+1}(x)+B_n\varphi_n(x)+C_n\varphi_{n-1}(x),$$

其中$A_n\neq 0, B_n\neq 0$.

定理 9.5.6（克里斯托费尔-达布(Christoffel-Darboux)定理） 若$\{\varphi_n\}$为(a,b)上对权w的正交多项式集.设h_n为$\varphi_n(x)$中x^n项的系数，即

$$\varphi_n(x)=h_nx^n+\text{低次项}.$$

且令$g_k=(\varphi_k,\varphi_k)$，则对于$y\neq x$，有

$$\sum_{k=0}^{n}g_k^{-1}\varphi_k(x)\varphi_k(y)=\frac{h_n}{g_nh_{n+1}}\frac{\varphi_{n+1}(y)\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x)\varphi_n(y)}{y-x}.$$

关于函数f按正交多项式集$\{\varphi_k\}$的展开，类似傅里叶级数，若

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x), \tag{9.75}$$

则系数c_k为

$$c_k=(f,\varphi_k)/(\varphi_k,\varphi_k). \tag{9.76}$$

定义 9.5.7 若$\{\varphi_n\}$为(a,b)上对权w的正交多项式集，且满足

$$(\varphi_n,\varphi_n)=1,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

则称$\{\varphi_n\}$为(a,b)上对权w的**标准正交多项式集**(orthonormal polynomial set).

显然,若$\{\varphi_n\}$为一正交多项式集,但非标准,则令

$$\psi_n(x)=[(\varphi_n,\varphi_n)]^{-\frac{1}{2}}\varphi_n(x),$$

$\{\psi_n\}$便是标准正交多项式集.

定理 9.5.8 若$\{\varphi_k\}$是(a,b)上对权w的标准正交多项式集,函数f使$\int_a^b w(x)f^2(x)\mathrm{d}x$存在,$c_k=(f,\varphi_k)$,则

$$\sum_{k=0}^{n}c_k^2\leqslant\int_a^b w(x)f^2(x)\mathrm{d}x$$

且$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2$收敛,

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0$$

以下给出两个正交多项式集的例子,即雅可比多项式和切比雪夫多项式.

9.5.3 雅可比多项式

超几何级数$F(a,b;c;z)$或${}_2F_1\begin{bmatrix}a,b;\\ c;\end{bmatrix}z$,当$a=-n$(负整数)时,级数只有有限项,所以是一个$z$的多项式,以下看到它有一定意义下的正交性质,现只讨论实自变量x的情形.

定义 9.5.9

$$\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\,{}_2F_1\begin{bmatrix}-n,1+\alpha+\beta+n; & \dfrac{1-x}{2}\\ 1+\alpha; & \end{bmatrix}$$

称为**雅可比多项式**(Jacobi polynomials),记作$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$,其中n为非负整数.

由定义 9.5.9 及定义 9.3.1,可以得到

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+\alpha)_n(1+\alpha+\beta)_{n+k}}{k!(n-k)!(1+\alpha)_k(1+\alpha+\beta)_n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k.\tag{9.77}$$

从此可以看出 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$是 x 的 n 次多项式. 利用定理 9.3.7 等, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$可变换为:

$$
\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(1+\alpha)_n}{n!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ -\beta-n; & \dfrac{x-1}{x+1}\\ 1+\alpha; & \end{matrix}\right],\\
P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(1+\alpha+\beta)_{2n}}{n!(1+\alpha+\beta)_n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ -\alpha-n; & \dfrac{2}{1-x}\\ -\alpha-\beta-2n; & \end{matrix}\right],\\
P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(1+\beta)_n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n {}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\ -\alpha-n; & \dfrac{x+1}{x-1}\\ 1+\beta; & \end{matrix}\right].
\end{aligned}
\tag{9.78}
$$

由以上式(9.78)可推出

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x), \tag{9.79}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!}, \tag{9.80}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = \frac{(-1)^n(1+\beta)_n}{n!}.$$

罗德里格斯公式(Rodrigues formula)

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$可表示为

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x-1)^{n+\alpha}(x+1)^{n+\beta}\right] \tag{9.81}$$

关于雅可比多项式的生成函数(见定义 9.4.3),有不同的表示方法,如

$$
\begin{aligned}
&(1-t)^{-1-\alpha-\beta}\,{}_2F\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(1+\alpha+\beta),\ \frac{1}{2}(2+\alpha+\beta); & \dfrac{2t(x-1)}{(1-t)^2}\\ 1+\alpha; & \end{matrix}\right]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+1)_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}.
\end{aligned}
\tag{9.82}
$$

或贝特曼生成函数(Bateman generating function)

$$
{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\,;\\1+\alpha;\end{matrix}\ \frac{t(x-1)}{2}\right]{}_0F_1\left[\begin{matrix}-\,;\\1+\beta;\end{matrix}\ \frac{t(x+1)}{2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n(1+\beta)_n}.
\tag{9.83}
$$

$$
2^{\alpha+\beta}\rho^{-1}(1+t+\rho)^{-\beta}(1-t+\rho)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n,
\tag{9.84}
$$

其中 $\rho=(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}$.

对于给定的 α,β，$\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}$ 有如下的正交性定理.

定理 9.5.10 若 $\mathrm{Re}\alpha>-1$，$\mathrm{Re}\beta>-1$，则

$$
\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\mathrm{d}x=0
$$

对 $m\neq n$ 成立. 若 $m=n$，则有

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\mathrm{d}x\\
&\quad=\frac{2^{1+\alpha+\beta}\Gamma(1+\alpha+n)\Gamma(1+\beta+n)}{n!(1+\alpha+\beta+2n)\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}.
\end{aligned}
$$

从定理 9.5.10 看出，$\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}$ 是 $(-1,1)$ 上以 $(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ 为权的正交多项式集.

$\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}$ 有如下的递推关系：

$$
\begin{aligned}
&(x-1)\left[(\alpha+\beta+n)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+(\alpha+n)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right]\\
&=(\alpha+\beta+n)[nP_n^{(\alpha,\beta)}(x)-(\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)].
\end{aligned}
\tag{9.85}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+\beta+2n)(x^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&=n[\beta-\alpha+(\alpha+\beta+2n)x]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-2(\alpha+n)(\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).
\end{aligned}
\tag{9.86}
$$

$$
\begin{aligned}
&2n(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2n-2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&=(\alpha+\beta+2n-1)[\alpha^2-\beta^2+x(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)]\\
&\quad\times P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)-2(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\alpha+\beta+2n)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x).
\end{aligned}
\tag{9.87}
$$

雅可比多项式是由超几何级数定义的多项式，对于固定的 α，β，得到 $(-1,1)$ 上的正交多项式集. 一般常用的正交多项式集是它的特殊情形，即取定 α 与 β 的情形，例如切比雪夫多项式，勒让德多项式等.

9.5.4 切比雪夫多项式

切比雪夫多项式是雅可比多项式在 $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ 时的特例，但常用的是以下的定义：

定义 9.5.11 对 $n=0,1,2,\cdots$，

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

称为**第一类切比雪夫多项式**.

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}$$

称为**第二类切比雪夫多项式**.

若令 $x=\cos\theta$，$-1\leqslant x\leqslant 1$. 利用三角公式

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$$

$$=\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots,$$

可看到 $T_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式. 同理，$U_n(x)$ 也是 x 的 n 次多项式. 事实上，可以证明

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!x^{n-2k}(x^2-1)^k}{(2k)!(n-2k)!}, \tag{9.88}$$

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(n+1)!x^{n-2k}(x^2-1)^k}{(2k+1)!(n-2k)!}, \tag{9.89}$$

其中 $[n/2]$ 是不超过 $n/2$ 的最大整数.

根据定义 9.5.11 或式(9.88)，可以给出

$$
\left.\begin{aligned}
&T_0(x)=1, && T_1(x)=x,\\
&T_2(x)=2x^2-1, && T_3(x)=4x^3-3x,\\
&T_4(x)=8x^4-8x^2+1, && T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,\\
&T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1, &&\\
&T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x &&
\end{aligned}\right\}
\tag{9.90}
$$

T_1,T_2,T_3,T_4 的图形如图 9.5.

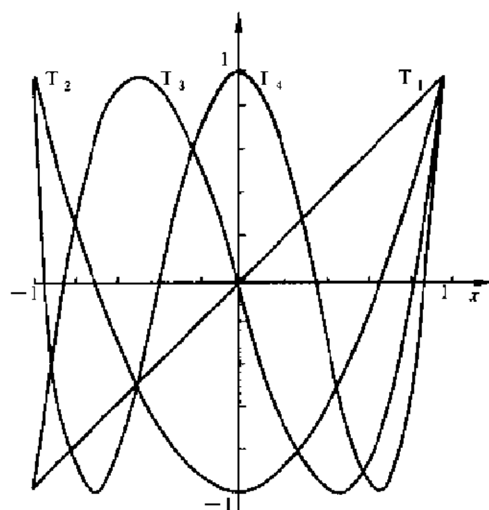


图 9.5

若令 $x=\cos\theta, y=T_n(x)=\cos n\theta$，可知 y 满足微分方程

$$
\frac{d^2y}{d\theta^2}+n^2y=0.
$$

变换回变量 x，则 $y=T_n(x)$ 满足微分方程

$$
(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0. \tag{9.91}
$$

若再作自变量的变换 $z=\frac{1-x}{2}$，则式(9.91)化成

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+\left(\frac{1}{2}-z\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+n^2y=0$$

这就是式(9.24)中 $a=-n,b=n,c=\frac{1}{2}$ 的超几何微分方程，它的一个解是 ${}_2F_1\left(-n,n;\frac{1}{2};z\right)$，另一个线性无关解由式(9.25)给出，即 $z^{\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(-n+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2};\frac{3}{2};z\right)$，它并非多项式，所以必有

$$T_n(x)=d\,{}_2F_1\left(-n,n;\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right).$$

为了确定常数 d，令 $x=1$，即得 $d=T_n(1)=\cos n\theta|_{\theta=0}=1$. 所以有

$$T_n(x)={}_2F_1\left(-n,n;\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right).$$

如果要用雅可比多项式来表示，可以根据定义 9.5.9 写成：

$$T_n(x)=\frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n}P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x). \tag{9.92}$$

所以说切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 是雅可比多项式当 $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ 时的特殊情形.

同理，可以证明 $U_n(x)$ 满足方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n(n+2)y=0, \tag{9.93}$$

以及

$$U_n(x)=\frac{(n+1)!}{\left(\frac{3}{2}\right)_n}P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x). \tag{9.94}$$

即 $U_n(x)$ 是 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ 时的雅可比多项式.

关于 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 的生成函数，同雅可比多项式的一般情

形，有不同的表示方法，例如：

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{T}_n(x)t^n,\tag{9.95}$$

$$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{U}_n(x)t^n,\tag{9.96}$$

$$\mathrm{e}^{xt}\operatorname{ch}\left(t\sqrt{x^2-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{T}_n(x)}{n!}t^n,\tag{9.97}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{xt}\operatorname{sh}\left(t\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{U}_n(x)t^{n+1}}{(n+1)!}.\tag{9.98}$$

由定义 9.5.11，利用三角函数的关系可得：

$$\mathrm{T}_n(x)=\mathrm{U}_n(x)-x\mathrm{U}_{n-1}(x),\tag{9.99}$$

$$\mathrm{T}_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right],\tag{9.100}$$

$$(1-x^2)\mathrm{U}_n(x)=x\mathrm{T}_{n+1}(x)-\mathrm{T}_{n+2}(x).\tag{9.101}$$

关于 $\mathrm{T}_n(x)$ 的其它重要性质，列举如下：

正交性

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{T}_n(x)\mathrm{T}_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ \frac{\pi}{2}, & n=m>0,\\ \pi, & n=m=0.\end{cases}$$

这是定理 9.5.10 的特殊情形，说明 $\{\mathrm{T}_n\}$ 是 $(-1,1)$ 上以 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 为权的正交多项式集. 同理可得 $\{\mathrm{U}_n\}$ 是 $(-1,1)$ 上以 $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 为权的正交多项式集.

微分公式

$$\mathrm{T}_n(x)=(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}(1-x^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.\tag{9.102}$$

递推关系

$$T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0, \tag{9.103}$$

切比雪夫多项式在函数逼近问题中有很重要的应用，关于这方面的一个性质是：

定理 9.5.12 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上，所有最高方次项系数为 1 的 n 次多项式 $P_n(x)$ 中，以 $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ 与零的最大误差为最小，即

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right|\leqslant\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P_n(x)|$$

对一切 x^n 项系数为 1 的实系数多项式 $P_n(x)$ 成立.

关于切比雪夫多项式的应用，见以下的例子.

例 9.5.13 节约幂级数的项数 我们知道可以用泰勒公式近似计算一个充分光滑函数的函值，这种方法有很多优点，如容易计算等. 但是也有一些缺点，如误差分布不均匀，只在泰勒展开点 x_0 附近较适用. 若要较大范围适用，便要增加泰勒展开式的项数，即增加逼近多项式的次数. 这是比较麻烦的. 我们可以利用切比雪夫多项式来节约幂级数的项数. 例如，在[-1,1]上考虑 $f(x)=e^x$ 的近似. 若取三次泰勒多项式，有

$$f(x)\approx p_3(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3,$$

逼近的误差可以估计为

$$|f(x)-p_3(x)|=|R_3(x)|=\left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4\right|\leqslant\frac{e}{4!}\approx 0.113$$

$$(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

如果先取 $f(x)$ 的四次泰勒多项式，则有

$$f(x)\approx p_4(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4,$$

误差估计为

$$|R_4(x)|=\left|\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5\right|\leqslant\frac{e}{5!}\approx 0.0227\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

但若利用式(9.90)，将 $x^4=\frac{1}{8}(3T_0(x)+4T_2(x)+T_4(x))$ 代入 $p_4(x)$，得到

$$p_4(x)=\frac{191}{192}+x+\frac{13}{24}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{192}T_4(x),$$

而 $\left|\frac{1}{192}T_4(x)\right|\leqslant\frac{1}{192}\approx 0.0052$，将此项略去，得到

$$f(x)\approx\tilde{p}_3(x)=\frac{191}{192}+x+\frac{13}{24}x^2+\frac{1}{6}x^3.$$

它的误差限可估计为 0.0227＋0.0052≈0.0279. 这个误差限比 $R_3(x)$ 的误差限小得多，近于 $R_4(x)$ 的误差限，而只要计算三次多项式.

如果 $\tilde{p}_3(x)$ 中的 x^3 项再用切比雪夫多项式表示，即 $x^3=\frac{3}{4}T_1(x)+\frac{1}{4}T_3(x)$，得到

$$\tilde{p}_3(x)=\frac{191}{192}+\frac{9}{8}x+\frac{13}{24}x^2+\frac{1}{24}T_3(x),$$

而 $\left|\frac{1}{24}T_3(x)\right|\leqslant\frac{1}{24}\approx 0.0417$，将此项略去，得到

$$f(x)\approx\tilde{p}_2(x)=\frac{191}{192}+\frac{9}{8}x+\frac{13}{24}x^2,$$

它的误差限可估计为 0.0279＋0.0417≈0.07. 这个近似式是二次多项式，而在 $[-1,1]$ 上的最大误差比用三次泰勒多项式的误差还要小.

例 9.5.14 插值余项的极小化 在 $[-1,1]$ 上，若有 n 个插值点 $-1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n\leqslant 1$，则若 $f\in C^n[-1,1]$，有

$$f(x)=L_{n-1}(x)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega_n(x),\quad -1<\xi<1.$$

其中 $\omega_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，$L_{n-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的 $n-1$ 次拉格朗日插值多项式. 它满足 $L_{n-1}(x_i)=f(x_i)$，$i=1,\cdots,n$. 如果

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f^{(n)}(\xi)| = M_n,$$

则插值误差可估计为

$$R_n = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - L_{n-1}(x)| \leqslant \frac{M_n}{n!} \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\omega_n(x)|.$$

式中 R_n 的大小取决于 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\omega_n(x)|$. 所以如果适当地选择 x_1, $x_2,\cdots,x_n$, 可使 R_n 尽量小. 而 $\omega_n(x)$ 是首项系数为 1 的 n 次多项式, 根据定理 9.5.12, 取 $x_1,\cdots,x_n$ 为切比雪夫多项式的零点, 即 $x_k = \cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi$, $(k=1,\cdots,n)$. 这样可使 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\omega_n(x)|$ 最小, 且有估计

$$R \leqslant \frac{M_n}{n!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}.$$

这种选取插值点的方法, 称为使插值余项极小化的方法, 是切比雪夫多项式在近似计算方面的一种应用.

9.6 勒让德多项式及有关的函数

9.6.1 勒让德多项式的定义

雅可比多项式最简单的情形是 $\alpha=\beta=0$. 由定义 9.5.9, 得到

定义 9.6.1 对 $n=0,1,2,\cdots$,

$$P_n^{(0,0)}(x) = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right)$$

称为勒让德多项式 (Legendre polynomial), 记作 $P_n(x)$.

有时定义 9.6.1 不易应用. 而令超几何函数满足的微分方程 (9.24) 中的 $w = P_n(x)$, $z = \dfrac{1-x}{2}$, 则 w 满足

$$z(1-z)\frac{d^2 w}{dz^2} + (1-2z)\frac{dw}{dz} + n(n+1)w = 0.$$

再化回自变量 x, 则 $w = P_n(x)$ 满足以下的**勒让德方程**

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}+n(n+1)w=0, \quad (9.104)$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$. 也可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right]-n(n+1)w=0.$$

若从方程(9.104)出发,求它的级数解.将 $w=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 代入方程,得到系数之间的递推关系

$$a_{k+2}=-\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k.$$

所以若取 a_0 任意,$a_1=0$ 或 $a_0=0$,a_1 任意,得到式(9.104)的两个线性无关解:

$$w_1=a_0\left\{1-\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4-\cdots\right\}$$

$$=a_0\mathrm{F}\left(-\frac{n}{2},\frac{n+1}{2};\frac{1}{2};x^2\right)$$

$$w_2=a_1\left\{x-\frac{(n-1)(n+2)}{2\cdot 3}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5-\cdots\right\}$$

$$=a_1x\mathrm{F}\left(\frac{1-n}{2},\frac{2+n}{2};\frac{3}{2};x^2\right).$$

可见,若 n 为偶数时,w_1 是一个 n 次多项式,而 w_2 是无穷级数.若 n 为奇数时,w_1 是无穷级数而 w_2 是多项式,因此只要适当选取 a_0 或 a_1,就可得到式(9.104)的多项式解.它与定义 9.6.1 的 $\mathrm{P}_n(x)$ 差别在乘一常数.

定理 9.6.2 若规定 $w(1)=1$,则式(9.104)的多项式解就是 $w=\mathrm{P}_n(x)$.

也可以将定理 9.6.2 作为勒让德多项式的定义,它与定义 9.6.1等价.

由定义9.6.1或定理9.6.2,可得到

$$
\left.
\begin{aligned}
&P_0(x)=1,\\
&P_1(x)=x,\\
&P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\\
&P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\\
&P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),\\
&P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),\\
&P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5),\\
&P_7(x)=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x).
\end{aligned}
\right\}
\tag{9.105}
$$

P_0,P_1,P_2,P_3,P_4 的图形如图 9.6 所示.

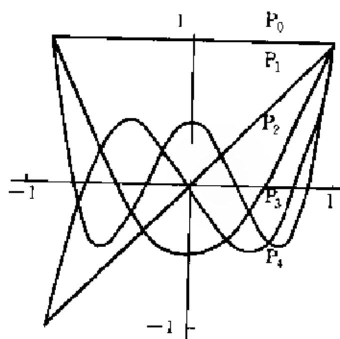


图 9.6

9.6.2 勒让德多项式的基本性质

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)_{n-k} (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}, \tag{9.106}$$

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \pi_{n-2}(x), \tag{9.107}$$

其中 $\pi_{n-2}(x)$ 为一个 x 的 $n-2$ 次多项式.

$$\mathrm{P}_n(-x) = (-1)^n \mathrm{P}_n(x). \tag{9.108}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{P}_n(1) = 1, \mathrm{P}_n(-1) = (-1)^n, \\ &\mathrm{P}_{2n+1}(0) = 0, \mathrm{P}_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \end{aligned}\right\} \tag{9.109}$$

罗德里格斯公式

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]. \tag{9.110}$$

递推关系

$$\left.\begin{aligned} &x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_n(x) = n\mathrm{P}_n(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1, \\ &(2n+1)\mathrm{P}_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_{n+1}(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1, \\ &(x^2-1)\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{d}x} = nx\mathrm{P}_n(x) - n\mathrm{P}_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1, \\ &n\mathrm{P}_n(x) = (2n-1)x\mathrm{P}_{n-1}(x) - (n-1)\mathrm{P}_{n-2}(x), \quad n \geqslant 2. \end{aligned}\right\} \tag{9.111}$$

生成函数

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x)t^n, & \text{当 } |t| < 1, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x)\dfrac{1}{t^{n+1}}, & \text{当 } |t| > 1. \end{cases} \tag{9.112}$$

$\{\mathrm{P}_n\}$还可以有其它形成的生成函数,如

$$e^{xt}{}_0F_1\left(-;1;\frac{1}{4}t^2(x^2-1)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)t^n}{n!}, \qquad (9.113)$$

或

$$e^{xt}J_0\left(t\sqrt{1-x^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)t^n}{n!}.$$

拉普拉斯第一积分(Laplace first integral)

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n d\varphi. \qquad (9.114)$$

拉普拉斯第二积分(Laplace second integral)

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\left[x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^{n+1}}. \qquad (9.115)$$

因为勒让德多项式是 $\alpha=\beta=0$ 时的雅可比多项式，根据定理 9.5.10，有

正交性

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0 & (n\neq m),\\ \dfrac{2}{2n+1} & (n=m).\end{cases}$$

所以$\{P_n\}$是$(-1,1)$上对权 $w=1$ 的正交多项式集.

关于函数 f 在$(-1,1)$上按正交多项式集$\{P_n\}$的展开，即傅里叶-勒让德展开，根据式(9.75)与(9.76)，若

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kP_k(x), \qquad (9.116)$$

则

$$c_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx. \qquad (9.117)$$

定理 9.6.3 (1) 若 f 在$[-1,1]$上连续，则 $\sum_{k=0}^{\infty}c_kP_k(x)$ 平均收敛于 $f(x)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n}c_kP_k(x)\right]^2dx=0,$$

其中 c_k 如式(9.117)所示. 而且

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2.$$

(2) 若 $(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可积, 并且设 $x \in (a,b)$, $-1<a<b<1$, f 在 (a,b) 上是囿变的, 则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \mathrm{P}_k(x)$ 在 x 点收敛, 且

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathrm{P}_k(x) = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

其中 c_k 如式(9.117)所示.

若 f 在它的囿变区间内部任一区间 I 上是连续的, 则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \mathrm{P}_k(x)$ 在 I 一致收敛, 其和为 $f(x)$.

9.6.3 第二类勒让德函数

勒让德方程(9.104)可以看成由超几何微分方程(9.24)的特殊情形变换而得到的. 它的一个基本解可以取为多项式 $\mathrm{P}_n(x)$, 另一个线性无关解可由式(9.25)导出. 可取为

$$\mathrm{Q}_n(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{-n-1} \mathrm{F}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}; n+\frac{3}{2}; x^{-2}\right) \tag{9.118}$$

从超几何函数的定义, 可看出 $\mathrm{Q}_n(x)$ 不是 x 的多项式.

定义 9.6.4 由式(9.118)确定的, 方程(9.104)与 $\mathrm{P}_n(x)$ 线性无关的解 $\mathrm{Q}_n(x)$, 称**第二类勒让德函数**(Legendre function of second kind).

一些 $\mathrm{Q}_n(x)$ 的表达式如下:

$$
\left.\begin{aligned}
Q_0(x) &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\\
Q_1(x) &= \frac{x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}-1,\\
Q_2(x) &= \frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{2}x,\\
Q_3(x) &= \frac{1}{4}(5x^3-3x)\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}.
\end{aligned}\right\}\tag{9.119}
$$

9.6.4 伴随勒让德函数

9.1 中举出的数学物理问题的例子,要求解该问题,关键在方程(9.8). 不难看出,若式(9.8)中 $\lambda=n(n+1)$, $m=0$, 它就是勒让德方程(9.104). 现在讨论 m 可以不为零的情形,即**伴随勒让德方程**(adjoint Legendre equation).

$$
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0,\tag{9.120}
$$

其中 $-1<x<1$, $m=0,1,2,\cdots$, $n=0,1,2,\cdots$.

关于式(9.120)的解,可以从方程(9.8)的解 $P_n(x)$ 出发,直接验证 $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x)$ 满足式(9.120),其中 $n=m,m+1,\cdots$, $m=0,1,2,\cdots$. 另一线性无关解也容易导出. 故引入如下定义:

定义 9.6.5

$$
P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x),
$$

$$
Q_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}Q_n(x)
$$

分别称为**第一类和第二类伴随勒让德函数**(adjoint Legendre function).

由定义 9.6.6 可知,$P_n^m(x)$不一定是多项式. 可以证明,$P_n^m(x)$

有如下性质.

$$\mathrm{P}_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}(x^2-1)^n. \tag{9.121}$$

正交性

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & (n \neq l),\\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & (n=l).\end{cases}\\
&\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^m(x)\mathrm{P}_n^k(x)\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \begin{cases}0, & (m \neq k),\\ \dfrac{1}{m}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & (m=k).\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{9.122}$$

递推关系

$$\left.\begin{aligned}
&(2n+1)x\mathrm{P}_n^m(x) = (n+m)\mathrm{P}_{n-1}^m(x) + (n-m+1)\mathrm{P}_{n+1}^m,\\
&(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}_n^m(x) = \mathrm{P}_{n+1}^{m+1}(x) - \mathrm{P}_{n-1}^{m+1}(x),\\
&(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}_n^m(x) = (n+m)(n+m-1)\mathrm{P}_{n-1}^{m-1}(x)\\
&\qquad -(n-m+2)(n-m+1)\mathrm{P}_{n+1}^{m-1}(x),\\
&(2n+1)(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_n^m(x) = n(n-m+1)\mathrm{P}_{n+1}^m(x)\\
&\qquad -(n+1)(n+m)\mathrm{P}_{n-1}^m(x).
\end{aligned}\right\} \tag{9.123}$$

类似于定理 9.6.3,若 f 在$[-1,1]$上连续,则可在平均收敛意义下展开为

$$f(x) = \sum_{n \geq m} a_n \mathrm{P}_n^m(x).$$

其中

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{P}_n^m(x)\mathrm{d}x.$$

这里,m 是固定的整数.

方程(9.105)和(9.121)中 n,m 均为整数,对于更普遍的情

形，可以考虑方程

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}-2z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]u=0, \tag{9.124}$$

其中 μ,ν 为任意复数，z 为复自变量. 可以证明，式(9.124)的一个解可取为

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right), \tag{9.125}$$

当 $\mu=0$，以 $P_\nu(z)$ 记 $P_\nu^0(z)$，有

$$P_\nu(z)=F\left(-\nu,\nu+1;1;\frac{1-z}{2}\right),$$

当 $\mu=m(m=1,2,\cdots)$时，式(9.125)是不定式，可以变换为

$$P_\nu^m(z)=(z^2-1)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}P_\nu(z). \tag{9.126}$$

所以当 μ,ν 为整数时，式(9.125)与定义 9.6.5 是相符合的.

式(9.124)当取 $\mu=m(m=0,1,2,\cdots)$时，若 $\nu\neq n(n=0,1,2,\cdots)$，可以证明，若自变量取为实的 x，则式(9.124)不会有在$(-1,1)$上非零的有界解. 若 $\nu=n$，则其解 $P_n^m(x)$在$(-1,1)$上是有界的.

9.6.5 球面函数

在 9.1 的例子中，球域上的拉普拉斯方程经过一次分离变量，得到 $Y(\theta,\varphi)$满足的方程(9.4)，它的解定义为：

定义 9.6.6 在 $0<\theta<\pi$，$-\pi<\varphi<\pi$ 满足方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0$$

及条件

$$|Y(0,\varphi)|<\infty,\ |Y(\pi,\varphi)|<\infty,$$

$$Y(\theta,\varphi+2\pi)=Y(\theta,\varphi)$$

的函数 Y，称为**球面函数**(spherical function)。

从定义 9.6.6 知，球面函数就是满足式(9.4)的有界周期解。将式(9.4)再一次分离变量，得常微分方程(9.5)和(9.6)。(9.5)的周期解是 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$，$m=0,1,2,\cdots$。将式(9.6)作变换，$t=\cos\theta$后，化为式(9.8)，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}\right]+\left[\lambda-\frac{m^2}{1-t^2}\right]\Theta=0,\qquad -1<t<1$$

令 $\lambda=\nu(\nu+1)$，这就是式(9.124)，要得到此方程的有界解，须 $\nu=n$，即 $\lambda=n(n+1)$，$n=0,1,2,\cdots$，所以得到

$$\Theta(\theta)=P_n^m(\cos\theta),\quad n=m,m+1,\cdots.$$

所以，基本的球面函数可取为 $P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ 和 $P_n^m(\cos\theta)\sin\varphi$，其中 $n=0,1,2,\cdots,m=0,1,\cdots,n$。记

$$\left.\begin{aligned}&Y_n^0=P_n(\cos\theta)\\&Y_n^{-k}(\theta,\varphi)=P_n^k(\cos\theta)\cos k\varphi,\ k=1,2,\cdots,n,\\&Y_n^k(\theta,\varphi)=P_n^k(\cos\theta)\sin k\varphi,\quad k=1,2,\cdots,n,\end{aligned}\right\}\tag{9.127}$$

则一般的球面函数可以表示为

$$Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=-n}^{n}c_{nm}Y_n^m(\theta,\varphi).\tag{9.128}$$

由伴随勒让德函数及三角函数的正交性，可以得到球面函数的正交关系：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}Y_n^m(\theta,\varphi)Y_l^k(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0\tag{9.129}$$

其中 $n\neq l$，或 $n=l$ 而 $m\neq k$。

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}[Y_n^m(\theta,\varphi)]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi\varepsilon_m}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\tag{9.130}$$

其中 $\varepsilon_0=2$，$m>0$ 时 $\varepsilon_m=1$。

任一在球面上连续的函数 f，可以展开为 $\{Y_n^k\}$ 的平均收敛的

级数，即

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}c_{nm}\mathrm{Y}_n^m(\theta,\varphi) \tag{9.131}$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$，而

$$c_{nm}=\frac{1}{N_{nm}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\mathrm{Y}_n^m(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \tag{9.132}$$

其中 $N_{nm}=\dfrac{2\pi\varepsilon_m}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}$，$\varepsilon_m$ 同(9.130)。

9.6.6 应用举例

这里讨论 9.1 中提出的边值问题(9.1)及(9.2)，即

$$\Delta u=0,\ 0\leqslant r<r_0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad -\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi,$$

$$u(r_0,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi).$$

若求分离变量形式的解 $u=R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$，则 Y 满足方程(9.4)，它的周期有界解就是球面函数 $\mathrm{Y}_n(\theta,\varphi)$，且 $\lambda=n(n+1)$，$n=0,1,2,\cdots$. R 满足方程(9.3)，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-n(n+1)R=0.$$

这是一个欧拉微分方程，可求出两个线性无关解 r^n 及 $r^{-(n+1)}$，考虑 $r\to0$ 时的有界性，舍去后者，得到分离变量解为 $r^n\mathrm{Y}_n(\theta,\varphi)$，其中 $\mathrm{Y}_n(\theta,\varphi)$ 为 $\mathrm{Y}_n^m(\theta,\varphi)$ 的线性组合，即式(9.128)，$n=0,1,2,\cdots$. 所有这些分离变量解都满足方程 $\Delta u=0$. 为了满足边界条件，把所有这些分离变量解迭加起来，令

$$\begin{aligned}u&=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\mathrm{Y}_n(\theta,\varphi)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_{nm}r^n\mathrm{Y}_n^m(\theta,\varphi).\end{aligned}$$

再以 $r=r_0$ 代入，得

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_{nm}r_0^n Y_n^m(\theta,\varphi)$$

即可根据式(9.131)和(9.132)定出

$$a_{nm}=\frac{1}{r_0^n}c_{nm},$$

最后得到

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}c_{nm}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n Y_n^m(\theta,\varphi),$$

其中 c_{nm} 如式(9.132)所示.

9.7 埃尔米特多项式

本节讨论一类在$(-\infty,\infty)$上以$\exp(-x^2)$为权的正交多项式集.

定义 9.7.1 对于 $n=0,1,2,\cdots$,

$$H_n(x)=(2x)^n {}_2F_0\left(-\frac{n}{2},-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};-;-\frac{1}{x^2}\right)$$

称为**埃尔米特多项式**(Hermite polynomial).

定义 9.7.1 是利用广义超几何函数来定义 $H_n(x)$的,从${}_2F_0$的定义 9.3.12 可以看出,不论 n 是偶数还是奇数,级数表达式将中断为有限项,即

$$\begin{aligned}H_n(x)&=(2x)^n\sum_{k=0}\frac{\left(-\frac{n}{2}\right)_k\left(-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)_k}{k!}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k\\&=(2x)^n\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(-n)_{2k}}{k!2^{2k}}x^{-2k}.\end{aligned}$$

故得 $H_n(x)$的多项式表达式为

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k n!(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}.\tag{9.133}$$

从式(9.133)可看出$H_n(x)$的确是x的n次多项式，它包含$x^n, x^{n-2}, \cdots$各项，而首项系数为2^n，即

$$H_n(x) = 2^n x^n + \pi_{n-2}(x), \tag{9.134}$$

其中$\pi_{n-2}(x)$为x的一个$n-2$次多项式. 以下是开头的几个$H_n(x)$.

$$\left.\begin{aligned}
&H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,\\
&H_3(x) = 8x^3 - 12x,\ H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,\\
&H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x,\\
&H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120,\\
&H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x.
\end{aligned}\right\} \tag{9.135}$$

e_0, e_1, e_2, e_3, e_4的图形如图 9.7，其中

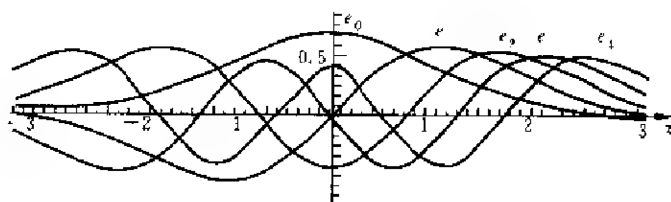


图 9.7

$$e_n(x) = \frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

从式(9.133)可直接得到如下性质：

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x), \tag{9.136}$$

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)_n;\ H_{2n+1}(0) = 0. \tag{9.137}$$

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n 2^{2n+1} \left(\frac{3}{2}\right)_n;\ H'_{2n}(0) = 0. \tag{9.138}$$

埃尔米特多项式的生成函数可取为:**生成函数**

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}. \tag{9.139}$$

本式可以通过指数函数的级数表达式及式(9.133)来验证.此外,还有

$$\exp(2xt - t^2)H_k(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+k}(x)t^n}{n!}. \tag{9.140}$$

$$(1 - 4t^2)^{-1/2}\exp\left[y^2 - \frac{(y - 2xt)^2}{1 - 4t^2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{n!}t^n. \tag{9.141}$$

从式(9.139),利用马克劳林(Maclaurin)定理,得到

$$H_n(x) = \left[\frac{d^n}{dt^n}\exp(2xt - t^2)\right]_{t=0}.$$

经过化简,得到**罗德里格斯公式**:

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n}[\exp(-x^2)] \tag{9.142}$$

从式(9.139)还可推导如下性质:

递推公式

$$\left.\begin{aligned}
&2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x) \quad (n \geqslant 1),\\
&2xH_0(x) = H_1(x),\\
&H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x),\\
&H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x).
\end{aligned}\right\} \tag{9.143}$$

积分表达式

$$H_n(x) = \frac{n!}{\pi}\int_0^{\pi}\exp(2x\cos\theta - \cos 2\theta)\cos(2x\sin\theta - \sin 2\theta - n\theta)d\theta. \tag{9.144}$$

由式(9.144),可推得 $H_n(x)$ 满足**埃尔米特微分方程**

$$\frac{d^2}{dx^2}H_n(x) - 2x\frac{d}{dx}H_n(x) + 2nH_n(x) = 0. \tag{9.145}$$

关于$\{H_n\}$的正交性质,可由式(9.145)推出.

定理 9.7.2(正交性)　对 H_n 与 H_m,有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases}$$

定理 9.7.2 说明$\{\mathrm{H}_n\}$是在$(-\infty,\infty)$上以$\exp(-x^2)$为权的正交多项式集.所以具有 9.5 所讨论的正交多项式集的性质.

定理 9.7.3　对于埃尔米特多项式 $\mathrm{H}_n(x)$,有

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)x^k\mathrm{H}_n(x)\mathrm{d}x = 0$, $k = 0,1,2,\cdots,(n-1)$;

(2) $\mathrm{H}_n(x)$的零点是实的,且是分离的;

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{H}_k(x)\mathrm{H}_k(y)}{2^k k!} = \frac{\mathrm{H}_{n+1}(y)\mathrm{H}_n(x) - \mathrm{H}_{n+1}(x)\mathrm{H}_n(y)}{2^{n+1} n!(y-x)}$;

(4) 若$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)f^2(x)\mathrm{d}x$ 存在,则

$$\lim_{n\to\infty}(2^n n!)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)f(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

9.8　拉盖尔多项式

本节讨论一类在$(0,\infty)$上正交的多项式集.

9.8.1　广义拉盖尔多项式

定义 9.8.1　对于 $n=0,1,2,\cdots$,

$$\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!}\,{}_1\mathrm{F}_1(-n;1+\alpha;x)$$

称为**广义拉盖尔多项式**(generalized Laguerre polynomial).

定义 9.8.1 是通过合流超几何函数${}_1\mathrm{F}_1$来定义的,前面的因子是为了方便而引入的.从定义 9.8.1 可得到

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (1+\alpha)_n x^k}{k!(n-k)!(1+\alpha)_k}. \tag{9.146}$$

可见 $L_n^{(\alpha)}(x)$ 的确是 x 的 n 次多项式，其最高项系数是 $(-1)^n/n!$。

开头几个 $L_n^{(\alpha)}(x)$ 的表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}
L_0^{(\alpha)} &= 1,\\
L_1^{(\alpha)}(x) &= 1+\alpha-x,\\
L_2^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha)-(2+\alpha)x+\frac{1}{2}x^2,\\
L_3^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{6}(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)-\frac{1}{2}(2+\alpha)(3+\alpha)x\\
&\quad +\frac{1}{2}(3+\alpha)x^2-\frac{1}{6}x^3.
\end{aligned}\right\} \tag{9.147}$$

由式(9.146)可以推导出 $\{L_n^{(\alpha)}\}$ 可由下列函数生成：

$$e^t\,{}_0F_1(;1+\alpha;-xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}. \tag{9.148}$$

而 ${}_0F_1$ 又可以表示为贝塞尔函数（见定义 9.4.1），所以又可写为

$$(xt)^{-\alpha/2}\Gamma(1+\alpha)e^t J_\alpha(2\sqrt{xt}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}. \tag{9.149}$$

还可以推导其它的生成函数，例如，设 c 任意，则

$$\frac{1}{(1-t)^c}\,{}_1F_1\left(c;1+\alpha;\frac{-xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}. \tag{9.150}$$

特别是 $c=1+\alpha$ 时，有

$$\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}}\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n. \tag{9.151}$$

由式(9.148)及(9.151)对 x 或 t 求导，可推得

递推关系

$$
\left.
\begin{aligned}
& nL_n^{(\alpha)}(x) = (2n-1+\alpha-x)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n-1+\alpha)L_{n-2}^{(\alpha)}(x), \\
& x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^{(\alpha)}(x) = nL_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha+n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^{(\alpha)}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1}L_k^{(\alpha)}(x).
\end{aligned}
\right\}
\tag{9.152}
$$

式(9.152)是相邻不同次的广义拉尔盖函数之间的递推关系.由定义9.8.1及${}_1F_1$的邻接函数关系(如式(9.30)~(9.32)),可以得到α和n的混合递推关系:

$$
\left.
\begin{aligned}
& L_n^{(\alpha)}(x) = L_{n-1}^{(\alpha)}(x) + L_n^{(\alpha-1)}(x), \\
& (n-x)L_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha+n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = -xL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \\
& (1+\alpha+n)L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + xL_n^{(\alpha+1)}(x), \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \\
& L_n^{(\alpha+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n}L_k^{(\alpha)}(x).
\end{aligned}
\right\}
\tag{9.153}
$$

利用生成函数的表示式,还可以得到如下的有限和公式:

$$
\left.
\begin{aligned}
& L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha-\beta)_k L_{n-k}^{(\beta)}(x)}{k!}, \\
& L_n^{(\alpha+\beta+1)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}L_k^{(\alpha)}(x)L_{n-k}^{(\beta)}(y), \\
& L_n^{(\alpha)}(xy) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(1+\alpha)_n(1-y)^{n-k}y^k L_k^{(\alpha)}(x)}{(n-k)!(1+\alpha)_k}, \\
& L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n}{(c)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+\alpha-c)_k L_k^{(\alpha)}(-x)L_{n-k}^{(c-1)}(x)}{(1+\alpha)_k}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{9.154}
$$

与勒让德多项式及埃尔米特多项式类似，广义拉盖尔多项式也可用微分公式表示．只要利用式(9.146)及求导公式，就得到**罗德里格斯公式**

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^{x}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^{n+\alpha}]. \tag{9.155}$$

关于$L_n^{(\alpha)}(x)$满足的微分方程，可以由合流超几何函数F_1满足的方程(9.28)导出，也可以由式(9.152)中含微分的递推关系导出．得到$L_n^{(\alpha)}(x)$满足方程

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_n^{(\alpha)}(x) + (1+\alpha-x)\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) + nL_n^{(\alpha)}(x) = 0, \tag{9.156}$$

也可写成

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x)\right] + nx^{\alpha}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x) = 0. \tag{9.157}$$

类似可以写出$L_m^{(\alpha)}(x)$满足的方程，此方程乘以$L_n^{(\alpha)}(x)$，减去式(9.157)乘以$L_m^{(\alpha)}(x)$，再积分，得到

$$(m-n)\int_a^b x^{\alpha}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx$$

$$=\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\left\{L_m^{(\alpha)}(x)\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)\frac{d}{dx}L_m^{(\alpha)}(x)\right\}\right]_a^b.$$

若取(a,b)为$(0,\infty)$，不难看出当$\mathrm{Re}\alpha>-1$时，$x^{\alpha+1}e^{-x}$当$x\to0$和$x\to\infty$都趋于零．所以若$m\neq n$时，上式可得到$\{L_n^{(\alpha)}\}$的正交性质．当$m=n$时，利用式(9.155)计算积分，最后得到：

定理 9.8.2(正交性)　对于$L_m^{(\alpha)}$与$L_n^{(\alpha)}$，若$\mathrm{Re}\alpha>-1$，有

$$\int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)dx = \begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{\Gamma(1+\alpha+n)}{n!}, & m=n.\end{cases}$$

定理 9.8.2 说明$\{L_n^{(\alpha)}\}$是在$(0,\infty)$上以$x^{\alpha}e^{-x}$为权的正交多项式集，所以具有 9.5 中所讨论的正交多项式集的性质．

定理 9.8.3 若 $\mathrm{Re}\alpha > -1$，则

(1) $\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) x^k \mathrm{d}x = 0,\ k = 0,1,2,\cdots,n-1$；

(2) $L_n^{(\alpha)}(x)$ 的零点是正的，且是分离的；

(3) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{k!L_k^{(\alpha)}(x)L_k^{(\alpha)}(y)}{(1+\alpha)_k} = \frac{(n+1)!}{(1+\alpha)_n} \frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(y)L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y)}{x-y};$$

(4) 若 $\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f^2(x) \mathrm{d}x$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\right]^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x) L_n^{(\alpha)}(x) \mathrm{d}x = 0.$$

9.8.2 拉盖尔多项式

定义 9.8.4 对于 $n=0,1,2,\cdots,\alpha=0$ 时的广义拉盖尔多项式称为拉盖尔多项式(Laguerre po.ynomial)，记作 $L_n(x)$.

由定义 9.8.4 及定义 9.8.1，及式(9.146)，可得到

$$L_n(x) = {}_1F_1(-n;1;x),$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n! x^k}{(k!)^2 (n-k)!},$$

开头的几个拉盖尔多项式如下：

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = 1 - x,$$

$$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2,$$

$$L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3,$$

$$L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 的图形如图 9.8，其中

$$e_n(x) = e^{-x/2}L_n(x)$$

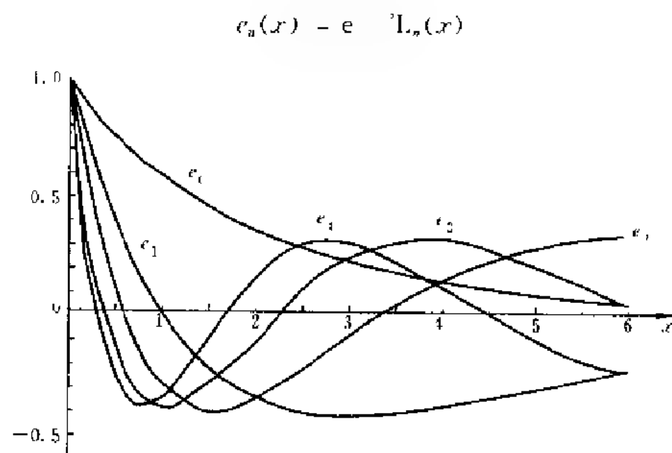


图 9.8

因为$L_n(x)$是$L_n^{(\alpha)}(x)$的特殊情况，所以关于$L_n^{(\alpha)}(x)$的性质均适合$L_n(x)$. 如

(1) $e^t\,{}_0F_1(-;1;-xt) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)t^n}{n!}$,

(2) $(1-t)^{-c}\,{}_1F_1\left(c;1;\frac{-xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n L_n(x)t^n}{n!}$,

(3) $(1-t)^{-1}\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n$,

(4) $x\frac{d}{dx}L_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$,

(5) $\frac{d}{dx}L_n(x) - \frac{d}{dx}L_{n-1}(x) = -L_{n-1}(x)$,

(6) $\frac{d}{dx}L_n(x) = -\sum_{k=0}^{n-1}L_k(x)$,

(7) $nL_n(x) = (2n-1-x)L_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x)$,

(8) $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$,

(9) $x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{L}_n(x)+(1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{L}_n(x)+n\mathrm{L}_n(x)=0$,

(10) $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{L}_n(x)\mathrm{L}_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 1, & m=n,\end{cases}$

(11) $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^k\mathrm{L}_n(x)=0,\ k=0,1,2,\cdots,(n-1)$,

(12) $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{L}_n(x)\mathrm{d}x=(-1)^n n!$,

(13) $\mathrm{L}_n(x)$的零点是正的，且是分离的.

(14) $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{L}_k(x)\mathrm{L}_k(y)=\frac{(n+1)[\mathrm{L}_{n+1}(y)\mathrm{L}_n(x)-\mathrm{L}_{n+1}(x)\mathrm{L}_n(y)]}{x-y}$,

(15) 若$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}f^2(x)\mathrm{d}x$存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{L}_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

(16) $\mathrm{L}_n(xy)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(1-y)^{n-k}y^k\mathrm{L}_k(x)}{k!(n-k)!}$.

除了上述性质外，还可推导$\mathrm{L}_n(x)$与勒让德多项式$\mathrm{P}_n(x)$和埃尔米特多项式$\mathrm{H}_n(x)$之间的关系：

(1) $\mathrm{H}_n(x)=2^n n!\sum_{k=0}^{n}{}_2\mathrm{F}_2\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2}(n-k), & -\frac{1}{2}(n-k-1); \\ -\frac{1}{2}n, & -\frac{1}{2}(n-1);\end{matrix}\ -\frac{1}{4}\right]\frac{(-n)_k\mathrm{L}_k(x)}{k!}$

对$n>1$成立.

(2) $\mathrm{P}_n(x)=2^n\left(\frac{1}{2}\right)_n\sum_{k=0}^{n}{}_2\mathrm{F}_3\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2}(n-k), & -\frac{1}{2}(n-k-1); \\ \frac{1}{2}-n, & -\frac{1}{2}n, & -\frac{1}{2}(n-1);\end{matrix}\ \frac{1}{4}\right]\frac{(-n)_k\mathrm{L}_k(x)}{k!}$

对$n>1$成立.

(3) $L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}{}_2F_2\left[\begin{matrix}-\frac{1}{2}(n-k), & -\frac{1}{2}(n-k-1); \\ \frac{1}{2}(1+k), & \frac{1}{2}(2+k);\end{matrix}\ 1\right]\frac{(-n)_k\mathrm{H}_k(x)}{2^k(k!)^2}$.

$$(4)\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F\left[\begin{matrix} -\frac{1}{2}(n-k), & -\frac{1}{2}(n-k-1); \\ \frac{3}{2}+k, \frac{1}{2}(1+k), & \frac{1}{2}(2+k); \end{matrix} \frac{1}{4}\right] \frac{(-n)_k 2^k P_k(x)}{(2k)!}$$

参考文献

1. 王竹溪，郭敦仁．特殊函数概论．科学出版社，1963
2. Тихонов，А Н，Самарский А А．Уравнения математической физики．数学物理方程．高等教育出版社，1957
3. Rainville E D．Special Functions．Macmillan Co，1960
4. Courant R，D．Hilbert．Methods of mathematical physics，vol．I，Interscience，1953．数学物理方法，卷 1，科学出版社，1981
5. Erdélyi A，W Magnus，F Oberhettinger，F G Tricomi．Higher Transcendental Functions，vol．1，2，3．McGral Hill，1953

10 积分变换

10.1 引言

积分变换，粗略地说就是把一个函数"变换"成另一个函数；用近代分析的话来说就是利用称为"算子"这种对应规律把函数 f 经过算子 T 作用后变成函数 F：

$$Tf = F$$

由于这里的 T 经常是通过积分的运算才能表达，因此常常称为积分变换.

利用积分变换可把原来较为困难的问题转化为较为容易的问题.

积分变换有着极为广泛的应用，除用于求解数学物理方程以外，在近代系统理论中研究线性平移不变系统时，积分变换是极其重要的手段；在电信系统中，积分变换中的傅里叶变换与频谱概念关系密切，它是求解时间序列问题的时域与频域间的桥梁；在光学研究中已形成一门傅里叶光学；此外，在计算机模式识别中都有所应用.

本章先从积分变换的一般定义出发，然后介绍若干重要的积分变换，最后介绍较为近代的各种积分变换，力求给出较多的"变换"公式供读者使用.

10.2 积分变换

10.2.1 定义

定义 10.2.1 设已给（实或复值）函数 $f(\cdot)$ 与 $K(\cdot,\cdot)$

使得

$\forall x\in\mathbf{R},\forall y\in[a,b]$: $K(\cdot,\cdot)f(\cdot)$在$[a,b]$上可积;称由函数空间$F=\{f\mid f(y)\in\mathbf{R},y\in[a,b]\}$到函数空间$G=\{g\mid g(x)\in\mathbf{R},x\in[c,d]\}$的算子$T$:

$$T: F\to G$$

详言之

$$T: f(y)\mapsto g(x)=\int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

为在**核**(kernel)$K(\cdot,\cdot)$下的**积分变换**(integral transform),记作:

$$Tf=g.$$

当算子T是**双射**(bijective)时,称$T^{-1}g=f$是该积分变换的**反演公式**(reciprocal formula).

10.2.2 若干重要的积分变换

在各种应用中经常出现的若干重要积分变换列入表10.1.

表10.1 重要积分变换表

核$K(x,y)$	区间	
e^{ixy}	$(-\infty,\infty)$	傅里叶变换
$\cos xy$	$(0,\infty)$	傅里叶余弦变换
$\sin xy$	$(0,\infty)$	傅里叶正弦变换
e^{-xy}	$(0,\infty)$	拉普拉斯变换
$\sqrt{xy}J_\nu(xy)$	$(0,\infty)$	汉开尔变换
$1/(x-y)$	$(-\infty,\infty)$	希尔伯特变换
x^{y}	$(0,\infty)$	梅林变换
$(x+y)^{-\rho}$	$(0,\infty)$	斯蒂尔切斯变换
$e^{-(x-y)^2}$	$(-\infty,\infty)$	高斯变换

在上表的汉开尔变换中，$J_\nu(\cdot)$是贝塞尔函数；在希尔伯特变换中，积分存在是在柯西主值意义下的存在性；在斯蒂尔切斯变换中，$\rho>0$.

10.3 傅里叶变换

首先给出傅里叶变换的定义及其反演公式，然后给出傅里叶变换的存在条件及其性质，最后给出若干重要函数的傅里叶变换表.

10.3.1 傅里叶变换及其反演公式

傅里叶变换通常有对称形式与非对称形式，我们首先给出对称形式，然后再给出非对称形式.

定义 10.3.1 设$\forall f(\cdot)\in L^1(\mathbf{R})$，它的傅里叶变换$\mathscr{F}[f(\cdot);\cdot]$（简记为$F(\cdot)$）如下：

$$\mathscr{F}[f(t);x]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{ixt}dt.$$

傅里叶变换$F(\cdot)$的反演公式$\mathscr{F}^{-1}[F(\cdot);\cdot]$（简记作$f(\cdot)$）如下：

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x);t]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-ixt}dx.$$

函数$f(\cdot)$，$F(\cdot)$称为**傅里叶变换对**，常记作

$$f(t)\longleftrightarrow F(x)$$

在不会混淆的情况下，常将$f(\cdot)$的傅里叶变换记作$f^\wedge(\cdot)$，其中$f(\cdot)$称为原象，$f^\wedge(\cdot)$称为象(变象).

对称形式的傅里叶变换还有另一种定义.

定义 10.3.2 设$\forall f(\cdot)\in L^2(\mathbf{R})$，它的傅里叶变换

$\mathscr{F}[f(\cdot);\cdot]$(简记为 $F(\cdot)$)如下：

$$\mathscr{F}[f(t);x]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt,$$

傅里叶变换 $F(\cdot)$ 的反演公式 $\mathscr{F}^{-1}[F(\cdot);\cdot]$(简记为 $f(\cdot)$)如下：

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x);t]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{ixt}dx,$$

现在给出非对称形式的傅里叶变换.

定义 10.3.3 设 $\forall f(\cdot)\in L^1(\mathbf{R})$，它的傅里叶变换 $\mathscr{F}[f(\cdot);\cdot]$(简记为 $F(\cdot)$)如下：

$$\mathscr{F}[f(t);x]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ixt}dt.$$

傅里叶变换 $F(\cdot)$ 的反演公式 $\mathscr{F}^{-1}[F(\cdot);\cdot]$(简记作 $f(\cdot)$)如下：

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x);t]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{ixt}dx.$$

从上面的定义可知，同一个函数的对称形式的傅里叶变换与非对称形式的傅里叶变换是不同的；由对称形式的傅里叶变换的变象乘上系数 $1/\sqrt{2\pi}$，就可以得到非对称形式的变象.因此，对使用者来说，应当认清所使用的是哪一种形式的傅里叶变换表.本手册给出的是第一种对称形式的傅里叶变换表.

10.3.2 傅里叶变换的性质

为了灵活地运用傅里叶变换处理多种多样的问题，应当了解傅里叶变换的一些基本性质；我们先集中陈述这些性质，然后给出有关定义及定理.

(1) 傅里叶变换是线性变换：对于 $\forall a,b\in\mathbf{R}$，

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{F}[af(t)+bg(t);x]&=a\mathscr{F}[f(t);x]+b\mathscr{F}[g(t);x],\\ \mathscr{F}^{-1}[aF(x)+bG(x);t]&=a\mathscr{F}^{-1}[F(x);t]\\ &\quad+b\mathscr{F}^{-1}[G(x);t].\end{aligned}\right\}\tag{10.1}$$

(2) 翻转

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{F}[f(-t);x]&=\mathscr{F}[f(t);-x],\\ \mathscr{F}^{-1}[F(-x);t]&=\mathscr{F}^{-1}[F(x);-t].\end{aligned}\right\}\tag{10.2}$$

(3) 共轭

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{F}[\overline{f(t)};x]&=\overline{\mathscr{F}[f(t);-x]},\\ \mathscr{F}^{-1}[\overline{F(x)};t]&=\overline{\mathscr{F}^{-1}[F(x);-t]}.\end{aligned}\right\}\tag{10.3}$$

(4) 位移

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t-t_0);x]&=e^{ixt_0}\mathscr{F}[f(t);x],\\ \mathscr{F}^{-1}[F(x-x_0);t]&=e^{ix_0t}\mathscr{F}^{-1}[F(x);t].\end{aligned}\right\}\tag{10.4}$$

(5) 微分性质

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t);x]=(ix)^n\mathscr{F}[f(t);x].\tag{10.5}$$

(6) 积分性质

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau;x\right]=\frac{1}{ix}\mathscr{F}[f(t);x].\tag{10.6}$$

(7) 乘积定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\overline{g(t)}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}[f(t);x]\cdot\overline{\mathscr{F}[g(t);x]}\mathrm{d}x.\tag{10.7}$$

(8) 帕塞瓦尔等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathscr{F}[f(t);x]|^2\mathrm{d}x.\tag{10.8}$$

(9) 卷积定理

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t)*g(t);x]&=\mathscr{F}[f(t);x]\cdot\mathscr{F}[g(t);x]\\ \mathscr{F}^{-1}[F(x)\cdot G(x);t]&=\mathscr{F}^{-1}[F(x);t]*\mathscr{F}^{-1}[G(x);t].\end{aligned}\right\}\tag{10.9}$$

式中 $f(t)*g(t)=(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 称为函数 $f(\cdot),g(\cdot)$的卷积.

由于同一函数的傅里叶变换定义有所不同,它们的卷积定义亦有所不同,读者在使用时应特别注意.

10.3.3 傅里叶变换及其反演公式存在的条件

关于傅里叶变换及其反演公式,我们有各种不同的条件,陈述在下列诸定理中.

定理 10.3.4(黎曼-勒贝格(Riemann Lebesgue)定理) 若 $f(\cdot)\in L(\mathbf{R})$,则 $f(\cdot)$的傅里叶变换存在:

$$\mathscr{F}[f(t);x]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t,$$

它在 $\mathbf{R}$ 上有界,连续且

$$\lim_{|x|\to\infty}\mathscr{F}[f(t);x]=0.$$

由此定理可以看出,并不是每一个在无限远处趋于零的连续函数都有原象 $f(\cdot)$,为了原象 $f(\cdot)$存在,$F(\cdot)$在无穷远处必须减少得足够快.

必须指出,上述定理中的 $f(\cdot)\in L(\mathbf{R})$表示定义在 $\mathbf{R}$ 上的实或复值函数,除掉有限个点外,是连续的,并且$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 存在.因此有 $L(\mathbf{R})\subset L^1(\mathbf{R})$.

定理 10.3.5(傅里叶变换的反演) 若 $f(\cdot)\in L(\mathbf{R})$且逐段可微,则在$f(\cdot)$的连续点 t 上,

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-ixt}\mathrm{d}x\ (\text{柯西主值}),$$

在 $f(\cdot)$的间断点 t 上,

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-itx}\mathrm{d}x.$$

定义 10.3.6　傅里叶卷积(Fourier convolution)　函数 $f(\cdot),g(\cdot)$的卷积$(f*g)(\cdot)$为

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)f(x-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

定理 10.3.7(卷积定理)　若 $f(\cdot),g(\cdot)\in L(\mathbf{R})$,则它们的卷积存在,且 $f*g\in L(\mathbf{R})$满足:

$$\mathscr{F}[(f*g)(t);x]=\mathscr{F}[f(\eta);x]\cdot\mathscr{F}[g(\tau);x].$$

应当留意 $L(\mathbf{R})$中有许多函数,它们的卷积$(f*g)$仍在 $L(\mathbf{R})$中,例如当 $f(\cdot),g(\cdot)$为有界的情形,就是如此.

定理 10.3.8(普兰切瑞尔定理)　若 $f(\cdot)\in L^2(\mathbf{R})$,则存在 $F(\cdot)\in L^2(\mathbf{R})$满足:

$$F(x)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t,$$

$$f(x)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}F(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t.$$

更一般的情形,有下面的定理.

定理 10.3.9　若 $f(\cdot)\in L^p(\mathbf{R})$ $(1<p\leqslant 2)$,则存在 $F(\cdot)\in L^{p'}(\mathbf{R})$满足:

$$F(x)=\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(t)e^{ixt}\mathrm{d}t,$$

$$f(x)=\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}F(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t,$$

其中　$p'=p/(p-1)$,$(1<p\leqslant 2)$.

10.3.4 傅里叶余弦变换与傅里叶正弦变换

定义 10.3.10 $f(\cdot)$的**傅里叶余弦变换** $\mathscr{F}_c[f(\cdot);\cdot]$(简记为$F_c(\cdot)$)如下:

$$\mathscr{F}_c[f(t);x]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos tx\mathrm{d}t.$$

傅里叶余弦变换的反演公式 $\mathscr{F}_c^{-1}[F_c(\cdot);\cdot]$(简记为$f(\cdot)$)如下:

$$\mathscr{F}_c^{-1}[F_c(x);t]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_c(x)\cos tx\mathrm{d}x.$$

定义 10.3.11 $f(\cdot)$的**傅里叶正弦变换** $\mathscr{F}_s[f(\cdot);\cdot]$(简记为 $F_s(\cdot)$)如下:

$$\mathscr{F}_s[f(t);x]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\sin tx\mathrm{d}t.$$

傅里叶正弦变换的反演公式 $\mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\cdot);\cdot]$(简记为$f(\cdot)$)如下:

$$\mathscr{F}_s^{-1}[F_s(x);t]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_s(x)\sin tx\mathrm{d}x.$$

性质 10.3.12 傅里叶变换与傅里叶正弦变换以及傅里叶余弦变换之间的关系:

设 $f(\cdot)$是任意函数,若令

$$f_1(t)=[f(t)+f(-t)]/2\quad(\text{偶函数});$$

$$f_2(t)=[f(t)-f(-t)]/2\quad(\text{奇函数}),$$

则有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(t);x]&=\mathscr{F}[f_1(t)+f_2(t);x]\\&=\mathscr{F}_c[f_1(t);x]+i\mathscr{F}_s[f_2(t);x].\quad(10.10)\end{aligned}$$

10.3.5 傅里叶变换表

表 10.2 傅里叶变换表

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{ixt}dt \quad (象函数)$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-ixt}dx \quad (原象函数)$$

	$f(t)$	$F(x)$
1	$\lvert t\rvert^{\nu}$ $(\nu\neq 0,2,4,\cdots;\ -1,\ -3,\cdots)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{\nu\pi}{2}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\lvert x\rvert^{\nu+1}}$
2	$\frac{1}{\lvert t\rvert}$ $(t\neq 0)$	$\frac{1}{\lvert x\rvert}$ $(x\neq 0)$
3	$\frac{1}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$ $(t\neq 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$ $(x\neq 0)$
4	$\frac{\mathrm{sgn}t}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\frac{\mathrm{i\,sgn}x}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$
5	$\frac{\sin at}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\lvert x+a\rvert}}-\frac{1}{\sqrt{\lvert x-a\rvert}}\right)$
6	$\frac{\cos at}{\sqrt{\lvert t\rvert}}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\lvert x+a\rvert}}+\frac{1}{\sqrt{\lvert x-a\rvert}}\right)$
7	$\frac{1}{\lvert t\rvert^{\nu}}$ $(0<\mathrm{Re}\nu<1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{\nu\pi}{2}\Gamma(1-\nu)/\lvert x\rvert^{1-\nu}$ $x\neq 0$
8	$\frac{\mathrm{sgn}t}{\lvert t\rvert^{\nu}}$ $(0<\mathrm{Re}\nu<2,\nu\neq 1)$	$\mathrm{i\,sgn}x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\frac{\nu\pi}{2}\Gamma(1-\nu)/\lvert x\rvert^{1-\nu}$ $x\neq 0$
9	$\frac{1}{t^2+a^2}$ $a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\lvert x\rvert}}{a}$

	$f(t)$	$F(x)$
10	$\dfrac{\operatorname{sgn} t}{t^2+a^2}$ $\quad a>0$	$\dfrac{\mathrm{i}\operatorname{sgn} x}{\sqrt{2\pi}a}[\mathrm{e}^{-a\lvert x\rvert}\overline{\mathrm{Ei}}(a\lvert x\rvert)$ $-\mathrm{e}^{a\lvert x\rvert}\mathrm{Ei}(-a\lvert x\rvert)]$
11	$\dfrac{\lvert t\rvert}{t^2+a^2}$ $\quad (a>0)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}[\mathrm{e}^{-a\lvert x\rvert}\overline{\mathrm{Ei}}(a\lvert x\rvert)$ $+\mathrm{e}^{a\lvert x\rvert}\mathrm{Ei}(-a\lvert x\rvert)]$
12	$\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}}{t^2+a^2}$ $\quad (\mathrm{Re}\,a<0,\ b\in\mathbf{R})$	$-\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{a\lvert x+b\rvert}$
13	$\dfrac{1}{(t^2+a^2)^{\nu+1/2}}$ $\quad (\mathrm{Re}\,\nu>-\dfrac{1}{2})$	$\dfrac{\sqrt{2}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left\lvert\dfrac{x}{2a}\right\rvert^{\nu}\mathrm{K}_{\nu}(a\lvert x\rvert)$
14	$\dfrac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\mathrm{K}_0(a\lvert x\rvert)$
15	$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a^2-t^2}} & \lvert t\rvert<a\\ 0 & \lvert t\rvert>a\end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\mathrm{J}_0(a\lvert x\rvert)$
16	$\begin{cases}\dfrac{1}{(a^2-t^2)^{\nu+1/2}} & \lvert t\rvert<a\\ 0 & \lvert t\rvert>a\end{cases}$ $\quad (\mathrm{Re}\,\nu<1/2)$	$\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}{\sqrt{2}}\left\lvert\dfrac{x}{2a}\right\rvert^{\nu}\mathrm{J}_{-\nu}(a\lvert x\rvert)$
17	$\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & \alpha<t<\beta\\ 0 & t<\alpha,t>\beta\end{cases}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(x+\omega)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x+\omega)}}{x+\omega}$
18	$\begin{cases}\mathrm{e}^{-at+\mathrm{i}\omega t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$ $\quad (a>0)$	$\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{x+\omega+\mathrm{i}a}$

	$f(t)$		$F(x)$
19	e^{-at^2}	$(a>0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$
20	$\frac{e^{-a\|t\|}}{\sqrt{\|t\|}}$	$(a>0)$	$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{x^2+a^2}}$
21	$\frac{\operatorname{sgn} t\, e^{-a\|t\|}}{\sqrt{\|t\|}}$	$(a>0)$	$i\operatorname{sgn} x\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{x^2+a^2}}$
22	$\frac{e^{-\frac{a}{\|t\|}}}{\sqrt{\|t\|}}$	$(a>0)$	$\frac{e^{-\sqrt{2a\|x\|}}}{\sqrt{\|x\|}}(\cos\sqrt{2a\|x\|}-\sin\sqrt{2a\|x\|})$
23	$\operatorname{sgn} t\frac{e^{-\frac{a}{\|t\|}}}{\sqrt{\|t\|}}$	$(a>0)$	$i\operatorname{sgn} x\frac{e^{-\sqrt{2a\|x\|}}}{\sqrt{\|x\|}}(\cos\sqrt{2a\|x\|}+\sin\sqrt{2a\|x\|})$
24	$e^{-b\sqrt{t^2+a^2}}$	$(a,b>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ab}{\sqrt{x^2+b^2}}K_1(a\sqrt{x^2+b^2})$
25	$\frac{e^{-b\sqrt{t^2+a^2}}}{\sqrt{t^2+a^2}}$	$(a,b>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_0(a\sqrt{x^2+b^2})$
26	$\frac{\sin at}{t}$	$(a>0)$	$\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & \|x\|<a\\ 0 & \|x\|>a\end{cases}$

续表

	$f(t)$		$F(x)$	
27	$\dfrac{\sin^2 at}{t}$	$(a>0)$	$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\,x}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \\ 0\end{cases}$	$\begin{matrix}\lvert x\rvert<2a \\ \lvert x\rvert>2a\end{matrix}$
28	$\dfrac{\sin^2 at}{t^2}$	$(a>0)$	$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(a-\dfrac{\lvert x\rvert}{2}\right) \\ 0\end{cases}$	$\begin{matrix}\lvert x\rvert<2a \\ \lvert x\rvert>2a\end{matrix}$
29	$\dfrac{\sin at}{\lvert t\rvert^{1-\nu}}$	$(\mathrm{Re}\,\nu\in(-1,1)$, $\nu\neq 0, a>0)$	$\dfrac{\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}x}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\nu)\cos\dfrac{\nu\pi}{2}\left(\dfrac{1}{\lvert x-a\rvert^{\nu}}-\dfrac{1}{\lvert x+a\rvert^{\nu}}\right)$	
30	$\sin at^2$	$(a>0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\dfrac{x^2}{4a}+\dfrac{\pi}{4}\right)$	
31	$\cos at^2$	$(a>0)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\cos\left(\dfrac{x^2}{4a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$	
32	$\dfrac{\sin at^2}{t}$	$(a>0)$	$-\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left[S\left(\dfrac{x}{\sqrt{2\pi a}}\right)-C\left(\dfrac{x}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]$	
33	$\dfrac{\sin at^2}{t^2}$	$(a>0)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x\left[S\left(\dfrac{x}{\sqrt{2\pi a}}\right)-C\left(\dfrac{x}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]+\sqrt{2a}\sin\left(\dfrac{x^2}{4a}+\dfrac{\pi}{4}\right)$	

10.4 拉普拉斯变换

10.4.1 引言

利用傅里叶变换可以求解不少方程，但是能够进行傅里叶变换的函数在 **R** 内要满足绝对可积等较强的条件，这样有些经常遇到的如常数函数以及多项式等均不满足这样的条件. 这时就可以采用拉普拉斯变换.

10.4.2 拉普拉斯变换及其反演公式

定义 10.4.1 设 $f(\cdot)\in L^1(\mathbf{R})$，它的拉普拉斯变换 $\mathscr{L}[f(\cdot);\cdot]$，(简记为 $L(\cdot)$)如下：

$$\mathscr{L}[f(t);s]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \quad (s=\sigma+i\tau). \tag{10.11}$$

拉普拉斯变换 $L(\cdot)$的反演公式 $\mathscr{L}^{-1}[L(\cdot);\cdot]$，(简记为 $f(\cdot)$)如下：

$$\mathscr{L}^{-1}[L(s);t]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}L(s)e^{st}\mathrm{d}s, \tag{10.12}$$

$$(t\geqslant 0,\sigma\geqslant 0).$$

上式积分应理解为在柯西主值意义之下的. 积分是沿着任意直线 $\mathrm{Re}s>a$ 取定的，a 是函数 $f(\cdot)$的增长指数.

10.4.3 拉普拉斯变换的性质

下述拉普拉斯变换的各种性质，都是在原象函数满足性质(P)的条件之下获得的. 所谓条件(P)是指下列条件：

条件 10.4.2 条件(P)：

(1) 在 $t<0$ 时，$f(t)=0$；

(2) 在 $t\geqslant 0$ 时，$f(\cdot)$及 $f'(\cdot)$除去有限多个第一类不连续

点外，处处连续；

(3) 当 $t\to\infty$ 时，$f(\cdot)$ 的增长速度不超过某一个指数型函数，换言之，存在常数 $M>0, a\geqslant 0$，使得对 $\forall\, t\in \mathbf{R}$，满足

$$|f(t)|\leqslant M\mathrm{e}^{at},$$

其中 a 称为函数 $f(\cdot)$ 的**增长指数**.

线性关系 若函数 $f(\cdot), g(\cdot)$ 满足条件(P)，则对于 $\forall\, c, d\in\mathbf{C}$，函数 $cf(\cdot)+dg(\cdot)$ 也满足条件(P)，且有

$$\mathscr{L}[cf(t)+dg(t);s]=c\mathscr{L}[f(t);s]+d\mathscr{L}[g(t);s]. \tag{10.13}$$

若 $f(\cdot), g(\cdot)$ 均满足条件(P)，其增长指数分别为 s_1 及 s_2，则乘积 $f(\cdot)g(\cdot)$ 也满足条件(P)，且

$$\mathscr{L}[f(t)g(t);s]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}F(\tau)G(s-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{10.14}$$

其中 $F(\cdot), G(\cdot)$ 分别是 $f(\cdot), g(\cdot)$ 的变象，而 $a>s_1$，$\mathrm{Re}\, s>s_2+a$.

定理 10.4.3（卷积定理） 若 $f(\cdot), g(\cdot)$ 都满足条件(P)，则 $f(\cdot)$ 与 $g(\cdot)$ 的卷积

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau,$$

也满足条件(P)，且

$$\mathscr{L}[(f*g)(t);s]=\mathscr{L}[f(t);s]\cdot\mathscr{L}[g(t);s]. \tag{10.15}$$

若 $f(\cdot)$ 与 $f'(\cdot)$（或直到 $f^{(n)}(\cdot)$）满足条件(P)，则有

$$\mathscr{L}[f'(t);s]=s\mathscr{L}[f(t);s]-f(+0), \tag{10.16}$$

更一般地有

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t);s]=s^n\mathscr{L}[f(t);s]-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}f^{(r)}(+0), \tag{10.17}$$

其中

$$f^{(n)}(+0) = \lim_{t\to +0} f^{(n)}(t).$$

若 $f(\cdot)$满足条件(P),则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}[f(t);s] = \mathscr{L}[-tf(t);s]. \tag{10.18}$$

一般地有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathscr{L}[f(t);s] = \mathscr{L}[(-t)^n f(t);s]. \tag{10.19}$$

若 $f(\cdot)$满足条件(P),则

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau;s\right] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t);s]. \tag{10.20}$$

若 $f(\cdot)$满足条件(P),且积分

$$\int_s^\infty \mathscr{L}[f(t);\tau]\mathrm{d}\tau$$

绝对收敛,则

$$\int_s^\infty \mathscr{L}[f(t);\tau]\mathrm{d}\tau = \mathscr{L}[f(t)/t;s]. \tag{10.21}$$

定理 10.4.4(相似定理) 设 $f(\cdot)$满足条件(P),$a>0$,则

$$\mathscr{L}[f(at);s] = \frac{1}{a}\mathscr{L}[f(t);s/a].$$

定理 10.4.5(延迟定理) 设 $f(\cdot)$满足条件(P),$t_0>0$,则

$$\mathscr{L}[f(t-t_0);s] = \mathrm{e}^{-st_0}\mathscr{L}[f(t);s].$$

定理 10.4.6(位移定理) 设 $f(\cdot)$满足条件(P),则

$$\mathscr{L}[f(t);s-s_0] = \mathscr{L}[\mathrm{e}^{s_0t}f(t);s].$$

极限关系:设 $L(\cdot)$是 $f(\cdot)$的拉普拉斯变换,若$\exists \lim f(t)$(当 $t\to 0$ 或 $t\to\infty$),则$\exists \lim sL(s)$(当 $s\to 0$ 或 $s\to\infty$)并且

(1) $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sL(s)$,称为初值定理;

(2) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sL(s)$,称为终值定理.

定理 10.4.7(展开定理) 设函数 $f(\cdot)$的变象是真有理函数

$L(\cdot)$:

$$L(s)=A(s)/B(s),$$

$B(\cdot)$的根 $s_0, s_1, \cdots, s_n$ 均为单根，则原象

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t}. \qquad (10.22)$$

定理 10.4.8（赫维赛德(Heaviside)公式） 设函数 $F(\cdot)$如下：

$$F(s)=G(s)H(s),$$

其中 $H(\cdot)=\mathscr{L}[h(\cdot);\cdot]$，$h(\cdot)$是增长指数为 α_0 的分段连续函数，$G(\cdot)$是准有理函数（即 $G(s)=A(s)/B(s)$，$\deg A(s)\leqslant\deg B(s)$，其中 $\deg A(s)$，$\deg B(s)$分别表示 $A(s)$与 $B(s)$的次数），则

(1) $\mathscr{L}^{-1}[F(\cdot);\cdot]$存在且是分段连续的指数型函数；

(2) 当 $t>0$ 时，若 $G(\cdot)$是真有理函数，或 $h(\cdot)$为连续函数，则 $\mathscr{L}^{-1}[F(\cdot);\cdot]$存在且连续.

设函数 $F(\cdot)$如下：

$$F(s)=G(s)H(s), \qquad (10.23)$$

其中$G(\cdot)$是有理函数. 若 $\mathscr{L}^{-1}[H(\cdot);\cdot]$有 $n-1$ 阶连续导数，且在$t=0$时为零. 它的 n 阶导数是分段连续的指数型函数，则

$$\mathscr{L}^{-1}[F(\cdot);\cdot],$$

存在且分段连续.

10.4.4 拉普拉斯变换及其反演公式存在的条件

定理 10.4.9 若函数 $f(\cdot)$满足条件(P)，则它的变象 $\mathscr{L}[f(\cdot);\cdot]$：

$$\mathscr{L}[f(t);s]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

在半平面 $\mathrm{Re}\,s>s_0$ 上有意义，且是解析函数.

定理 10.4.10 若 $f(\cdot)$ 满足条件(P)，$L(\cdot)$ 是它的变象，则当 $t>0$ 时在 $f(\cdot)$ 的每一个连续点上成立

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}L(s)e^{st}ds \qquad \text{(柯西主值)}$$

其中积分是沿着任一直线 $a=\operatorname{Re}s>s_0$ 进行. 当 $t<0$ 时上式为零.

定理 10.4.11 若函数 $L(\cdot)$ 在左半平面 $\operatorname{Re}s>s_0$ 上解析，在任意半平面 $\operatorname{Re}s\geqslant a>s_0$ 上，当 $|s|\to\infty$ 时，对于 $\arg s$ 而言均匀地趋于零，且积分

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}L(\tau)d\tau$$

绝对收敛，则 $L(\cdot)$ 是函数 $f(\cdot)$：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}L(s)e^{st}ds$$

的变象.

10.4.5 拉普拉斯变换的主要公式表

表 10.3 拉普拉斯变换的主要公式表

$$L(s)=\mathscr{L}[f(t);s]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (s=\sigma+i\tau)$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[L(s);t]=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}L(s)e^{st}ds$$

	$f(t)$	$L(s)$
1	$f(at)$ $\qquad (a>0)$	$\frac{1}{a}L\left(\frac{s}{a}\right)$
2	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^nL(s)}{ds^n}$
3	$\frac{f(t)}{t^n}$	$\underbrace{\int_s^\infty\cdots\int_s^\infty}_{n}L(s)(ds)^n$

续表

	$f(t)$	$L(s)$
4	$e^{at}f(t)$	$L(s-a)$
5	$f(t)\cos(bt)$	$\frac{1}{2}[L(s-ib)+L(s+ib)]$
6	$f(t)\sin(bt)$	$\frac{1}{2i}[L(s-ib)-L(s+ib)]$
7	$e^{-at}f(t)\cos(bt)$	$\frac{1}{2}[L(s+a-ib)$ $+L(s+a+ib)]$
8	$e^{-at}f(t)\sin(bt)$	$\frac{1}{2i}[L(s+a-ib)$ $-L(s+a+ib)]$
9	$f^{(n)}(t)$ $(n=1,2,\cdots)$	$s^nL(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}f^{(r)}(+0)$
10	$t^m f^{(n)}(t)$ $(m\geqslant n)$	$\left(-\frac{d}{ds}\right)^m[s^nL(s)]$
11	$\left(t\frac{d}{dt}\right)^n f(t)$	$\left(-\frac{d}{ds}s\right)^n L(s)$
12	$\left(\frac{d}{dt}t\right)^n f(t)$	$\left(-s\frac{d}{ds}\right)^n L(s)$
13	$\frac{d^n}{dt^n}[t^m f(t)]$ $(m\geqslant n)$	$(-1)^m s^n L^{(m)}(s)$
14	$\underbrace{\int_0^t\cdots\int_0^t}_{n} f(\tau)(d\tau)^n$ $(n=1,2,\cdots)$	$\frac{L(s)}{s^n}$
15	$\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau$	$\frac{1}{s}\int_0^s L(\tau)d\tau$

续表

	$f(t)$	$L(s)$
16	$\begin{cases} f(t-a) & t \geqslant a \\ 0 & 0 \leqslant t < a \end{cases}$	$e^{-as}L(s)$
17	$f(t+a) \quad a<0$	$e^{as}\left[L(s)-\int_0^a e^{-st}f(t)dt\right]$
18	$f(t^2)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\tau^2}e^{-s^2\tau^2/4}L\left(\frac{1}{4\tau^2}\right)d\tau$
19	$t^{-\nu-1}f(t) \quad \mathrm{Re}\nu > -1$	$s^{-\frac{\nu}{2}}\int_0^\infty \tau^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{s\tau})L(\tau)d\tau$
20	$\int_0^\infty \frac{t^\tau f(\tau)}{\Gamma(\tau)}d\tau$	$L(\ln s)$
21	$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau^2}{4t}}}{t^{\frac{n+1}{2}}}H_n\left(\frac{\tau}{\sqrt{2t}}\right)f(\tau)d\tau \quad n=0,1,2,\cdots$	$2^{\frac{n}{2}}\sqrt{\pi}s^{\frac{n-1}{2}}L(\sqrt{s})$
22	$\int_0^t J_0[2\sqrt{a\tau(t-\tau)}]f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}L\left(s+\frac{a}{s}\right)$
23	$f(t)-\int_0^t f(\sqrt{t^2-\tau^2})J_1(\tau)d\tau$	$L(\sqrt{s^2+1})$

10.4.6 拉普拉斯变换表

表 10.4 拉普拉斯变换表 I（本表可供从原象查找变象）

$$L(s)=\mathscr{L}[f(t);s]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (\mathrm{Re}\,s=\sigma>0)$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[L(s);t]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} L(s)e^{st}ds \quad (t\geqslant 0,\sigma\geqslant 0)$$

	$f(t)$	$L(s)$
1	$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$	1
2	$\delta(t-a)\qquad a>0$	e^{-as}
3	$t^n\qquad (n=0,1,2,\cdots)$	$n!/s^{n+1}$
4	$t^{n-\frac{1}{2}}\qquad (n=1,2,\cdots)$	$\sqrt{\pi}\,\frac{(2n-1)!!}{2^n}\frac{1}{s^{n+\frac{1}{2}}}$
5	$t^{\nu}\qquad (\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$\Gamma(\nu+1)/s^{\nu+1}$
6	$1/\sqrt{t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
7	$\begin{cases}1 & t>a\\ 0 & 0<t<a\end{cases}\qquad (a>0)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
8	$\begin{cases}0 & 0<t<a\\ 1 & a<t<b\\ 0 & b<t<\infty\end{cases}\qquad (0\leqslant a<b)$	$\frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s}\qquad (\mathrm{Re}\,s=\sigma>-\infty)$
9	$\begin{cases}(t-a)^{\nu} & t>a\\ 0 & 0<t<a\end{cases}\qquad (\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}e^{-as}$
10	$\left[\frac{t}{a}\right]\qquad (a>0)$	$\frac{1}{s(e^{as}-1)}$
11	$2\left[\frac{t}{a}\right]+1\qquad (a>0)$	$\frac{1}{s}\,\mathrm{cth}\,\frac{as}{2}$

	$f(t)$	$L(s)$
12	$\left\lfloor \frac{t}{a}+\frac{1}{2} \right\rfloor \qquad (a>0)$	$\frac{1}{2s}\operatorname{csch}\frac{as}{2}$
13	$\frac{t}{a}-\left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor \qquad (a>0)$	$\frac{1}{as^2}-\frac{1}{s(e^{as}-1)}$
14	$\begin{cases} \frac{t}{a}-\left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor, & \left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor \text{为偶数} \\ \left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor-\frac{t}{a}+1, & \left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor \text{为奇数} \end{cases} \quad (a>0)$	$\frac{1}{as^2}\operatorname{th}\frac{as}{2}$
15	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & t>a \\ 0 & 0<t<a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}\operatorname{erfc}(\sqrt{as})$
16	$(2at+t^2)^{\nu} \qquad (a>0,\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2a}{s}\right)^{\nu+1/2}e^{as}K_{\nu+\frac{1}{2}}(as)$
17	$\begin{cases} (t^2-a^2)^{\nu} & t>a \\ 0 & 0<t<a \end{cases} \quad (\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2a}{s}\right)^{\nu+1/2}K_{\nu+\frac{1}{2}}(as)$
18	$\begin{cases} (2at-t^2)^{\nu} & 0<t<2a \\ 0 & t>2a \end{cases} \quad (\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{e^{as}}\left(\frac{2a}{s}\right)^{\nu+1/2}I_{\nu+\frac{1}{2}}(as) \quad (\mathrm{Re}\,s>-\infty)$
19	$\begin{cases} \frac{a-t}{\sqrt{2at-t^2}} & 0<t<2a \\ 0 & t>2a \end{cases}$	$\pi a e^{-as}I_1(as)$

	$f(t)$		$L(s)$	
20	$\frac{1}{1+at}$	$(a>0)$	$-\frac{e^{s/a}}{a}\mathrm{Ei}\left(-\frac{s}{a}\right)$	
21	$\frac{1}{(1+at)^2}$	$(a>0)$	$\frac{1}{a}+\frac{s}{a^2}e^{s/a}\mathrm{Ei}\left(-\frac{s}{a}\right)$	
22	$\frac{1}{1-at}$	$(a>0)$	$-\frac{1}{a}e^{-s/a}\overline{\mathrm{Ei}}\left(\frac{s}{a}\right)$	
23	$\frac{1}{\sqrt{1+at}}$	$(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{as}}e^{s/a}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\right)$	
24	$\frac{1}{\sqrt{t}\,(1+at)}$	$(a>0)$	$\frac{\pi}{a}e^{s/a}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\right)$	
25	$\frac{1}{1-a^2t^2}$	$(a>0)$	$\frac{1}{2a}\left[e^{-s/a}\overline{\mathrm{Ei}}\left(\frac{s}{a}\right)-e^{s/a}\mathrm{Ei}\left(-\frac{s}{a}\right)\right]$	
26	$\frac{t}{1-a^2t^2}$	$(a>0)$	$\frac{1}{2a^2}\left[e^{-s/a}\overline{\mathrm{Ei}}\left(\frac{s}{a}\right)+e^{s/a}\mathrm{Ei}\left(-\frac{s}{a}\right)\right]$	
27	$\frac{1}{1+a^2t^2}$	$(a>0)$	$\frac{1}{a}\left[\sin\frac{s}{a}\mathrm{Ci}\left(\frac{s}{a}\right)-\cos\frac{s}{a}\mathrm{si}\left(\frac{s}{a}\right)\right]$	
28	$\frac{t}{1+a^2t^2}$	$(a>0)$	$-\frac{1}{a^2}\left[\cos\frac{s}{a}\mathrm{Ci}\left(\frac{s}{a}\right)+\sin\frac{s}{a}\mathrm{si}\left(\frac{s}{a}\right)\right]$	
29	e^{at}		$1/(s-a)$	$(\sigma>\mathrm{Re}\,\alpha)$
30	t^ne^{at}	$(n=0,1,2,\cdots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$(\sigma>\mathrm{Re}\,\alpha)$
31	$t^\nu e^{at}$	$(\mathrm{Re}\,\nu>-1)$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{(s-a)^{\nu+1}}$	$(\sigma>\mathrm{Re}\,\alpha)$

续表

	$f(t)$	$L(s)$
32	$e^{at}/\sqrt{t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s-a}}$ $(\sigma > \mathrm{Re}\,a)$
33	$\frac{1-e^{-at}}{t}$ $(a>0)$	$\ln(1+a/s)$
34	$e^{-t^2/(4a)}$ $(a>0)$	$\sqrt{\pi a}\,e^{as^2}\mathrm{erfc}(\sqrt{a}\,s)$ $(\sigma>-\infty)$
35	$te^{-t^2/(4a)}$ $(a>0)$	$2a[1-\sqrt{\pi a}\,se^{as^2}\mathrm{erfc}(\sqrt{a}\,s)]$ $(\sigma>-\infty)$
36	$e^{-a^2/(4t)}/\sqrt{t}$ $(a\geqslant 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-a\sqrt{s}}$
37	$e^{-a^2/(4t)}/t^{3/2}$ $(a>0)$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{a}e^{-a\sqrt{s}}$
38	$e^{-a^2/(4t)}/t^{\nu+1}$ $(a>0)$	$\frac{2^{\nu+1}s^{\nu/2}}{a^{\nu}}K_{\nu}(a\sqrt{s})$
39	$\sin at$	$a/(s^2+a^2)$ $(\sigma\geqslant\vert\mathrm{Im}\,a\vert)$
40	$\cos at$	$s/(s^2+a^2)$ $(\sigma\geqslant\vert\mathrm{Im}\,a\vert)$
41	$\begin{cases}\sin t & (2n-2)\pi<t<(2n-1)\pi\\ 0 & (2n-1)\pi<t<2n\pi\end{cases}$	$\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$
42	$\sin at$ $(a>0)$	$\frac{a}{s^2+a^2}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi s}{2a}$
43	$\cos at$ $(a>0)$	$\frac{1}{s^2+a^2}\left(s+a\,\mathrm{csch}\,\frac{\pi s}{2a}\right)$
44	$\cos(at+\varphi)$	$\frac{s\cos\varphi-a\sin\varphi}{s^2+a^2}$
45	$\sin(at+\varphi)$	$\frac{s\sin\varphi+a\cos\varphi}{s^2+a^2}$

续表

	$f(t)$	$L(s)$
46	$e^{\beta t}\cos(\alpha t+\theta)$	$\dfrac{(s-\beta)\cos\theta-\alpha\sin\theta}{(s-\beta)^2+\alpha^2}$ $(\sigma\geqslant \lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert+\mathrm{Re}\beta)$
47	$e^{\beta t}\sin(\alpha t+\theta)$	$\dfrac{(s-\beta)\sin\theta+\alpha\cos\theta}{(s-\beta)^2-\alpha^2}$ $(\sigma\geqslant \lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert+\mathrm{Re}\beta)$
48	$t^n\sin\alpha t$ $(n=0,1,2,\cdots)$	$n!\dfrac{s^{n+1}}{(s^2+\alpha^2)^{n+1}}\cdot\sum\limits_{0\leqslant 2m\leqslant n}(-1)^m C_{n+1}^{2m+1}\left(\dfrac{\alpha}{s}\right)^{2m+1}$ $(\sigma\geqslant \lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert)$
49	$t^n\cos\alpha t$ $(n=0,1,2,\cdots)$	$n!\dfrac{s^{n+1}}{(s^2+\alpha^2)^{n+1}}\cdot\sum\limits_{0\leqslant 2m\leqslant n+1}(-1)^m C_{n+1}^{2m}\left(\dfrac{\alpha}{s}\right)^{2m}$ $(\sigma\geqslant \lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert)$
50	$t^{\nu-1}\sin\alpha t$ $(\mathrm{Re}\nu>-1)$	$\dfrac{\mathrm{i}\Gamma(\nu)}{2}\left[\dfrac{1}{(s+\mathrm{i}\alpha)^\nu}-\dfrac{1}{(s-\mathrm{i}\alpha)^\nu}\right]=\dfrac{\Gamma(\nu)}{(s^2+\alpha^2)^{\nu/2}}\sin\left(\nu\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\alpha}{s}\right)$ $(\sigma\geqslant \lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert)$
51	$t^{\nu-1}\cos\alpha t$ $(\mathrm{Re}\nu>0)$	$\dfrac{\Gamma(\nu)}{2}\left[\dfrac{1}{(s+\mathrm{i}\alpha)^\nu}+\dfrac{1}{(s-\mathrm{i}\alpha)^\nu}\right]=\dfrac{\Gamma(\nu)}{(s^2+\alpha^2)^{\nu/2}}\cos\left(\nu\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\alpha}{s}\right)$ $(\sigma\geqslant \lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert)$
52	$\dfrac{\sin\alpha t}{t}$	$\mathrm{arctg}\,\dfrac{\alpha}{s}$ $(\sigma\geqslant \lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert)$

续表

	$f(t)$	$L(s)$
53	$\dfrac{1-\cos\alpha t}{t}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{\alpha^2}{s^2}\right)$　　$(\sigma \geqslant \lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert)$
54	$\sin\alpha t/\sqrt{t}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{s^2+\alpha^2}-s}{s^2+\alpha^2}}$　　$(\sigma \geqslant \lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert)$
55	$\cos\alpha t/\sqrt{t}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{s^2+\alpha^2}+s}{s^2+\alpha^2}}$　　$(\sigma \geqslant \lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert)$
56	$\dfrac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{t^2}$	$\dfrac{s}{2}\ln\dfrac{s^2+\alpha^2}{s^2+\beta^2}+\beta\,\mathrm{arctg}\dfrac{\beta}{s}-\alpha\,\mathrm{arctg}\dfrac{\alpha}{s}$　　$\sigma \geqslant \max(\lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert, \lvert\mathrm{Im}\beta\rvert)$
57	$\dfrac{\sin^2\alpha t}{t}$	$\dfrac{1}{4}\ln\left(1+\dfrac{4\alpha^2}{s^2}\right)$　　$(\sigma \geqslant 2\lvert\mathrm{Im}\alpha\rvert)$
58	$\sin a\sqrt{t}$	$\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{s^3}}\mathrm{e}^{-a^2/(4s)}$
59	$\sqrt{t}\cos a\sqrt{t}$	$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{a^2}{2s}\right)\sqrt{\dfrac{\pi}{s^3}}\mathrm{e}^{-a^2/(4s)}$
60	$\dfrac{\sin a\sqrt{t}}{t}$	$\pi\,\mathrm{erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{s}}\right)$
61	$\dfrac{\cos a\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}\mathrm{e}^{-a^2/(4s)}$

	$f(t)$	$L(s)$
62	$\frac{\sin(a/t)}{\sqrt{t}}$ $(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\sqrt{2as}}\sin\sqrt{2as}$
63	$\frac{\cos(a/t)}{\sqrt{t}}$ $(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\sqrt{2as}}\cos\sqrt{2as}$
64	$\frac{\sin t}{t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}}\right)\right]+\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi}}\right)\right]\right\}$
65	$\sin at^2$ $(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\sin\frac{s^2}{4a}\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]+\cos\frac{s^2}{4a}\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]\right\}$
66	$\cos at^2$ $(a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\cos\frac{s^2}{4a}\left[\frac{1}{2}-S\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]-\sin\frac{s^2}{4a}\left[\frac{1}{2}-C\left(\frac{s}{\sqrt{2\pi a}}\right)\right]\right\}$
67	$\text{sh}\,at$	$a/(s^2-a^2)$ $(\sigma>\lvert\text{Re}\,a\rvert)$
68	$\text{ch}\,at$	$s/(s^2-a^2)$ $(\sigma>\lvert\text{Re}\,a\rvert)$
69	$\text{sh}^2 at$	$2a^2/s(s^2-4a^2)$ $(\sigma>2\lvert\text{Re}\,a\rvert)$

	$f(t)$	$L(s)$
70	$\mathrm{ch}^2 at$	$(s^2-2a^2)/s(s^2-4a^2)$ $(\sigma > 2\|\mathrm{Re}\,a\|)$
71	$t^{\nu-1}\mathrm{sh}\,at$ $(\mathrm{Re}\,\nu > -1, \nu \neq 0)$	$\frac{\Gamma(\nu)}{2}\left[\frac{1}{(s-a)^\nu}-\frac{1}{(s+a)^\nu}\right]$ $(\sigma > \|\mathrm{Re}\,a\|)$
72	$t^{\nu-1}\mathrm{ch}\,at$ $(\mathrm{Re}\,\nu > 0)$	$\frac{\Gamma(\nu)}{2}\left[\frac{1}{(s-a)^\nu}+\frac{1}{(s+a)^\nu}\right]$ $(\sigma > \|\mathrm{Re}\,a\|)$
73	$\frac{\mathrm{sh}\,at}{t}$	$\frac{1}{2}\ln\frac{s+a}{s-a}$ $(\sigma > \|\mathrm{Re}\,a\|)$
74	$\frac{\mathrm{sh}^2 at}{t}$	$\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{4a^2}{s^2}\right)$ $(\sigma > 2\|\mathrm{Re}\,a\|)$
75	$e^{\beta t}\mathrm{sh}\,at$	$\frac{a}{(s-\beta)^2-a^2}$ $(\sigma > \|\mathrm{Re}\,a\| + \mathrm{Re}\,\beta)$
76	$e^{\beta t}\mathrm{ch}\,at$	$\frac{s-\beta}{(s-\beta)^2-a^2}$ $(\sigma > \|\mathrm{Re}\,a\| + \mathrm{Re}\,\beta)$
77	$\mathrm{sh}\,a\sqrt{t}$	$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}e^{a^2/4s}$
78	$\mathrm{ch}\,a\sqrt{t}$	$\frac{1}{s}+\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}e^{a^2/4s}\mathrm{erf}(a/2\sqrt{s})$
79	$\frac{\mathrm{sh}\,a\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{a^2/4s}\mathrm{erf}(a/2\sqrt{s})$
80	$\frac{\mathrm{ch}\,a\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{a^2/4s}$

	$f(t)$	$L(s)$
81	$\ln t$	$-\frac{1}{s}(\ln s+\gamma)$　　γ 是欧拉常数 $\gamma \approx 0.57721\cdots$
82	$t^{\nu-1}\ln t$　　$(\mathrm{Re}\,\nu > 0)$	$\frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}\left[\frac{\Gamma'(\nu)}{\Gamma(\nu)}-\ln s\right]$
83	$\ln(t^2+1)$	$\frac{2}{s}[\mathrm{Ci}(s)\cos s-\mathrm{si}(s)\sin s]$
84	$\ln t\sin at$	$\frac{1}{s^2+a^2}\left[s\,\mathrm{arctg}\frac{a}{s}-\frac{a}{2}\ln(s^2+a^2)-a\gamma\right]$　$(a \geqslant \lvert\mathrm{Im}\,a\rvert)$
85	$\frac{\ln t\sin at}{t}$	$-\mathrm{arctg}\frac{a}{s}\left[\frac{1}{2}\ln(s^2+a^2)+\gamma\right]$　$(a \geqslant \lvert\mathrm{Im}\,a\rvert)$
86	$\mathrm{erf}(at)$　　$(a>0)$	$\frac{1}{s}e^{s^2/4a^2}\mathrm{erfc}(s/2a)$
87	$\mathrm{erf}(a\sqrt{t})$　　$(a>0)$	$a/(s\sqrt{a^2+s})$
88	$\mathrm{erf}(a/\sqrt{t})$　　$(a>0)$	$\frac{1}{s}(1-e^{-2a\sqrt{s}})$
89	$\mathrm{erfc}(a/\sqrt{t})$　　$(a>0)$	$\frac{1}{s}e^{-2a\sqrt{s}}$
90	$1-\mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{a}{4t}}\right)$　　$(a>0)$	$e^{-\sqrt{as}}/\sqrt{s}$

续表

	$f(t)$	$L(s)$
91	$\dfrac{e^{at}\mathrm{erf}(\sqrt{at})}{\sqrt{a}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$
92	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} - ae^{a^2t}\mathrm{erfc}(a\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}+a}$
93	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} + ae^{a^2t}\mathrm{erf}(a\sqrt{t})$	$\dfrac{\sqrt{s}}{s-a^2}$
94	$e^{a^2t}\mathrm{erfc}(a\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+a)}$
95	$\mathrm{J}_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
96	$\mathrm{J}_\nu(at)$ $(\mathrm{Re}\nu > -1)$	$\dfrac{a^\nu}{\sqrt{s^2+a^2}(s+\sqrt{s^2+a^2})^\nu}$ $(\sigma \geqslant \lvert \mathrm{Im}a \rvert)$
97	$\dfrac{\mathrm{J}_\nu(at)}{t}$ $(\mathrm{Re}\nu > 0)$	$\dfrac{a^\nu}{\nu(s+\sqrt{s^2+a^2})^\nu}$ $(\sigma \geqslant \lvert \mathrm{Im}a \rvert)$
98	$\mathrm{J}_\nu(a\sqrt{t})$ $(\mathrm{Re}\nu > -2)$	$\dfrac{a\sqrt{\pi}}{4\sqrt{s^3}}e^{-a^2/8s}\left[\mathrm{I}_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{a^2}{8s}\right) - \mathrm{I}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(\dfrac{a^2}{8s}\right)\right]$
99	$t^{\frac{\nu}{2}}\mathrm{J}_\nu(a\sqrt{t})$ $(\mathrm{Re}\nu > -1)$	$\left(\dfrac{a}{2}\right)^\nu \dfrac{1}{s^{\nu+1}}e^{-a^2/4s}$
100	$\mathrm{I}_0(at)$	$1/\sqrt{s^2-a^2}$

	$f(t)$	$L(s)$
101	$\mathrm{I}_\nu(at)$ $(\mathrm{Re}\,\nu > -1)$	$\frac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^\nu}{a^\nu\sqrt{s^2-a^2}}$ $(\sigma > \lvert\mathrm{Re}\,a\rvert)$
102	$e^{-at}\mathrm{I}_\nu(at)$ $(\mathrm{Re}\,\nu > -1)$	$\frac{(2a)^\nu(\sqrt{s+2a}+\sqrt{s})^{-2\nu}}{\sqrt{s}\sqrt{s+2a}}$
103	$a^n\mathrm{J}_n(at)$ $(n > -1)$	$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}$
104	$a^n\mathrm{I}_n(at)$ $(n > -1)$	$\frac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^n}{\sqrt{s^2-a^2}}$
105	$t^n\mathrm{J}_n(at)$ $(n > -\frac{1}{2})$	$\frac{(2a)^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}(s^2+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}$
106	$\frac{e^{-at}}{t}\mathrm{I}_1(at)$	$\frac{\sqrt{s+2a}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+2a}+\sqrt{s}}$
107	$\mathrm{J}_0(a\sqrt{t(t-2b)})$	$\frac{\exp(b(s-\sqrt{s^2+a^2}))}{\sqrt{s^2+a^2}}$
108	$\mathrm{L}^n(t)$ $(n=0,1,2,\cdots)$	$\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n$
109	$\mathrm{Si}(at)$	$\frac{1}{s}\mathrm{arctg}\frac{s}{a}$
110	$\mathrm{Ci}(at)$	$-\frac{1}{2s}\ln\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)$
111	$\mathrm{Ei}(-at)$ $(a>0)$	$-\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{s}{a}\right)$

表 10.5　拉普拉斯变换表 Ⅱ（本表可供从变象查找原象）

$$L(s)=\mathscr{L}[f(t);s]=\int_0^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\quad(\mathrm{Re}\,s=\sigma\geqslant 0)$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[L(s);t]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}L(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s\quad(t\geqslant 0,\sigma\geqslant 0)$$

	$L(s)$	$f(t)$
1	$\frac{1}{s^n}$　$(n=1,2,\cdots)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
2	$\frac{1}{(s+a)^n}$　$(n=1,2,\cdots)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\mathrm{e}^{-at}$
3	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$　$(a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}(\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{bt})$
4	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$　$(a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}(a\mathrm{e}^{at}-b\mathrm{e}^{bt})$
5	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$　$a\neq b\neq c$	$\frac{(b-c)\mathrm{e}^{at}+(c-a)\mathrm{e}^{bt}+(a-b)\mathrm{e}^{ct}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$
6	$\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}$　$a\neq b\neq c$	$\frac{a(b-c)\mathrm{e}^{at}+b(c-a)\mathrm{e}^{bt}+c(a-b)\mathrm{e}^{ct}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$
7	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}$　$a\neq b\neq c$	$\frac{a^2(b-c)\mathrm{e}^{at}+b^2(c-a)\mathrm{e}^{bt}+c^2(a-b)\mathrm{e}^{ct}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$
8	$\frac{1}{(s-a)(s-b)^2}$　$a\neq b$	$\frac{\mathrm{e}^{at}-[1+(a-b)t]\mathrm{e}^{bt}}{(a-b)^2}$

续表

	$L(s)$	$f(t)$
9	$\frac{s}{(s-a)(s-b)^2}$ $a\neq b$	$\frac{ae^{at}-[a+b(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
10	$\frac{s^2}{(s-a)(s-b)^2}$ $a\neq b$	$\frac{2-[2ab-b^2+b^2(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
11	$\frac{ab}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ $a^2\neq b^2$	$\frac{a\sin bt-b\sin at}{a^2-b^2}$
12	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ $a^2\neq b^2$	$\frac{\cos bt-\cos at}{a^2-b^2}$
13	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ $a^2\neq b^2$	$\frac{a\sin at-b\sin bt}{a^2-b^2}$
14	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ $a^2\neq b^2$	$\frac{a^2\cos at-b^2\cos bt}{a^2-b^2}$
15	$\frac{ab}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$ $a^2\neq b^2$	$\frac{b\,\mathrm{sh}\,at-a\,\mathrm{sh}\,bt}{a^2-b^2}$
16	$\frac{s}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$ $a^2\neq b^2$	$\frac{\mathrm{ch}\,at-\mathrm{ch}\,bt}{a^2-b^2}$
17	$\frac{s^2}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$ $a^2\neq b^2$	$\frac{a\,\mathrm{sh}\,at-b\,\mathrm{sh}\,bt}{a^2-b^2}$
18	$\frac{s^3}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$ $a^2\neq b^2$	$\frac{a^2\mathrm{ch}\,at-b^2\mathrm{ch}\,bt}{a^2-b^2}$

续表

	$L(s)$	$f(t)$
19	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$	$\frac{\sin bt - bt\cos bt}{2b^3}$
20	$\frac{s^2}{(s^2+b^2)^2}$	$\frac{\sin bt - bt\cos bt}{2b}$
21	$\frac{s^3}{(s^2+b^2)^2}$	$\cos bt - \frac{1}{2}bt\sin bt$
22	$\frac{b^2}{(s^2-b^2)^2}$	$\frac{bt\,\text{ch}\,bt - \text{sh}\,bt}{2b}$
23	$\frac{s^2}{(s^2-b^2)^2}$	$\frac{bt\,\text{ch}\,bt + \text{sh}\,bt}{2b}$
24	$\frac{s^3}{(s^2-b^2)^2}$	$\text{ch}\,bt + \frac{1}{2}\text{sh}\,bt$
25	$\frac{1}{s^3+a^3}$	$\frac{1}{3a^2}\left[e^{-at} - e^{at/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}at}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}\right)\right]$
26	$\frac{s}{s^3+a^3}$	$\frac{1}{3a}\left[-e^{-at} + e^{at/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}at}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}\right)\right]$
27	$\frac{s^2}{s^3+a^3}$	$\frac{1}{3}\left[e^{-at} + 2e^{at/2}\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}\right]$

续表

	$L(s)$	$f(t)$
28	$\frac{1}{s^3-a^3}$	$\frac{1}{3a^2}\left[e^{at}-e^{-at/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}\right)\right]$
29	$\frac{s}{s^3-a^3}$	$\frac{1}{3a}\left[e^{at}-e^{-at/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}\right)\right]$
30	$\frac{s^2}{s^3-a^3}$	$\frac{1}{3}\left[e^{at}+2e^{-at/2}\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}\right]$
31	$\frac{1}{s^4+a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}a^3}\left(\sin\frac{at}{\sqrt{2}}\mathrm{ch}\frac{at}{\sqrt{2}}-\cos\frac{at}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}\frac{at}{\sqrt{2}}\right)$
32	$\frac{s}{s^4+a^4}$	$\frac{1}{a^2}\sin\frac{at}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}\frac{at}{\sqrt{2}}$
33	$\frac{s^2}{s^4+a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}a}\left(\sin\frac{at}{\sqrt{2}}\mathrm{ch}\frac{at}{\sqrt{2}}+\cos\frac{at}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}\frac{at}{\sqrt{2}}\right)$
34	$\frac{s^3}{s^4+a^4}$	$\cos\frac{at}{\sqrt{2}}\mathrm{ch}\frac{at}{\sqrt{2}}$
35	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(\mathrm{sh}at-\sin at)$
36	$\frac{s}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2}(\mathrm{ch}at-\cos at)$

续表

	$L(s)$	$f(t)$
37	$\dfrac{s^2}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\operatorname{sh}at+\sin at)$
38	$\dfrac{s^3}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}at+\cos at)$
39	$\dfrac{\lambda s^3+\mu s^2+\nu s+\rho}{(s^2+a^2)^2}$	$\lambda\cos at+\dfrac{\rho+a^2\mu}{2a^3}\sin at$ $+\dfrac{\nu+a^2\lambda}{2a}\times t\sin at-\dfrac{\rho-a^2\mu}{2a^2}t\cos at$
40	$\dfrac{\sqrt{s}}{s-a^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}+ae^{a^2t}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$
41	$\dfrac{8a^3s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$(1+a^2t^2)\sin at-at\cos at$
42	$\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{s-1}{s}\right)^n$ $(n=0,1,2,\cdots)$	$\dfrac{e^t}{n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t})$
43	$\dfrac{1-e^{-as}}{s}$	$\begin{cases}1 & 0<t<a\\ 0 & t>a\end{cases}$
44	$\dfrac{s}{(s-b)^{3/2}}$	$\dfrac{e^{bt}}{\sqrt{\pi t}}(1+2bt)$
45	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{2t\sqrt{\pi t}}$
46	$\dfrac{1}{\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}}$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{2(b-a)t\sqrt{\pi t}}$
47	$\dfrac{1}{s^{n+1/2}}$ $(n=0,1,2,\cdots)$	$\dfrac{4^nn!}{\sqrt{\pi}(2n)!}t^{n-1/2}$

续表

	$L(s)$	$f(t)$
48	$\frac{1}{(s+a)^{n+\frac{1}{2}}}$ $(n=0,1,2,\cdots)$	$\frac{4^n n!}{\sqrt{\pi}(2n)!}t^{n-\frac{1}{2}}e^{-at}$
49	$\frac{e^{-b/s}}{\sqrt{s}}$	$\frac{\cos(2\sqrt{bt})}{\sqrt{\pi t}}$
50	$\frac{e^{b/s}}{\sqrt{s}}$	$\frac{\operatorname{ch}(2\sqrt{bt})}{\sqrt{\pi t}}$
51	$\frac{e^{-b/s}}{s\sqrt{s}}$	$\frac{\sin(2\sqrt{bt})}{\sqrt{\pi b}}$
52	$\frac{e^{b/s}}{s\sqrt{s}}$	$\frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{bt})}{\sqrt{\pi b}}$
53	$\frac{1}{\sqrt{s^3}}e^{-k\sqrt{s}}$ $(k>0)$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-k^2/4t}-k\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
54	$\frac{ae^{-k\sqrt{s}}}{s(a+\sqrt{s})}$ $(k>0)$	$-e^{ak}e^{a^2t}\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t}+\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)+\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$
55	$\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(a+\sqrt{s})}$ $(k>0)$	$e^{ak}e^{a^2t}\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{t}+\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$ $(0<t<k)$
56	$\frac{b^2-a^2}{(s-a^2)(b+\sqrt{s})}$	$e^{a^2t}[b-a\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})]-be^{b^2t}\times\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$
57	$\frac{1}{(s+a)\sqrt{s+b}}$	$\frac{1}{\sqrt{b-a}}e^{-at}\operatorname{erf}(\sqrt{b-a}\sqrt{t})$

	$L(s)$	$f(t)$
58	$\dfrac{\sqrt{s}}{(s-a^2)(\sqrt{s}+b)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}[b^2e^{b^2t}\mathrm{erfc}(b\sqrt{t})$ $+abe^{a^2t}\mathrm{erfc}(a\sqrt{t})-a^2e^{a^2t}]$
59	$\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-a^2)(\sqrt{s}+b)}$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\left[\dfrac{b}{a}e^{a^2t}\mathrm{erf}(a\sqrt{t})-e^{a^2t}\right.$ $\left.+e^{b^2t}\mathrm{erfc}(b\sqrt{t})\right]$
60	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^\nu}$ $(\mathrm{Re}\nu>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{\nu-1/2}\mathrm{J}_{\nu-\frac{1}{2}}(at)$
61	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^\nu}$ $(\mathrm{Re}\nu>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{\nu-1/2}\mathrm{I}_{\nu-\frac{1}{2}}(at)$
62	$\dfrac{1}{s^\nu}e^{k/s}$ $(\mathrm{Re}\nu>0)$	$\left(\dfrac{t}{k}\right)^{(\nu-1)/2}\mathrm{I}_{\nu-1}(2\sqrt{kt})$
63	$\dfrac{1}{s^\nu}\ln s$ $(\mathrm{Re}\nu>0)$	$t^{\nu-1}\left\{\dfrac{\Gamma'(\nu)}{(\Gamma(\nu))^2}-\dfrac{\ln t}{\Gamma(\nu)}\right\}$
64	$\dfrac{\ln s}{s-a}$ $(a>0)$	$e^{at}[\ln a-\mathrm{Ei}(-at)]$
65	$\dfrac{\ln s}{s^2+a^2}$ $(a>0)$	$\dfrac{1}{a}\cos at\,\mathrm{Si}(at)+\dfrac{1}{a}\sin at[\ln a-\mathrm{Ci}(at)]$
66	$\dfrac{s\ln s}{s^2+1}$	$-\sin t\,\mathrm{Si}(t)-\cos t\,\mathrm{Ci}(t)$

续表

	$L(s)$	$f(t)$
67	$\ln\frac{s-a}{s-b}$	$\frac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$
68	$\ln\frac{s+a}{s-a}$	$2\frac{\mathrm{sh}(at)}{t}$
69	$\ln\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}$	$2[\cos(bt)-\cos(at)]/t$
70	$\ln\frac{s^2-a^2}{s^2-b^2}$	$2[\mathrm{ch}(bt)-\mathrm{ch}(at)]/t$
71	$\frac{1}{s}\ln(s^2+a^2)$ $(a>0)$	$2\ln a-2\mathrm{Ci}(at)$
72	$\frac{1}{s^2}\ln(s^2+a^2)$ $(a>0)$	$\frac{2}{a}[at\ln a+\sin at-at\mathrm{Ci}(at)]$
73	$e^{-\sqrt{bs}}$ $(b>0)$	$\frac{\sqrt{b}}{2t\sqrt{\pi t}}e^{-b/4t}$
74	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{bs}}$ $(b>0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-b/4t}$
75	$\frac{1}{\sqrt{s}}\sin\left(\frac{b}{s}\right)$	$\frac{\mathrm{sh}\sqrt{2bt}\sin\sqrt{2bt}}{\sqrt{\pi t}}$
76	$\frac{1}{\sqrt{s}}\cos\left(\frac{b}{s}\right)$	$\frac{\mathrm{ch}\sqrt{2bt}\cos\sqrt{2bt}}{\sqrt{\pi t}}$
77	$\frac{1}{s\sqrt{2s}}\left(\cos\frac{b}{s}+\sin\frac{b}{s}\right)$	$\frac{\mathrm{ch}\sqrt{2bt}\sin\sqrt{2bt}}{\sqrt{\pi b}}$

	$L(s)$	$f(t)$
78	$\frac{1}{s\sqrt{2s}}\left(\cos\frac{b}{s}-\sin\frac{b}{s}\right)$	$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{2bt}\cos\sqrt{2bt}}{\sqrt{\pi b}}$
79	$\frac{1}{\sqrt{s}}\operatorname{sh}\left(\frac{b}{s}\right)$	$\frac{\operatorname{ch}(2\sqrt{bt})-\cos(2\sqrt{bt})}{2\sqrt{\pi t}}$
80	$\frac{1}{\sqrt{s}}\operatorname{ch}\left(\frac{b}{s}\right)$	$\frac{\operatorname{ch}(2\sqrt{bt})+\cos(2\sqrt{bt})}{2\sqrt{\pi t}}$
81	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\operatorname{sh}\left(\frac{b}{s}\right)$	$\frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{bt})-\sin(2\sqrt{bt})}{2\sqrt{\pi b}}$
82	$\frac{1}{s\sqrt{s}}\operatorname{ch}\left(\frac{b}{s}\right)$	$\frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{bt})+\sin(2\sqrt{bt})}{2\sqrt{\pi b}}$
83	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{a/s}K_0\left(\frac{b}{s}\right)$ $(a\geqslant b)$	$I_0((\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})\sqrt{t})$ $\times K_0((\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})\sqrt{t})$ $+I_0((\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})\sqrt{t})$ $\times K_0((\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})\sqrt{t})$
84	$K_\nu(s)$	$\begin{cases}\frac{(t+\sqrt{t^2-1})^\nu+(t-\sqrt{t^2-1})^\nu}{2\sqrt{t^2-1}} & t>1\\ 0 & t<1\end{cases}$
85	$\frac{K_\nu(s)}{s}$	$\begin{cases}\frac{(t+\sqrt{t^2-1})^\nu-(t-\sqrt{t^2-1})^\nu}{2\nu} & t>1\\ 0 & t<1\end{cases}$

10.5 梅林变换

梅林变换是一种积分变换,这种变换把指数函数 e^{-x} 变成超越函数 $\Gamma(s)$,同时把一大批函数变成由 Γ 函数所构成的一类函数. 初看起来它把简单的函数变成了复杂的函数,然而,由于人们对于 Γ 函数的特性已有深刻的了解并且这种变换的理论在函数空间 L^p 中与傅里叶变换理论很类似. 因此,梅林变换在理论和应用中有很大的价值,它在数理方程、特殊函数、分析数论以及模式识别中均有多种应用. 本手册在给出梅林变换的重要性质之后,将给出包含有 170 多个公式的梅林变换表供读者使用.

10.5.1 梅林变换及其反演公式

定义 10.5.1 函数 $f(\cdot)$ 的**梅林变换** $\mathscr{M}[f(\cdot);\cdot]$(简记作 $M(\cdot)$)如下:

$$\mathscr{M}[f(x);s]=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x,\quad f(\cdot)\in L(0,\infty)$$

$$s=\gamma+\mathrm{i}\sigma$$

梅林变换 $M(\cdot)$ 的反演公式 $\mathscr{M}^{-1}[M(\cdot);\cdot]$(简记为 $f(\cdot)$)如下:

$$\mathscr{M}^{-1}[M(s);x]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}M(s)x^{-s}\mathrm{d}s.$$

两函数 $f(\cdot)$,$M(\cdot)$ 称为**梅林变换对**,常记作:$f(x)\longleftrightarrow M(s)$.

有时在不会混淆的情况下,常将函数 $f(\cdot)$ 的梅林变换记为 $f^*(\cdot)$;其中 $f(\cdot)$ 称为**原象**,$f^*(\cdot)$ 称为**象**(**变象**).

由于梅林变换可由傅里叶变换通过换元的方法获得,关于梅林变换的存在性在理论研究中往往不单独论述. 近年来,在不同条

件下直接研究梅林变换的存在性亦得出不同的结果，分述如下.

定理 10.5.2(梅林变换的存在定理)　设 $f(\cdot)\in L(\varepsilon,E)$，$0<\varepsilon<E<\infty$，在区间 $(0,\varepsilon]$，$[E,\infty)$ 连续，并且

(1) $\forall x\in(0,\varepsilon)$：$|f(x)|\leqslant Ax^{-a}$，

(2) $\forall x\in(E,\infty)$：$|f(x)|\leqslant Ax^{-b}$.

其中 A,a,b 是常数且 $a<b$. 则在带状域 $a<\gamma<b(\mathrm{Re}\,s=\gamma)$ 中，$f(\cdot)$ 的梅林变换 $M(\cdot)$ 存在. 并且，对于 $\forall\delta>0$，$a+\delta\leqslant\mathrm{Re}\,s\leqslant b-\delta$，积分

$$M(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x$$

一致(均匀)收敛，从而在带状域 $a<\mathrm{Re}\,s<b$ 中 $M(\cdot)$ 是解析的.

定理 10.5.3(梅林变换的反演公式)　设 $f(\cdot)(\cdot)^{\gamma-1}\in L(0,\infty)$，在点 x 连续且在 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)(\varepsilon>0)$ 内逐段可微，则梅林变换的反演公式成立：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}M(s)x^{-s}\mathrm{d}s,\gamma=\mathrm{Re}\,s,x>0$$

若 x 是函数 $f(\cdot)$ 的第一类间断点，则上式左端变为：

$$[f(x+0)+f(x-0)]/2$$

上述两定理中的 $L(\mathbf{R})$ 可参看(10.3.14).

定理 10.5.4(梅林变换的存在定理)　设 $f^*(\cdot)\in L^1(-\infty,\infty)$，$s=\gamma+\mathrm{i}\sigma$ 且在点 σ 的某个邻域内是有界变差函数，若

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}f^*(s)x^{-s}\mathrm{d}s,$$

则 $f(\cdot)$ 的梅林变换存在：

$$[f^*(\gamma+\mathrm{i}(\sigma+0))+f^*(\gamma+\mathrm{i}(\sigma-0))]/2=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}\mathrm{d}s.$$

定理 10.5.5(梅林变换的反演)　设 $f(\cdot)(\cdot)^{\gamma-1}\in L^1(0,\infty)$ 在点 x 的某邻域中为有界变差函数，则梅林变换的反演公式

成立：

$$[f(x+0)+f(x-0)]/2=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds$$
$$(s=\gamma+i\sigma).$$

10.5.2 梅林变换的性质

梅林变换有下面的重要性质

定理 10.5.6(微分定理) 设 $\mathscr{M}[f(\cdot);\cdot]=f^*(\cdot)$，$(\alpha<\mathrm{Im}s<\beta)$且存在

$$\lim_{x\to 0} x^{s-k-1}f^{(k)}(x)=0 \quad (k=0,1,\cdots,n-1),$$

则

$$\mathscr{M}[f^{(n)}(x);s]=(-1)^n\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}f^*(s-n) \quad (n=1,2,\cdots).$$

定理 10.5.7(乘幂定理) 设 $\mathscr{M}[f(\cdot);\cdot]=f^*(\cdot)$ $(\alpha<\mathrm{Im}s<\beta)$，则$\forall\ \mu\in\mathbf{R}$ 有

$$\mathscr{M}[x^\mu f(x);s]=f^*(s+\mu)$$

定理 10.5.8(梅林卷积定理) 若 $f_n(\cdot)(\cdot)^{\gamma-1}\in L(0,\infty)$，$n=1,2$，则卷积$(f_1*f_2)$存在，且对$\forall\ s\in\mathbf{C}$，$(\mathrm{Re}s=\gamma)(\cdot)^{\gamma-1}(f_1*f_2)(\cdot)\in L^1(0,\infty)$有

$$(f_1*f_2)^*(s)=f_1^*(s)\cdot f_2^*(s).$$

其中 $f_1^*(\cdot)$，$f_2^*(\cdot)$，$(f_1*f_2)^*(\cdot)$分别是 $f_1(\cdot)$，$f_2(\cdot)$，$(f_1*f_2)(\cdot)$的梅林变换，而

$$(f_1*f_2)(x)=\int_0^\infty f_1(\tau)f_2\left(\frac{x}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}$$

称为 $f_1(\cdot)$、$f_2(\cdot)$的**梅林卷积**.

必须注意上述定理中对 $f_1(\cdot)$，$f_2(\cdot)$所给出的条件是充分的. 事实上，当积分 $f_1^*(\cdot)$，$f_2^*(\cdot)$之一是条件收敛或将积分理

解为柯西主值时，定理中的等式仍然成立.

关于梅林变换的其它性质，将在梅林变换的重要公式表(表10.6)中列出.

例 10.5.9 函数 $e^{-\tau}$，$(1+\tau)^{-\rho}$ 的梅林变换就是 Γ 函数与 B 函数：

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-\tau}\tau^{s-1}d\tau,\quad \mathrm{Re}s>0$$

$$B(s,\rho-s)=\int_0^{\infty}(1+\tau)^{-\rho}\tau^{s-1}d\tau.$$

10.5.3 梅林变换与傅里叶变换的关系

一个函数的梅林变换与它的傅里叶变换可以互相转化，只要通过适当的变量置换就可以完成.

设函数 $\varphi(\cdot)$ 的梅林变换记为 $\varphi^*(\cdot)$，即

$$\varphi^*(s)=\mathscr{M}[\varphi(\tau);s]=\int_0^{\infty}\varphi(\tau)\tau^{s-1}d\tau;$$

$$\varphi(\tau)=\mathscr{M}^{-1}[\varphi^*(s);\tau]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\varphi^*(s)\tau^{-s}ds$$

$$0<\tau<\infty,\mathrm{Re}s=\gamma$$

令 $f(t)=\sqrt{2\pi}\varphi(e^t)$，$e^t=\tau$，$x=-is$，$g(\ln\eta)=\varphi(\eta)$，则有

$$f^*(-is)=\mathscr{F}[f(t);-is]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(e^t)e^{st}dt$$

$$=\int_0^{\infty}\varphi(\tau)\tau^{s-1}d\tau=\varphi^*(s)\qquad(10.25)$$

(变象之间的互换)

$$(\varphi*\psi)(x)=\int_0^{\infty}\varphi(\tau)\psi\left(\frac{x}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}=\int_0^{\infty}\varphi(\tau)g\left(\ln\frac{x}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau}$$

$$=(f*g)(\ln x)\qquad(10.26)$$

(梅林卷积与傅里叶卷积间的互换)

10.5.4 梅林变换的重要公式表

表 10.6 梅林变换的重要公式表

$$M(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx$$

	$f(x)$	$M(s)$
1	$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M(s)x^{-s}ds$	$M(s)$
2	$\int_0^\infty f_1(t)f_2(\frac{x}{t})\frac{dt}{t}$	$M_1(s)\cdot M_2(s)$ （卷积定理）
3	$f_1(x)f_2(x)$	$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M_1(t)M_2(s-t)dt$
4	$f(ax)$ $a>0$	$a^{-s}M(s)$
5	$x^\alpha f(x)$	$M(s+\alpha)$ （乘幂定理）
6	$f(x^p)$ $p\neq 0$	$\frac{1}{\lvert p\rvert}M(s/p)$
7	$x^\nu f(ax^p)$ $(a,p>0)$	$p^{-1}a^{-(s+\nu)/p}M((s+\nu)/p)$
8	$x^\nu f(ax^{-p})$ $(a,p>0)$	$p^{-1}a^{(s+\nu)/p}M(-(s+\nu)/p)$
9	$f(x)\ln^n x$	$M^{(n)}(s)$
10	$f^{(n)}(x)$ 当$\lim\limits_{x\to 0}x^{s-k-1}f^{(k)}(x)=0$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$	$(-1)^n\Gamma\begin{bmatrix}s\\s-n\end{bmatrix}M(s-n)=$ $\Gamma\begin{bmatrix}n+1-s\\1-s\end{bmatrix}M(s-n)$ （微分定理）

续表

	$f(x)$	$M(s)$
11	$\left(x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f(x)$	$(-s)^n M(s)$
12	$\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\right)^n f(x)$	$(1-s)^n M(s)$
13	$\left(x^{1-\alpha}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f(x) \qquad (\alpha \neq 0)$	$(-\alpha)^n \Gamma\begin{bmatrix} s/\alpha \\ -n+s/\alpha \end{bmatrix} M(s-n\alpha)$
14	$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$	$-s^{-1}M(s+1)$
15	$\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t$	$s^{-1}M(s+1)$
16	$I_{0+}^\alpha f(x)$	$\Gamma\begin{bmatrix} 1-\alpha-s \\ 1-s \end{bmatrix} M(s+\alpha)$
17	$I_-^\alpha f(x)$	$\Gamma\begin{bmatrix} s \\ s+\alpha \end{bmatrix} M(s+\alpha)$
18	$\int_0^\infty e^{-xt} f(t)\mathrm{d}t$	$\Gamma(s)M(1-s) \qquad \mathrm{Re}\, s > 0$

注 (1) 表中第 10 栏中的记号

$$\Gamma\begin{bmatrix} n+1-s \\ 1-s \end{bmatrix} = \Gamma(n+1-s)/\Gamma(1-s),\text{余同}$$

(2) 表中第 16,17 栏中的记号 $I_{0+}^\alpha f(x)$, $I_-^\alpha f(x)$ 参见特殊函数表(附录 27,28).

10.5.5 梅林变换表

下面我们给出一张较为详尽的梅林变换表.

梅林变换

$$M(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} \mathrm{d}x,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma - \mathrm{i}\infty}^{\gamma + \mathrm{i}\infty} M(s) x^{-s} \mathrm{d}s.$$

表 10.7 常见函数表

	$f(x)$	$M(s)$
1	$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$	$\dfrac{a^s}{s}$ $\qquad \mathrm{Re}s > 0$
2	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ -1 & x > a \end{cases}$	$\dfrac{a^s}{s}$ $\qquad \mathrm{Re}s < 0$
3	$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^{\nu} & x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$	$\dfrac{a^s}{\nu + s}$ $\qquad \mathrm{Re}s > -\mathrm{Re}\nu$
4	$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{\nu} & x > a \end{cases}$	$-\dfrac{a^s}{\nu + s}$ $\qquad \mathrm{Re}s < -\mathrm{Re}\nu$
5	$\begin{cases} x & x < a \\ b - x & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{2a^{s+1} - b^{s+1}}{s+1} + \dfrac{b}{s}(b^s - a^s), & (s \neq 0, \mathrm{Re}s > -1) \\ 2a - b + b\ln\dfrac{b}{a} & s = 0 \end{cases}$
6	$\dfrac{1}{a + x}$ $\qquad a > 0$	$\pi a^{s-1} \csc \pi s$ $\qquad (0 < \mathrm{Re}s < 1)$
7	$\dfrac{1}{(a + x)^n}$ $\qquad n = 2, 3, \cdots$	$(-1)^{n+1} \dfrac{\pi(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{(n-1)!} a^{s-n}$ $\times \csc \pi s$ $\qquad (0 < \mathrm{Re}s < n)$

续表

	$f(x)$	$M(s)$
8	$\frac{1}{a-x}$ $\quad a>0$	$\pi a^{s-1}\mathrm{ctg}\pi s$ $\quad (0<\mathrm{Re}s<1)$ 积分在"主值"意义下存在
9	$\frac{1}{(a+x)(b-x)}$ $(\lvert\arg a\rvert<\pi, b>0)$	$\frac{\pi}{a+b}(a^{s-1}\csc\pi s+b^{s-1}\mathrm{ctg}\pi s)$ $(0<\mathrm{Re}s<2)$ 积分在"主值"意义下存在
10	$\frac{1}{(a-x)(b-x)}$ $(a>b>0)$	$\frac{\pi}{b-a}(a^{s-1}-b^{s-1})\mathrm{ctg}\pi s$ $(0<\mathrm{Re}s<2)$ 积分在"主值"意义下存在
11	$\frac{1}{(b+ax)^{\nu}}$ $\quad (\mathrm{Re}\,\nu>0)$	$\left(\frac{b}{a}\right)^{s}\frac{\mathrm{B}(s,\nu-s)}{b^{\nu}}$ $\quad (0<\mathrm{Re}\,s<\mathrm{Re}\,\nu)$
12	$\begin{cases}(a-x)^{\nu} & x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$ $(\mathrm{Re}\nu>-1)$	$a^{\nu+s}\mathrm{B}(\nu+1,s)$ $\quad (\mathrm{Re}s>0)$
13	$\begin{cases}0 & x<a\\ (x-a)^{\nu} & x>a\end{cases}$ $(\mathrm{Re}\nu>-1)$	$a^{\nu+s}\mathrm{B}(-\nu-s,\nu+1)$ $(\mathrm{Re}s<-\mathrm{Re}\nu)$
14	e^{-ax} $\quad (a>0)$	$\Gamma(s)/a^{s}$ $\quad (\mathrm{Re}s>0)$
15	$\begin{cases}\ln x & x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$	$\frac{a^{s}}{s}(\ln a-\frac{1}{s})$ $\quad (\mathrm{Re}s>0)$
16	$\begin{cases}0 & x<a\\ \ln\frac{x}{a} & x>a\end{cases}$	$\frac{a^{s}}{s^{2}}$ $\quad (\mathrm{Re}s<0)$

续表

	$f(x)$	$M(s)$
17	$\dfrac{\ln x}{x+a}$ $(a>0)$	$\pi a^{s-1}\csc\pi s(\ln a-\pi\operatorname{ctg}\pi s)$ $(0<\operatorname{Re}s<1)$
18	$\dfrac{\ln(1+x)}{x}$	$\dfrac{\pi\csc\pi s}{1-s}$ $(0<\operatorname{Re}s<1)$
19	$\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$	$\dfrac{\pi}{s}a^{s}\csc\pi s$ $(0<\operatorname{Re}s<1)$
20	$\ln(1+ax)$	$\dfrac{\pi}{sa^{s}}\csc\pi s$ $(-1<\operatorname{Re}s<0)$
21	$\ln\lvert 1-ax\rvert$	$\dfrac{\pi}{sa^{s}}\operatorname{ctg}\pi s$ $(-1<\operatorname{Re}s<0)$
22	$\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{b-x}\right\rvert$	$\dfrac{\pi}{s}\csc\pi s(a^{s}-b^{s}\cos\pi s)$ $(0<\operatorname{Re}s<1)$
23	$\sin ax$ $(a>0)$	$\dfrac{\Gamma(s)}{a^{s}}\sin\dfrac{\pi s}{2}$ $(-1<\operatorname{Re}s<1)$
24	$\cos ax$ $(a>0)$	$\dfrac{\Gamma(s)}{a^{s}}\cos\dfrac{\pi s}{2}$ $(0<\operatorname{Re}s<1)$
25	$\dfrac{\sin ax}{e^{bx}}$ $(\operatorname{Re}b>\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$	$\dfrac{\Gamma(s)}{(a^{2}+b^{2})^{s/2}}\sin\left(s\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\right)$ $(\operatorname{Re}s>-1)$
26	$\dfrac{\cos ax}{e^{bx}}$ $(\operatorname{Re}b>\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$	$\dfrac{\Gamma(s)}{(a^{2}+b^{2})^{s/2}}\cos\left(s\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\right)$
27	$\begin{cases}\sin(a\ln x) & x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$	$-\dfrac{a}{a^{2}+s^{2}}$ $(\operatorname{Re}s>\lvert\operatorname{Im}a\rvert)$

续表

	$f(x)$	$M(s)$
28	$\dfrac{\sin(a\ln x)}{e^x}$	$\lvert\Gamma(s+ia)\rvert\sin[\arg\Gamma(s+ia)]$ $(\mathrm{Re}\,s>\lvert\mathrm{Im}\,a\rvert)$
29	$\begin{cases}\cos(a\ln x) & x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$	$\dfrac{s}{a^2+s^2}$ $(\mathrm{Re}\,s>\lvert\mathrm{Im}\,a\rvert)$
30	$\dfrac{\cos(a\ln x)}{e^x}$	$\lvert\Gamma(s+ia)\rvert\cos[\arg\Gamma(s+ia)]$ $(\mathrm{Re}\,s>\lvert\mathrm{Im}\,a\rvert)$
31	$\begin{cases}\arcsin\dfrac{x}{a} & x<a\\ & x>a\end{cases}$	$\dfrac{\pi a^s}{2s}\left\{1-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}\frac{1+s}{2}\\ 1-\frac{s}{2}\end{matrix}\right]\right\}$ $(\mathrm{Re}\,s>-1)$
32	$\begin{cases}\arccos\dfrac{x}{a} & x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}\,a^s}{2s}\Gamma\left[\begin{matrix}\frac{1+s}{2}\\ 1+\frac{s}{2}\end{matrix}\right]$ $(\mathrm{Re}\,s>-1)$
33	$\mathrm{arctg}\,ax$	$\dfrac{\pi}{2sa^s}\sec\dfrac{\pi s}{2}$ $(-1<\mathrm{Re}\,s<0)$
34	$\mathrm{arcctg}\,ax$	$\dfrac{\pi}{2sa^s}\sec\dfrac{\pi s}{2}$ $(0<\mathrm{Re}\,s<1)$
35	$\dfrac{1}{e^x-1}$	$\Gamma(s)\zeta(s)$ $(s>1)$
36	$\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$	$\Gamma(s)L(s)$ $\left(L(s)=\dfrac{1}{1^s}-\dfrac{1}{3^s}+\dfrac{1}{5^s}-\cdots\right)$

表 10.8 代数函数

	$f(x)$	$M(s)$
1	$\dfrac{1}{(1-x)}$	$\pi\Gamma\begin{bmatrix} s, 1-s \\ s+1/2, 1/2-s \end{bmatrix}$ $(0<\mathrm{Re}s<1)$
2	$\dfrac{1}{(1+x^2)}$	$\dfrac{\pi}{2}\csc\left(\dfrac{1}{2}\pi s\right)$
3	$\mathrm{H}(1-x)x^{\nu}$	$\Gamma\begin{bmatrix} s+\nu \\ s+\nu+1 \end{bmatrix}$ $(\mathrm{Re}(s+\nu)>0)$
4	$(1-\sqrt[k]{x})_+^{\alpha-1}$	$\Gamma(\alpha)k^{1-\alpha}\Gamma_k\begin{bmatrix} ks \\ ks+\alpha \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}s>0,\quad \mathrm{Re}\alpha>0,\quad k=1,2,3,\cdots$
5	$(1+\sqrt[k]{x})^{-\rho}$	$\dfrac{k^{\rho}(2\pi)^{1-k}}{\Gamma(\rho)}\Gamma_k[ks,\rho-ks]$ $0<\mathrm{Re}s<\dfrac{1}{k}\mathrm{Re}\rho,\quad k=1,2,3,\cdots$
6	$\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$	$2\pi\Gamma\begin{bmatrix} s, s+1/2, -s+1/2, 1-s \\ s+1/4, s+3/4, 1/4-s, 3/4-s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}s<1/2$
7	$\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x}}$	$3\pi\Gamma_3\begin{bmatrix} 3s, 1-3s \\ 3s+1/2, 1/2-3s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}s<1/3$
8	$\lvert 1-x \rvert^{-\rho}$	$\dfrac{\pi}{\Gamma(\rho)\cos(\pi\rho/2)}\Gamma\begin{bmatrix} s, \rho-s \\ (1-\rho)/2+s, (1+\rho)/2-s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}s<\mathrm{Re}\rho<1$

	$f(x)$	$M(s)$
9	$\lvert 1-\sqrt{x}\rvert^{-\rho}$	$\dfrac{\pi 2^{\rho}}{\Gamma(\rho)\cos(\pi\rho/2)}\times\Gamma\begin{bmatrix} s, s+\frac{1}{2}, \frac{\rho}{2}-s, \frac{\rho+1}{2}-s, \\ s+\frac{1-\rho}{4}, s+\frac{3-\rho}{4}, \frac{1+\rho}{4}-s, \frac{3+\rho}{4}-s \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}\rho<1,\quad 0<\mathrm{Re}s<\frac{1}{2}\mathrm{Re}\rho$
10	$\dfrac{x^{\alpha}-1}{x-1}$	$\dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}\Gamma[s, s+\alpha, 1-s, 1-\alpha-s]$ $\lvert\mathrm{Re}\alpha\rvert<1$ $\max(0, -\mathrm{Re}\alpha)<\mathrm{Re}s<\min(1, 1-\mathrm{Re}\alpha)$
11	$\dfrac{x^{\alpha}-1}{\sqrt{x}-1}$	$\dfrac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi^{3}}\Gamma[s, s+1/2, s+\alpha, s+\alpha+1/2,$ $1/2-s, 1-s, 1/2-\alpha-s, 1-\alpha-s]$ $\lvert\mathrm{Re}\alpha\rvert<1/2,\quad 0<\mathrm{Re}s<1/2,$ $\mathrm{Re}\alpha<\mathrm{Re}s<\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\alpha$
12	$(1+\sqrt{1+x})^{\nu}$	$-\dfrac{\nu}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\begin{bmatrix} s, -\nu/2-s, (1-\nu)/2-s \\ 1-\nu-s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}s<-(\mathrm{Re}\nu)/2$
13	$\dfrac{(1+\sqrt{1+x})^{\nu}}{\sqrt{1+x}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\begin{bmatrix} s, (1-\nu)/2-s, 1-\nu/2-s \\ 1-\nu-s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}s<(1-\mathrm{Re}\nu)/2$

续表

	$f(x)$	$M(s)$
14	$(1+\sqrt{x})^{-a}$ $+\lvert 1-\sqrt{x}\rvert^{-a}$	$2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left[\begin{matrix}(1-a)/2\\ a/2\end{matrix}\right]$ $\cdot\Gamma\left[\begin{matrix}s,a/2-s\\ s+(1-a)/2,1/2-s\end{matrix}\right]$ $0<\mathrm{Re}s<(\mathrm{Re}a)/2<1/2$
15	$(x^2+2x\cos\pi\beta+1)^{-1}$	$-\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\Gamma\left[\begin{matrix}s,1-s\\ s\beta-\beta,1+\beta-s\beta\end{matrix}\right]$ $0<\mathrm{Re}s<2,\lvert\beta\rvert<1$

表 10-9 指数函数与三角函数

	$f(x)$	$M(s)$
1	$e^{-k\sqrt[k]{x}}$	$\sqrt{k}\,(2\pi)^{(1-k)/2}\Gamma_k[ks]$ $\mathrm{Re}s>0,\quad k=1,2,\cdots$
2	$\sin(2k\sqrt[2k]{x})$	$\sqrt{k\pi}\,\Gamma_k\left[\begin{matrix}ks+1/2\\ 1-ks\end{matrix}\right]$ $\lvert\mathrm{Re}s\rvert<1/(2k)$ $k=1,2,3,\cdots$
3	$\cos(2k\sqrt[2k]{x})$	$\sqrt{k\pi}\,\Gamma_k\left[\begin{matrix}ks\\ 1/2-ks\end{matrix}\right]$ $0<\mathrm{Re}s<1/(2k)$ $k=1,2,3,\cdots$
4	$\sin(2\sqrt{x}+\beta\pi)$	$\sqrt{\pi}\,\Gamma\left[\begin{matrix}s, & s+1/2\\ s+\beta, & 1-\beta-s\end{matrix}\right]$ $0<\mathrm{Re}s<1/2$

	$f(x)$	$M(s)$
5	$\sin^{2n-1}\sqrt{x}$	$4^{s-n+1}\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k-1}\frac{(2n-1)!}{k!(2n-k-1)!}$ $\times(2n-2k-1)^{-2s}\Gamma\begin{bmatrix}s+1/2\\1-s\end{bmatrix}$ $\lvert\mathrm{Re}s\rvert<1/2,\quad n=1,2,\cdots$
6	$\sin^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{x}}$	$4^{-s-n+1}\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k-1}\frac{(2n-1)!}{k!(2n-k-1)!}$ $\times(2n-2k-1)^{2s}\Gamma\begin{bmatrix}1/2-s\\s+1\end{bmatrix}$ $\lvert\mathrm{Re}s\rvert<1/2,\quad n=1,2,3,\cdots$
7	$\sin^{2n}\sqrt{x}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}(n-k)^{-2s}$ $\times\Gamma\begin{bmatrix}s\\1/2-s\end{bmatrix}$ $-1<\mathrm{Re}s<0,\quad n=1,2,\cdots$
8	$e^{-x\cos\pi\beta}\sin(x\sin\pi\beta)$	$\pi\Gamma\begin{bmatrix}s\\\beta s,1-\beta s\end{bmatrix}$ $\quad\lvert\beta\rvert<1/2$ $\mathrm{Re}s>-1$
9	$e^{-x\cos\pi\beta}\cos(x\sin\pi\beta)$	$\pi\Gamma\begin{bmatrix}s\\1/2-\beta s,1/2+\beta s\end{bmatrix}$ $\quad\lvert\beta\rvert<1/2$ $\mathrm{Re}s>0$
10	$e^{-\frac{\cos\pi\beta}{x}}\cos\left(\frac{\sin\pi\beta}{x}\right)$	$\pi\Gamma\begin{bmatrix}-s\\1/2+\beta s,1/2-\beta s\end{bmatrix},$ $\quad\lvert\beta\rvert<1/2$ $\mathrm{Re}s<0$
11	$e^{-2\sqrt{2}x^{-1/4}}$ $\times\cos(2\sqrt{2}x^{-1/4})$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\begin{bmatrix}-s,1/4-s,3/4-s\\1/2+s\end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}s<0$

表 10.10　对数函数及多项-对数函数

	$f(x)$	$M(s)$
1	$\ln x H(1-x)$	$\Gamma\begin{bmatrix} s, -s \\ 1+s, 1-s \end{bmatrix}$　　$\mathrm{Re}s>0$
2	$\ln(1+\sqrt[k]{x})$	$(2\pi)^{1-k}\Gamma_k[ks, -ks]$ $-\frac{1}{k}<\mathrm{Re}s<0$,　$k=1,2,3,\cdots$
3	$\ln(1+x^{-\frac{1}{k}})$	$(2\pi)^{1-k}\Gamma_k[ks, -ks]$, $0<\mathrm{Re}s<\frac{1}{k}$,　$k=1,2,3,\cdots$
4	$\frac{\ln x}{x-a}$	$a^{s-1}\Gamma[s, 1-s]$ $\times\left\{\Gamma[s, 1-s]-\frac{\pi\ln a}{\Gamma\left[s+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-s\right]}\right\}$ $a>0$,　$0<\mathrm{Re}s<1$
5	$\frac{\ln x}{(x+a)^2}$	$a^{s-2}\Gamma[s, 2-s]\left\{\ln a+\Gamma\begin{bmatrix} s-1 \\ s \end{bmatrix}\right.$ $\left.-\pi\Gamma\begin{bmatrix} s, 1-s \\ s+1/2, 1/2-s \end{bmatrix}\right\}$ $a>0$,　$0<\mathrm{Re}s<2$
6	$\frac{\ln^2 x}{x+1}$	$2\Gamma[s, s, s, 1-s, 1-s, 1-s]$ $-\pi^2\Gamma[s, 1-s]$ $0<\mathrm{Re}s<1$
7	$\ln(1+2x\times\cos\pi\beta+x^2)$	$-2\pi\Gamma\begin{bmatrix} s, -s \\ 1/2+\beta s, 1/2-\beta s \end{bmatrix}$ $-1<\mathrm{Re}s<0$, $\lvert\beta\rvert<1$
8	$\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$	$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\begin{bmatrix} s, s+1/2, -s \\ 1+s \end{bmatrix}$ $-1/2<\mathrm{Re}s<0$

续表

	$f(x)$	$M(s)$
9	$\mathrm{L}^n(\ \ x)$	$(\ s)^{1\ n}\Gamma[s,\ \ s]$ $\quad -1<\mathrm{Re}s<0$
10	$\lambda^n(\ \ \mathrm{i}\sqrt{x})$	$-\mathrm{i}(\ \ 2)\ ^n s\ \ ^n\Gamma[s+1/2,1/2\ \ s]$ $\quad 1/2<\mathrm{Re}s<0$
11	$\lambda^n(\ \ \mathrm{i}\sqrt[4]{x})$	$(-1)^{n+1}\pi^{\ 1}(4s)\ ^n\Gamma[s+1/4,s+3/4,1/4\ \ s,3/4\ \ s]$ $\quad -1/4<\mathrm{Re}s<0$
12	$\ln(1-x)$	$-\pi\Gamma\begin{bmatrix}s,-s\\ s+1/2,1/2-s\end{bmatrix}$ $\quad -1<\mathrm{Re}s<0$
13	$\ln(1\ \ \sqrt{x})$	$\pi\Gamma\begin{bmatrix}s,s+1/2,\ \ s,1/2\ \ s\\ s+1/4,s+3/4,1/4\ \ s,3/4\ \ s\end{bmatrix}$ $\quad 1/2<\mathrm{Re}s<0$

表 10.11 双曲函数及其反函数

	$f(x)$	$M(x)$
1	$\mathrm{sh}(\nu\,\mathrm{sh}^{\ 1}\sqrt{x})$	$\dfrac{\nu\cos\left(\dfrac{\pi\nu}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\begin{bmatrix}s+\dfrac{1}{2},\dfrac{\nu}{2}\ \ s,\ \ \dfrac{\nu}{2}\ \ s\\ 1\ \ s\end{bmatrix}$ $\quad 1/2<\mathrm{Re}\,s<\ \ \lvert\mathrm{Re}\,\nu\rvert/2$
2	$\dfrac{\mathrm{sh}(\nu\,\mathrm{sh}\ \ \sqrt{x})}{\sqrt{1+x}}$	$\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\Gamma\begin{bmatrix}s+\dfrac{1}{2},\dfrac{\nu+1}{2}-s,\dfrac{1\ \ \nu}{2}-s\\ 1\ \ s\end{bmatrix}$ $\quad -1/2<\mathrm{Re}s<(1\ \ \mathrm{Re}\nu)/2$

续表

	$f(x)$	$M(s)$
3	$\dfrac{\operatorname{ch}(\nu\operatorname{sh}^{-1}\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}}$	$\dfrac{\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\Gamma\begin{bmatrix} s, \frac{1+\nu}{2}-s, \frac{1-\nu}{2}-s \\ \frac{1}{2}-s \end{bmatrix}$ $0<\operatorname{Re}s<(1-\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert)/2$
4	$\operatorname{sh}[\nu\operatorname{th}^{-1}\sqrt{(1-x)_+}]$	$\dfrac{\nu\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\begin{bmatrix} s+\nu/2, s-\nu/2 \\ s+1, s+1/2 \end{bmatrix}$ $\operatorname{Re}s>\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert/2$
5	$\operatorname{sh}\left[\nu\operatorname{th}^{-1}\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right]\lvert 1-x\rvert^{\nu}$	$-\sqrt{\pi}\Gamma\begin{bmatrix} \nu+1/2 \\ -\nu \end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix} s+1/2, 1/2-\nu-s \\ 1+\nu+s, 1-s \end{bmatrix}$ $-1/2<\operatorname{Re}s<1/2-\operatorname{Re}\nu$ $\operatorname{Re}\nu>-1/2$
6	$\operatorname{ch}\left[\nu\operatorname{th}^{-1}\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right]\lvert 1-x\rvert^{\nu}$	$\sqrt{\pi}\Gamma\begin{bmatrix} \nu+1/2 \\ -\nu \end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix} s, -\nu-s \\ 1/2+\nu+s, 1/2-s \end{bmatrix}$ $0<\operatorname{Re}s<-\operatorname{Re}\nu$, $\operatorname{Re}\nu>-1/2$

表 10.12 反三角函数

	$f(x)$	$M(s)$
1	$H(1-x)\sin^{-1}(x^{2k})$	$\dfrac{\pi}{2}\Gamma\begin{bmatrix} s \\ s+1 \end{bmatrix}$ $+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{k}}\Gamma\begin{bmatrix} \Delta(k, sk+1/2), -s \\ \Delta(k, sk+1), 1-s \end{bmatrix}$ $\operatorname{Re}s>-(2k)^{-1}$, $k=1,2,3,\cdots$

续表

	$f(x)$	$M(s)$
2	$H(x-1)\sin^{-1} x^{(2k)^{-1}}$	$-\frac{\pi}{2}\Gamma\left[\begin{matrix} s \\ s+1 \end{matrix}\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\Gamma\left[\begin{matrix} s, \Delta(k,1/2-ks) \\ s+1, \Delta(k,1-ks) \end{matrix}\right]$ $\mathrm{Re}s<(2k)^{-1},\quad k=1,2,3,\cdots$
3	$H(1-x)\cos^{-1} x^{(2k)^{-1}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}\Gamma\left[\begin{matrix} \Delta(k,1/2+ks), -s \\ \Delta(k,1+ks), 1-s \end{matrix}\right]$ $\mathrm{Re}s>0,\quad k=1,2,3,\cdots$
4	$H(1-x)\cos^{-1} x^{-(2k)^{-1}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}\Gamma\left[\begin{matrix} \Delta(k,1/2-ks), s \\ \Delta(k,1-ks), 1+ks \end{matrix}\right]$ $\mathrm{Re}s<0,\quad k=1,2,3,\cdots$
5	$\mathrm{tg}^{-1} x^{(2k)^{-1}}$	$\frac{1}{2^k\pi^{k-1}} \times\Gamma\left[\begin{matrix} \Delta(k,1/2+ks), \Delta(k,1/2-ks), -s \\ 1-s \end{matrix}\right]$ $-(2k)^{-1}<\mathrm{Re}s<0,\quad k=1,2,3,\cdots$
6	$\mathrm{tg}^{-1} x^{-(2k)^{-1}}$	$-\frac{1}{2^k\pi^k} \times\Gamma\left[\begin{matrix} \Delta(k,1/2+ks), \Delta(k,1/2-ks), -s \\ 1-s \end{matrix}\right]$ $0<\mathrm{Re}s<(2k)^{-1},\quad k=1,2,3,\cdots$
7	$\sin(\nu\,\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{x})(1+x)^{\nu/2}$	$-\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)} \times\Gamma\left[\begin{matrix} s+1/2, -\nu/2-s, (1-\nu)/2-s \\ 1-s \end{matrix}\right]$ $1/2<\mathrm{Re}s<-\mathrm{Re}\nu/2$

续表

	$f(x)$	$M(s)$
8	$\cos(\nu\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x})(1+x)^{-\nu/2}$	$\dfrac{2^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)}\Gamma\begin{bmatrix} s, -\nu/2-s, (1-\nu)/2-s \\ 1/2-s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}s<-(\mathrm{Re}\nu)/2$

表 10.13　全椭圆积分

	$f(x)$	$M(s)$
1	$K(\sqrt{x})$	$\dfrac{\pi}{2}\Gamma\begin{bmatrix} s, 1/2-s \\ s+1/2, 1-s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}s<1/2$
2	$K(i\sqrt{x})$	$\dfrac{1}{2}\Gamma\begin{bmatrix} s, 1/2-s, 1/2-s \\ 1-s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}s<1/2$
3	$K(\sqrt{1-x})H(1-x)$	$\dfrac{\pi}{2}\Gamma\begin{bmatrix} s, s \\ s+1/2, s+1/2 \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}s>0$
4	$K\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)(x+1)^{-1/2}$	$\dfrac{1}{2}\Gamma\begin{bmatrix} s, s, 1/2-s \\ 1/2+s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}s<1/2$
5	$K\left(\dfrac{1\pm\sqrt{x}}{1\mp\sqrt{x}}\right)\dfrac{H(1-x)}{1\mp\sqrt{x}}$	$\dfrac{\pi}{4}\Gamma\begin{bmatrix} s, s \\ s+1/2, s+1/2 \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}s>0$
6	$E(\sqrt{1-x})H(1-x)$	$\dfrac{\pi}{2}\Gamma\begin{bmatrix} s, s+1 \\ s+1/2, s+3/2 \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}s>0$
7	$E\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\Gamma\begin{bmatrix} s, s+1, 1/2-s \\ s+1/2 \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}s<1/2$

表 10.14　指数积分、正弦积分、余弦积分、误差函数与互补误差函数、菲涅耳积分、不完全Γ函数及双曲柱函数

	$f(x)$	$M(s)$
1	$\mathrm{Ei}(-k\sqrt[k]{x})$	$(2\pi)^{(1-k)/2}k^{-1}\Gamma\left[\begin{matrix}\Delta(k,ks), -s\\ 1-s\end{matrix}\right]$ $\mathrm{Re}s>0,\quad k=1,2,3,\cdots$
2	$e^{x}\mathrm{Ei}(-x)$	$\Gamma[s, s, 1-s]$,　$0<\mathrm{Re}s<1$
3	$e^{-x}\overline{\mathrm{Ei}}(x)$	$-\pi\Gamma\left[\begin{matrix}s, s, 1-s\\ 1/2+s, 1/2-s\end{matrix}\right]$ $0<\mathrm{Re}s<1$
4	$\mathrm{Ei}(-2\sqrt{x})$ $\times\mathrm{Ei}(2\sqrt{x})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left[\begin{matrix}s, s, s, 1-s\\ s+1/2, 1/2-s\end{matrix}\right]$ $0<\mathrm{Re}s<1$
5	$\mathrm{Si}(2k\sqrt[2k]{x})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}\Gamma\left[\begin{matrix}s, \Delta(k, ks+1/2)\\ s+1, \Delta(k, 1-ks)\end{matrix}\right]$ $-(2k)^{-1}<\mathrm{Re}s<0,\quad k=1,2,3,\cdots$
6	$\mathrm{si}(x)$	$-s^{-1}\Gamma(s)\sin(s\pi/2)$
7	$\mathrm{si}(2k\sqrt[2k]{x})$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}\Gamma\left[\begin{matrix}s, \Delta(k, ks+1/2)\\ s+1, \Delta(k, 1-ks)\end{matrix}\right]$ $0<\mathrm{Re}s<1/k,\quad k=1,2,3,\cdots$
8	$\mathrm{Ci}(2k\sqrt[2k]{x})$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}\Gamma\left[\begin{matrix}\Delta(k, ks), -s\\ 1-s, \Delta(k, 1/2-ks)\end{matrix}\right]$ $0<\mathrm{Re}s<1/k,\quad k=1,2,3,\cdots$
9	$\mathrm{ci}(x)$	$-s^{-1}\Gamma(s)\cos(s\pi/2)$
10	$\mathrm{erf}(\sqrt{x})$	$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}s+1/2, -s\\ 1-s\end{matrix}\right]$ $-1/2<\mathrm{Re}s<0$

	$f(x)$	$M(s)$
11	$e^{-x}\mathrm{erf}(i\sqrt{x})$	$i\Gamma\begin{bmatrix}1/2+s,1/2-s\\1-s\end{bmatrix}$ $\qquad \mathrm{Re}s<1/2$
12	$\mathrm{erf}(i\sqrt{2}\sqrt[4]{x})$ $\times\mathrm{erfc}(\sqrt{2}\sqrt[4]{x})$	$\frac{i}{\pi\sqrt{2}}\Gamma\begin{bmatrix}1/4+s,1/2+s,3/4+s,1/2-s\\1+s,1-s\end{bmatrix}$ $\qquad 1/4<\mathrm{Re}s<1/2$
13	$S(2k\sqrt[2k]{x})$	$\frac{1}{2}\Gamma\begin{bmatrix}\Delta(k,ks+3/4),s\\s+1,\Delta(k,3/4-ks)\end{bmatrix}$ $\qquad 3/(4k)<\mathrm{Re}s<0,\quad k=1,2,3,\cdots$
14	$C(2k\sqrt[2k]{x})$	$\frac{1}{2}\Gamma\begin{bmatrix}s,\Delta(k,1/4+ks)\\s+1,\Delta(k,1/4-ks)\end{bmatrix}$ $\qquad 1/(4k)<\mathrm{Re}s<0,\quad k=1,2,3,\cdots$
15	$\gamma(a,k\sqrt[k]{x})$	$(2\pi)^{(1-k)/2}k^{a-1/2}\Gamma\begin{bmatrix}\Delta(k,ks+a),s\\1-s\end{bmatrix}$ $\qquad -\mathrm{Re}a/k<\mathrm{Re}s<0,\quad k=1,2,3,\cdots$
16	$\Gamma(a,k\sqrt[k]{x})$	$\frac{k^{a-1/2}}{(2\pi)^{(k-1)/2}}\Gamma\begin{bmatrix}\Delta(k,ks+a),s\\s+1\end{bmatrix}$ $\qquad \mathrm{Re}s>\max(-\mathrm{Re}a/k,0),\quad k=1,2,3,\cdots$
17	$\Gamma(a,\frac{1}{x})$	$-\Gamma\begin{bmatrix}s,a-s\\s+1\end{bmatrix}$ $\qquad \mathrm{Re}s<\min(0,\mathrm{Re}a)$
18	$e^{x}\Gamma(a,x)$	$[\Gamma(1-a)]^{-1}\Gamma[s,s+a,1-a-s]$ $\qquad \mathrm{Re}s>0,0<\mathrm{Re}(s+a)<1$
19	$e^{x/2}D_{\nu}(\sqrt{2x})$	$[2^{\nu/2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu)]^{-1}$ $\times\Gamma[s,s+1/2,-\nu/2-s]$ $\qquad 0<\mathrm{Re}s<-\mathrm{Re}\nu/2$
20	$e^{-x/2}D_{\nu}(\sqrt{2x})$	$2^{\nu/2}\Gamma\begin{bmatrix}s,s+1/2\\s+(1-\nu)/2\end{bmatrix}$ $\qquad \mathrm{Re}s>0$

表 10.15　贝塞尔函数及其相关函数

	$f(x)$	$M(s)$
1	${}_0F_1(c;-k^2\sqrt[k]{x})$	$k^{-s}\Gamma(c)\Gamma\begin{bmatrix}\Delta(k,ks)\\ \Delta(k,c-ks)\end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}\,s<1/(4k)+\mathrm{Re}\,c/(2k)$ $k=1,2,3,\cdots$
2	$J_\nu(2k\sqrt[2k]{x})$	$\Gamma\begin{bmatrix}\Delta(k,ks+\nu/2)\\ \Delta(k,\nu/2+1-ks)\end{bmatrix}$ $-\mathrm{Re}\,\nu/(2k)<\mathrm{Re}\,s<3/(4k)$ $k=1,2,3,\cdots$
3	$K_\nu(2k\sqrt[2k]{x})$	$\pi(2\pi)^{-k}\Gamma_k[ks+\nu/2,ks-\nu/2]$ $\mathrm{Re}\,s>\lvert\mathrm{Re}\,\nu\rvert/(2k)$ $k=1,2,3,\cdots$
4	$Y_\nu(2\sqrt{x})$	$\Gamma\begin{bmatrix}s+\nu/2,s-\nu/2\\ s-(\nu+1)/2,(3+\nu)/2-s\end{bmatrix}$ $\lvert\mathrm{Re}\,\nu\rvert/2<\mathrm{Re}\,s<3/4$
5	$H_\nu(2\sqrt{x})$	$\Gamma\begin{bmatrix}s+(1+\nu)/2,(1-\nu)/2-s\\ 1+\nu/2-s,1-\nu/2-s\end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}\,s<3/4,\quad -1/2<\mathrm{Re}(s+\nu/2)<1/2$
6	$s_{\mu,\nu}(2\sqrt{x})$	$2^{\mu-1}\Gamma[(\mu-\nu+1)/2,(\mu+\nu+1)/2]$ $\times\Gamma\begin{bmatrix}s+(\mu+1)/2,(1-\mu)/2-s\\ 1-\nu/2-s,1+\nu/2-s\end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}(s+\mu/2)<1/2,\quad \mathrm{Re}\,s<3/4$
7	$S_{\mu,\nu}(2\sqrt{x})$	$2^{\mu-1}(\Gamma[(1-\mu-\nu)/2,(1-\mu+\nu)/2])^{-1}$ $\times\Gamma[s+(1+\mu)/2,s+\nu/2,s-\nu/2,$ $(1-\mu)/2-s]$, $\mathrm{Re}\,s>\lvert\mathrm{Re}\,\nu\rvert/2,\quad \lvert\mathrm{Re}(s+\mu/2)\rvert<1/2$

	$f(x)$	$M(s)$
8	$E_\nu(2\sqrt{x})$	$\Gamma\begin{bmatrix} s, s+1/2, 1-s, 1/2-s \\ s+1-\nu/2, 1+\nu/2-s, 1-\nu/2-s, \nu/2-s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}\,s<1/2$
9	$E_\nu^\mu(2\sqrt{x})$	$2^\mu\Gamma\begin{bmatrix} s, s+1/2, \mu/2+1-s, (\mu+1)/2-s \\ s+1-\nu/2, 1+(\mu+\nu)/2-s, 1+(\mu-\nu)/2-s, \nu/2-s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}\,s<\min(3/4, (\mathrm{Re}\,\mu+1)/2)$
10	$\sin\sqrt{x}\,J_\nu(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\begin{bmatrix} s+(\nu+1)/2, 1/4-s, 3/4-s \\ (1+\nu)/2-s, 1-\nu/2-s, 1+\nu/2-s \end{bmatrix}$ $-(1+\mathrm{Re}\,\nu)/2<\mathrm{Re}\,s<1/4$
11	$\cos\sqrt{x}\,J_\nu(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\times\Gamma\begin{bmatrix} s+\nu/2, 1/4-s, 3/4-s \\ 1+\nu/2-s, (1-\nu)/2-s, (1+\nu)/2-s \end{bmatrix}$ $-\mathrm{Re}\,\nu/2<\mathrm{Re}\,s<1/4$
12	$[J_\nu(\sqrt{x})]^2$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\begin{bmatrix} s+\nu, 1/2-s \\ 1+\nu-s, 1-s \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}\,\nu<\mathrm{Re}\,s<1/2$
13	$J_\nu(\sqrt{x})J_{\nu+1}(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\begin{bmatrix} s+\nu+1/2, 1-s \\ 3/2-s, \nu+3/2-s \end{bmatrix}$ $-1/2-\mathrm{Re}\,\nu<\mathrm{Re}\,s<1$

续表

	$f(x)$	$M(s)$
14	$J_\nu(\sqrt{x})J_{-\nu}(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\begin{bmatrix} s, 1/2-s \\ 1+\nu-s, 1-\nu-s \end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}\,s<1/2$
15	$J_\nu(\sqrt{x})J_\mu(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\begin{bmatrix} s+(\mu+\nu)/2, 1/2-s, 1-s \\ 1+(\mu+\nu)/2-s, 1+(\nu-\mu)/2-s, 1-(\mu-\nu)/2-s \end{bmatrix}$ $-\mathrm{Re}(\mu+\nu)/2<\mathrm{Re}\,s<1/2$
16	$J_\nu(2\sqrt{x})$ $J_\nu(2\sqrt{x})$	$\frac{\sin\pi\nu}{2\pi^2}\Gamma\begin{bmatrix} s, s+1/2, s+\nu/2, 1-s, 1/2-s \\ 1+\nu/2-s \end{bmatrix}$ $\max(-\mathrm{Re}\,\nu/2, 0)<\mathrm{Re}\,s<1/2$
17	$J_\nu(2\sqrt{x})$ $-J_{-\nu}(2\sqrt{x})$	$2\sin(\pi\nu/2)\Gamma\begin{bmatrix} s+1/2, 1/2-s \\ 1-\nu/2-s, 1+\nu/2-s \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}\,s<1/2$
18	$\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})$ $-Y_\nu(2\sqrt{x})$	$\pi^{-2}\cos\nu\pi\,\Gamma[s+(\nu+1)/2, s+\nu/2, s-\nu/2, (1-\nu)/2-s]$ $\lvert\mathrm{Re}\,\nu\rvert/2<\mathrm{Re}\,s<(1-\mathrm{Re}\,\nu)/2$
19	$I_\nu(2\sqrt{x})$ $-\mathbf{L}_\nu(2\sqrt{x})$	$\frac{1}{\pi}\Gamma\begin{bmatrix} s+(\nu-1)/2, s+\nu/2, (1-\nu)/2-s \\ 1+\nu/2-s \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}\,\nu/2<\mathrm{Re}\,s<(1-\mathrm{Re}\,\nu)/2$

表 10.16 正交多项式

	$f(x)$	$M(s)$
1	$P_n(2x-1)H(x-1)$	$\Gamma\begin{bmatrix}-n-s,1+n-s\\1-s,1-s\end{bmatrix}$ $\operatorname{Re}s<-n,\quad n=0,1,2,\cdots$
2	$P_n(\sqrt{x})H(x-1)$	$\Gamma\begin{bmatrix}(1+n)/2-s,-n/2-s\\1-s,1/2-s\end{bmatrix}$ $\operatorname{Re}s<-n/2,\quad n=0,1,2,\cdots$
3	$P_n(\sqrt{1+x})Q_n(\sqrt{1+x})$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\begin{bmatrix}s,s,1/2-s,1+n-s\\s+n+1,1-s\end{bmatrix}$ $0<\operatorname{Re}s<1/2,\quad n=0,1,2,\cdots$
4	$T_n(\sqrt{x})(x-1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi}\,\Gamma\begin{bmatrix}(1+n)/2-s,(1-n)/2-s\\1/2-s,1-s\end{bmatrix}$ $\operatorname{Re}s<(1-n)/2,\quad n=0,1,2,\cdots$
5	$U_n(2x-1)(x-1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\begin{bmatrix}3/2+n-s,-1/2-n-s\\1-s,3/2-s\end{bmatrix}$ $\operatorname{Re}s<-1/2-n,\quad n=0,1,2,\cdots$
6	$H_n(\sqrt{x})e^{-x}$	$2^n\Gamma\begin{bmatrix}s,s+1/2\\s+(1-n)/2\end{bmatrix}$ $\operatorname{Re}s>0,\quad n=0,1,2,\cdots$
7	$L_n^\alpha(x)e^{-x}$	$\frac{1}{n}\Gamma\begin{bmatrix}s,1+n+\alpha-s\\1+\alpha-s\end{bmatrix}$ $\operatorname{Re}s>0,\quad n=0,1,2,\cdots$
8	$C_n^\lambda(2x-1)(x-1)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n\Gamma(\lambda+1/2)}{n!}$ $\times\Gamma\begin{bmatrix}1/2-n-\lambda-s,1/2+n+\lambda-s\\1-s,1/2+\lambda-s\end{bmatrix}$ $\operatorname{Re}s<1/2-n-\operatorname{Re}\lambda,\quad \operatorname{Re}\lambda>-1/2$ $n=0,1,2,\cdots$

续表

	$f(x)$	$M(s)$
9	$P_n^{(\alpha,\beta)}(2x-1)(1-x)_+^{\alpha}$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\Gamma\begin{bmatrix} s, s-\beta \\ s+\alpha+n+1, s-\beta-n \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}\,\alpha>-1,\quad \mathrm{Re}\,s>0,\quad n=0,1,2,\cdots$

表 10.17 勒让德函数

	$f(x)$	$M(s)$
1	$P_\nu^\mu(2x-1)(1-x)_+^{-\mu/2}$	$\Gamma\begin{bmatrix} s+\mu/2, s-\mu/2 \\ s+\nu+1-\mu/2, s-\nu-\mu/2 \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}\,\mu<1,\quad \mathrm{Re}\,s>\lvert\mathrm{Re}\,\mu\rvert/2$
2	$P_\nu^\mu\left(\frac{1-x}{1+x}\right)(1+x)^{\nu}$	$\frac{1}{\Gamma(-\nu,-\nu-\mu)}$ $\times\Gamma\begin{bmatrix} s-\mu/2, -\nu+\mu/2-s, -\nu-\mu/2-s \\ 1-\mu/2-s \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}\,\mu<\mathrm{Re}\,s<\min(\mathrm{Re}(\mu/2-\nu),$ $-\mathrm{Re}(\mu/2+\nu))$
3	$Q_\nu^\mu(1+2x)(1+x)^{-\mu/2}$	$\frac{e^{\pi\mu i}}{2}\Gamma\begin{bmatrix} s+\mu/2, s-\mu/2, \nu+1+\mu/2-s \\ s+\nu+1-\mu/2 \end{bmatrix}$ $\lvert\mathrm{Re}\,\mu\rvert/2<\mathrm{Re}\,s<1+\mathrm{Re}(\nu+\mu/2)$
4	$Q_\nu^\mu\left(\frac{1+x}{1-x}\right)(x-1)_+^{\nu}$	$\frac{e^{\pi\mu i}}{2}\Gamma[1+\nu+\mu, 1+\nu]$ $\times\Gamma\begin{bmatrix} \mu/2-\nu-s, -\mu/2-\nu-s \\ 1+\mu/2-s, 1-\mu/2-s \end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}\,\nu>-1,$ $\mathrm{Re}\,s<\min(\mathrm{Re}(\mu/2-\nu),\quad -\mathrm{Re}(\mu/2+\nu))$

表 10.18　惠特克(Whittaker)函数、超几何函数

	$f(x)$	$M(s)$
1	${}_1F_1(a;c;-x)$	$\Gamma\begin{bmatrix}c\\a\end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix}a-s,s\\c-s\end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}\,s<\mathrm{Re}\,a$ $c\neq 0,-1,-2,\cdots$
2	${}_1F_1\left(a;c;-\frac{1}{x}\right)$	$\Gamma\begin{bmatrix}c\\a\end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix}s+a,-s\\s+c\end{bmatrix}$ $-\mathrm{Re}\,a<\mathrm{Re}\,s<0,\quad c\neq 0,-1,-2,\cdots$
3	${}_1F_1(a;c;x)e^{-x}$	$\Gamma\begin{bmatrix}c\\c-a\end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix}s,c-a-s\\c-s\end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}\,s<\mathrm{Re}(c-a)$ $c\neq 0,-1,-2,\cdots$
4	$\Psi(a,c;x)$	$\frac{1}{\Gamma[a,1+a-c]}\Gamma[s,s+1-c,a-s]$ $\max(0,\mathrm{Re}\,c-1)<\mathrm{Re}\,s<\mathrm{Re}\,a$
5	$\Psi(a,c;x)e^{-x}$	$\Gamma\begin{bmatrix}s,s+1-c\\s+a+1-c\end{bmatrix}$ $\mathrm{Re}\,s>\max(0,\mathrm{Re}\,c-1)$
6	$M_{\kappa,\mu}(x)e^{-x/2}$	$\Gamma\begin{bmatrix}2\mu+1\\\kappa+\mu+1/2\end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix}s+\mu+1/2,\kappa-s\\\mu+1/2-s\end{bmatrix}$ $-1/2-\mathrm{Re}\,\mu<\mathrm{Re}\,s<\mathrm{Re}\,\kappa$, $2\mu\neq -1,-2,-3,\cdots$
7	$W_{\kappa,\mu}(x)e^{x/2}$	$\frac{1}{\Gamma[1/2-\mu-\kappa,1/2+\mu-\kappa]}$ $\times\Gamma[s+1/2-\mu,s+1/2+\mu,-\kappa-s]$ $-1/2+\lvert\mathrm{Re}\,\mu\rvert<\mathrm{Re}\,s<-\mathrm{Re}\,\kappa$
8	${}_1F_2(a;c,\gamma;-x)$	$\Gamma\begin{bmatrix}c,\gamma\\a\end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix}s,a-s\\c-s,\gamma-s\end{bmatrix}$ $0<\mathrm{Re}\,s<\min(\mathrm{Re}\,a,1/4+\mathrm{Re}(c+\gamma-a)/2)$, $c,\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots$

	$f(x)$	$M(s)$
9	$F(a,b;c;1-x)(1-x)^{c-1}$	$\Gamma(c)\Gamma\begin{bmatrix} s,s+c-a-b \\ s+c-a,s+c-b \end{bmatrix}$ $\text{Re}c>0,\text{Re}s>\min(0,\text{Re}(a+b-c))$
10	$F(a,b;c;-x)$	$\Gamma\begin{bmatrix} c \\ a,b \end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix} a-s,b-s,s \\ c-s \end{bmatrix}$ $c\neq 0,-1,-2,\cdots$ $0<\text{Re}s<\min(\text{Re}a,\text{Re}b)$
11	$F(a,b;c;1-x)$	$\Gamma\begin{bmatrix} c \\ a,b,c-a,c-b \end{bmatrix}\times\Gamma[s,s+c-a-b,a-s,b-s]$ $c\neq 0,-1,-2,\cdots$ $\max(\text{Re}(a+b-c),0)<\text{Re}s<\min(\text{Re}a,\text{Re}b)$
12	$\mathbf{H}_\nu^\mu(2\sqrt{x})$	$\Gamma\begin{bmatrix} s+(\nu+1)/2,(1-\nu)/2-s \\ 1-\nu/2-s,3/2+\nu-\mu(1+\nu)/2-\mu s \end{bmatrix}$ $\mu<1$, $-(\text{Re}\nu+1)/2<\text{Re}s<(1-\text{Re}\nu)/2$; $\mu=1$, $-(\text{Re}\nu+1)/2<\text{Re}s<\min(3/4,(1-\text{Re}\nu)/2)$
13	${}_pF_q(a_1,a_2,\cdots,a_p;b_1,b_2,\cdots,b_q;-x)$ $q=p,p+1$	$\Gamma\begin{bmatrix} b_1,\cdots,b_q \\ a_1,\cdots,a_p \end{bmatrix}\cdot\Gamma\begin{bmatrix} s,a_1-s,a_2-s,\cdots,a_p-s \\ b_1-s,b_2-s,\cdots,b_q-s \end{bmatrix}$
14	$G_{pq}^{mn}\left(x\,\middle\vert\,\begin{matrix} a_1,\cdots,a_p \\ b_1,\cdots,b_q \end{matrix}\right)$	$\Gamma\begin{bmatrix} s+b_1,\cdots,s+b_m,1-a_1-s,\cdots,1-a_n-s \\ s+a_{n+1},\cdots,s+a_p,1-b_{m+1}-s,\cdots,1-b_q-s \end{bmatrix}$ $-\min\limits_{1\le k\le m}\text{Re}b_k<\text{Re}s<1-\max\limits_{1\le j\le n}\text{Re}a_j$

10.6 汉开尔变换

10.6.1 汉开尔变换及其反演公式

定义 10.6.1 函数 $f(\cdot)$ 的 ν 阶汉开尔(Hankel)变换 $\mathscr{H}[f(\cdot);\cdot]$(简记作 $H(\cdot)$)如下:

$$\mathscr{H}[f(x);\eta]=\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{J}_{\nu}(\eta x)\mathrm{d}x.$$

ν 阶汉开尔变换的反演公式 $\mathscr{H}^{-1}[H(\cdot);\cdot]$(简记作 $f(\cdot)$)如下:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\eta H(\eta)\mathrm{J}_{\nu}(\eta x)\mathrm{d}\eta.$$

式中 $\mathrm{J}_{\nu}(\cdot)$ 是贝塞尔函数.

10.6.2 汉开尔变换表

表 10.19 汉开尔变换表

$$H(\eta)=\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{J}_{\nu}(\eta x)\mathrm{d}x,$$

式中 $\mathrm{J}_{\nu}(\cdot)$ 是 ν 阶贝塞尔函数.

	$f(x)$	ν	$H(\eta)$
1	$\begin{cases}1 & 0<x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$	$\nu=0$	$\frac{a}{\eta}\mathrm{J}_1(a\eta)$
2	$\begin{cases}x^{\nu} & 0<x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$	$\nu>-1$	$\frac{a^{\nu+1}}{\eta}\mathrm{J}_{\nu+1}(a\eta)$
3	$\begin{cases}a^2-x^2 & 0<x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$	$\nu=0$	$\frac{4a}{\eta^3}\mathrm{J}_1(a\eta)-\frac{2a^2}{\eta^2}\mathrm{J}_0(a\eta)$

续表

	$f(x)$	ν	$H(\eta)$
4	$x^{\mu-1}$	$\nu>-1$	$\frac{2^{\mu}}{\eta^{\mu+1}}\Gamma\begin{bmatrix}(1+\mu+\nu)/2\\(1-\mu+\nu)/2\end{bmatrix}$
5	$x^{\nu}e^{-px^2}$	$\nu>-1$	$\frac{\eta^{\nu}}{(2p)^{\nu+1}}e^{-\eta^2/4p}$
6	e^{-px}	$\nu=0$	$\frac{p}{\sqrt{(\eta^2+p^2)^3}}$
7	e^{-px}	$\nu=1$	$\frac{\eta}{\sqrt{(\eta^2+p^2)^3}}$
8	e^{-px}/x	$\nu=0$	$1/\sqrt{\eta^2+p^2}$
9	e^{-px}/x	$\nu=1$	$1/\eta-p/(\eta\sqrt{\eta^2+p^2})$
10	e^{-px}/x^2	$\nu=1$	$(\sqrt{\eta^2+p^2}-p)/\eta$
11	$a/(a^2+x^2)^{3/2}$	$\nu=0$	$e^{-a\eta}$
12	$\frac{\sin ax}{x}$	$\nu=0$	$\begin{cases}0 & \eta>a\\ 1/\sqrt{a^2-\eta^2} & 0<\eta<a\end{cases}$
13	$\frac{\sin ax}{x}$	$\nu=1$	$\begin{cases}a/(\eta\sqrt{\eta^2-a^2}) & \eta>a\\ 0 & \eta<a\end{cases}$
14	$\frac{\sin x}{x^2}$	$\nu=0$	$\begin{cases}\arcsin\frac{1}{\eta} & \eta>1\\ \frac{\pi}{2} & \eta<1\end{cases}$

10.6.3 汉开尔变换的推广

$J^\mu_{\nu,\lambda}$变换可以看成是汉开尔变换的推广，当然它不仅仅包含着汉开尔变换.

定义 10.6.2($J^\mu_{\nu,\lambda}$变换)　函数 $f(\cdot)$ 的 $J^\mu_{\nu,\lambda}$变换 $g(\cdot)$ 如下：

$$g(\eta)=\int_0^\infty \sqrt{\eta\tau}\,J^\mu_{\nu,\lambda}(\eta\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad \eta>0$$

其中

$$J^\mu_{\nu,\lambda}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2\lambda}\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k(z/2)^{2k}}{\Gamma[1+\lambda+k,1+\lambda+\nu+\mu k]},\quad \mu>0$$

$$J^1_{\nu,0}(z)=J_\nu(z);\quad J^1_{\nu,\lambda}(z)=\frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma[\lambda,\lambda+\nu]}s_{\alpha,\nu}(z),$$

$$\alpha=2\lambda+\nu-1$$

$$J^\mu_{\nu,0}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu J^\mu_\nu\left(\frac{z^2}{4}\right),$$

$$J^\mu_\nu(z)=\sum_{k=0}^\infty(-z)^k/(k!\Gamma(1+\nu+\mu k))$$

特别，当

(1) $\mu=1,\lambda=0$ 时，$J^\mu_{\nu,\lambda}$变换就是汉开尔变换.

(2) $\mu=1,\lambda=0,\nu=-1/2$,

$$J^1_{-\frac{1}{2},0}(z)=J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,$$

这时 $J^\mu_{\nu,\lambda}$变换就是傅里叶余弦变换.

(3) $\mu=1,\lambda=0,\nu=1/2$,

$$J^1_{\frac{1}{2},0}(z)=J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z.$$

这时 $J^\mu_{\nu,\lambda}$变换就是傅里叶正弦变换.

(4) $\mu=1$，$J^1_{\nu,\lambda}$变换就是洛默尔(Lommel)变换.

(5) $\lambda=0$，$J^\mu_{\nu,0}$变换就是麦特朗(Maitland)变换.

J_{λ}^{μ}变换的反演公式是：

$$f(r)=\int_0^\infty \sqrt{pr}\,\widetilde{\mathcal{X}}(pr)g(p)\mathrm{d}p \tag{10.27}$$

其中

$$\widetilde{\mathcal{X}}(q)=\frac{4}{q^2}\mathcal{X}_{\lambda}\left(\frac{q^2}{4}\right).$$

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\lambda}(z)=\;&\pi^{-1}\sin(\pi\lambda)z^{-\nu/2}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma(\nu+(1+\lambda)(1-\mu)\\&-k\mu)z^k/k!+(\pi\mu)^{-1}z^{d/\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma((1+\lambda)(1-1/\mu)\\&-(\nu+k)/\mu)\times\sin((\lambda+\nu-k+1)\pi/\mu)\\&\cdot(-\mu\sqrt{z})^k/k!,\end{aligned}$$

其中 $d=1+\lambda+\nu-\mu(\lambda+\nu/2)$.

10.7 斯蒂尔切斯变换及其反演公式

定义 10.7.1 有界变差函数 $\alpha(\cdot)$的斯蒂尔切斯(Stieltjes)变换$\mathscr{S}[\alpha(\cdot);\cdot]$(简记为$f(\cdot)$)如下：

$$\mathscr{S}[\alpha(t);s]=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{(s+t)^\rho},\qquad \rho>0 \tag{10.28}$$

斯蒂尔切斯变换的反演公式$\mathscr{S}^{-1}[f(\cdot);\cdot]$(简记为$\alpha(\cdot)$)如下：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\alpha(t+0)+\alpha(t-0)]-[\alpha(+0)+\alpha(-0)]/2\\&=\lim_{\eta\to0^+}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^t[f(-\sigma-\mathrm{i}\eta)-f(-\sigma+\mathrm{i}\eta)]\mathrm{d}\sigma,\quad t>0\end{aligned} \tag{10.29}$$

特别，当

$$\alpha(t)=\int_0^t\varphi(u)\mathrm{d}u$$

且 $\varphi(t\pm 0)$ 存在时，式(10.29)变为下式

$$\frac{[\varphi(t+0)+\varphi(t-0)]}{2}$$

$$=\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[f(-t-\mathrm{i}\eta)-f(-t+\mathrm{i}\eta)]. \quad (10.30)$$

10.8 魏尔斯特拉斯变换

10.8.1 魏尔斯特拉斯变换及其反演公式

定义 10.8.1 函数 $f(\cdot)$ 的魏尔斯特拉斯(Weierstrass)变换 $\mathscr{W}[f(\cdot);\cdot]$(简记为 $\varphi(\cdot)$)如下：

$$\mathscr{W}[f(y);x]=\int_{-\infty}^{\infty}k(x-y,1)f(y)\mathrm{d}y$$

其中 $k(x,t)=(4\pi t)^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/4t}$ $(0<t<\infty,-\infty<x<\infty)$.

魏尔斯特拉斯变换的反演公式 $\mathscr{W}^{-1}[\varphi(\cdot);\cdot]$(简记为 $f(\cdot)$)如下：

$$\frac{[f(x_0+0)+f(x_0-0)]}{2}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{(x_0-y)^2/4}\varphi(\mathrm{i}y)\mathrm{d}y$$

此式中要求 $\varphi(\cdot)$ 在点 x_0 的某个邻域中为有界变差函数，且满足：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2/4}|\varphi(x)|\mathrm{d}x<\infty$$

10.8.2 魏尔斯特拉斯变换表

表 10.20 魏尔斯特拉斯变换表

	$f(y)$	$\varphi(x)$
1	1	1
2	y	x

续表

	$f(y)$	$\varphi(x)$
3	y^2	x^2-2
4	y^n	$H_n(x/2)$
5	e^{ay}	e^{ax-a^2}
6	e^{y^2}	$5^{-1/2}e^{[illegible]}$
7	$e^{-y^2[illegible]}$	$5^{1/2}e^{-x^2[illegible]}$
8	$2\pi^{-1/2}e^{[illegible]}\frac{[illegible]}{1-y^2}$	$e^{[illegible]}e^{[illegible]}$

10.9　勒让德变换及其反演公式

定义 10.9.1　函数 $f(\cdot)$ 的勒让德(Legendre)变换 $\mathscr{L}[f(\cdot);\cdot]$(简记为 $G(\cdot)$)如下：

$$\mathscr{L}[f(x);n]=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\, n\in \mathbf{N}$$

勒让德变换的反演公式 $\mathscr{L}^{-1}[G(\cdot);\cdot]$(简记为 $f(\cdot)$)如下：

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)G(n)\mathrm{P}_n(x)$$

式中 $\mathrm{P}_n(x)$ 是勒让德多项式.

10.10　希尔伯特变换及其反演公式

定义 10.10.1　设 $f(\cdot)\in L^p(-\infty,\infty)$, $p>1$,它的希尔伯

特(Hilbert)变换 $\mathscr{H}[f(\cdot);\cdot]$(简记为 $h(\cdot)$)如下:

$$\mathscr{H}[f(x);x] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{[f(x+t) - f(x-t)]/t\}\mathrm{d}t.$$

其中 $h(\cdot)\in L^p(-\infty,\infty)$几乎处处有定义.

希尔伯特变换的反演公式 $\mathscr{H}^{-1}[h(\cdot);\cdot]$(简记为 $f(\cdot)$)如下:

$$\mathscr{H}^{-1}[h(x);x] = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{[h(x+t) - h(x-t)]/t\}\mathrm{d}t.$$

上式也几乎处处成立.

10.11 一般积分变换及其反演公式

在实际应用中的各种不同的积分变换,基本上都是傅里叶变换的推广,其中均有相应的卷积定理,因此统称为**卷积型变换**(convolution type transformations). 比如:拉普拉斯变换,梅林变换,汉开尔变换,迈耶尔(Meijer)变换,斯蒂尔切斯变换,希尔伯特变换,黎曼-刘维尔(Riemann-Liouville)变换,外尔(Weyl)变换,高斯变换,纳尔仑(Narain)变换皆是.

现代除卷积型变换以外,还有**指标型变换**(transformations with respect to an index),其中没有相应的卷积定理,譬如:康托洛维奇-列别捷夫(Kantorovich-Lebegev)变换,梅涅尔-福克斯(Mehler-Fox)变换,列别捷夫(Lebegev)变换,奥列夫斯基(Olevskii)变换,外姆普(Wimp)变换等.

下面我们简要的介绍指标型变换及其反演公式.

10.11.1 康托洛维奇-列别捷夫变换

定义 10.11.1 康托洛维奇-列别捷夫变换及其反演公式为

$$g(x) = 2\pi^{-2}x\sinh\pi x\int_0^\infty \mathrm{K}_{ix}(t)f(t)t^{-1}\mathrm{d}t,$$

$$f(x)=\int_0^\infty K_{it}(x)g(t)\mathrm{d}t.$$

10.11.2 梅涅尔-福克斯变换

定义 10.11.2 梅涅尔-福克斯(Mehler-Fox)变换及其反演公式为

$$g(x)=x\pi^{-1}\operatorname{sh}\pi x\Gamma[1/2-k+\mathrm{i}x,1/2-k-\mathrm{i}x]$$
$$\times\int_1^\infty \mathrm{P}^k_{-1/2+\mathrm{i}x}(t)f(t)\mathrm{d}t$$
$$f(x)=\int_0^\infty \mathrm{P}^k_{-1/2+\mathrm{i}t}(x)g(t)\mathrm{d}t$$

10.11.3 列别捷夫变换

定义 10.11.3 列别捷夫(Lebegev)变换及其反演公式为

$$g(x)=\int_0^\infty[\mathrm{I}_{\mathrm{i}x}(t)+\mathrm{I}_{-\mathrm{i}x}(t)]\mathrm{K}_{\mathrm{i}x}(t)f(t)\mathrm{d}t,$$
$$f(x)=-\frac{4}{\pi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\infty t\operatorname{sh}(\pi t)\mathrm{K}^2_{\mathrm{i}t}(x)g(t)\mathrm{d}t.$$

10.11.4 外姆普变换

定义 10.11.4 外姆普(Wimp)变换及其反演公式为

$$g(x)=\int_0^\infty \mathrm{G}^{m,n+2}_{p+2,q}\left(t\,\middle|\,\begin{matrix}1-\nu+\mathrm{i}x,1-\nu-\mathrm{i}x,\alpha_p\\ \beta_q\end{matrix}\right)f(t)\mathrm{d}t$$
$$f(x)=(\pi\mathrm{i})^{-1}\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\nu}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t}\Lambda(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}|\nu+\mathrm{i}t,\nu-\mathrm{i}t)$$
$$-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi t}\Lambda(x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}|\nu-\mathrm{i}t,\nu+\mathrm{i}t))g(t)\mathrm{d}t$$

其中:

$$\Lambda(z|\alpha,\beta)=\mathrm{G}^{q-m,p-n+1}_{p+2,q}$$
$$\times\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}-\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},\cdots,-\alpha_p,\alpha,-\alpha_1,\cdots,-\alpha_n,\beta\\ -\beta_{m+1},-\beta_{m+2},\cdots,-\beta_q,-\beta_1,-\beta_2,\cdots,-\beta_m\end{matrix}\right)$$

上式右端称为迈耶尔(Meijer)G 函数,常记作

$$G(z)=G_{p,q}^{m,n}(z)=G_{p,q}^{m,n}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\alpha_p\\ \beta_q\end{matrix}\right)=G_{p,q}^{m,n}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\alpha_1,\cdots,\alpha_p\\ \beta_1,\cdots,\beta_q\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\beta_j+s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-\alpha_j-s)}{\prod_{j=m+1}^{q}(1-\beta_j-s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(\alpha_j+s)}z^{-s}\mathrm{d}s$$

其中 $L=L_{-\infty}, L_{+\infty}, L_{i\infty}$.

参考文献

1. 数学手册编写组. 数学手册. 高等教育出版社,1979
2. 汪胡桢主编. 现代工程数学手册,第 1 卷. 华中工学院出版社,1985
3. Lepage W R. Complex Variables and Laplace Transformation for Engineers. Dover publications Inc,1980
4. Marichev O I. Handbook of Integral Transforms of Higer Transcendental Functions (Theory and Algorithmic Tables) (Translated by Longdon,L. W.)First edition in English. Ellis Horwood Limited, 1982
5. Tichmarsh F C. Introduction to the theory of Fourier Integrals, second edition. Oxford University Press, 1948

11 摄动方法

11.1 基本概念

11.1.1 引言

在实际问题中，有时会出现含有摄动量——无量纲的小参数 ε 的情况，通常称这类问题为**摄动问题**(perturbation problems). 最常见的是小参数 ε 含于方程或条件中的微分方程定解问题. 一个摄动问题 P_ε，实际上是依赖 ε 的一族问题，其中 $\varepsilon=0$ 时的问题 P_0 称为 P_ε 的退化问题.

P_ε 的解 $u(x,\varepsilon)$ 通常可以按小参数 ε 的幂展开为

$$u(x,\varepsilon)=u_0(x)+\sum_{n=1}^{N-1}\varepsilon^n u_n(x)+R_N(x,\varepsilon). \tag{11.1}$$

或者更一般地展开为

$$u(x,\varepsilon)=u_0(x)+\sum_{n=1}^{N-1}\varphi_n(\varepsilon)u_n(x)+R_N(x,\varepsilon). \tag{11.2}$$

其中，首项 $u_0(x)$ 是退化问题 P_0 的解. 这种展开式当 $n\to\infty$ 时未必是收敛的，但只要当 $\varepsilon\to0$ 时余项

$$R_N(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^N)\quad 或者\quad O(\varphi_N(\varepsilon)), \tag{11.3}$$

这种展开式就有可能比一致收敛且绝对收敛的展开式更为有用. 通常称之为**渐近展开式**，记作

$$u(x,\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n u_n(x)\quad 或者\quad \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\varepsilon)u_n(x), \tag{11.4}$$

当解的渐近展开式在 x 的整个区域 Ω 内一致有效时，称问题 P_ε 为**正则摄动问题**(regular perturbation problem)；否则，称 P_ε

是**奇异摄动问题**(singular perturbation problem). 奇异摄动问题并非摄动问题的特殊情形，而是摄动问题中常见的情形. 设法对奇异摄动问题形式地构造出一个一致有效的展开式，是摄动理论在实践中要解决的问题之一；摄动理论要解决的另一个问题是要进一步论证 $R_N(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^N)$ 在区域 Ω 内一致成立，并尽可能得到误差 $|R_N(x,\varepsilon)|$ 的估计式.

处理摄动问题的这种渐近展开的方法称为**摄动方法**(perturbation methods)，它是近似方法中的一种重要方法. 利用这种近似的解析解，不但能对问题作出定性分析，而且还能作出近似的定量分析，这是数值解无法做到的.

从 19 世纪末天文学家在研究行星轨道因其它天体的影响所造成的小扰动问题开始，摄动方法在实际应用和理论研究上都得到了迅速发展，特别是 20 世纪 50 年代以来发展更为迅速. 现在，摄动方法在天文、力学、物理，甚至化学、生物以及控制论中都在普遍而有效地使用着. 但至今摄动方法仍处于应用发展阶段，不少基本理论问题还不完善，有待研究.

以下是摄动理论中要用到的几个基本概念.

11.1.2 阶符

为表示函数 $f(\varepsilon)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时的大小和变速，常把它和所谓**标准函数**(gauge functions)$\varphi(\varepsilon)$ 相比较. 常用的标准函数有：

$$\cdots,\varepsilon^{-n},\cdots,\varepsilon^{-2},\varepsilon^{-1},1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^n,\cdots;$$

$$\log\varepsilon^{-1},\log(\log\varepsilon^{-1});e^{\varepsilon^{-1}},e^{-\varepsilon^{-1}};$$

$$\varepsilon\log\varepsilon,\varepsilon^2\log\varepsilon;\sin\varepsilon,\cos\varepsilon,\mathrm{tg}\varepsilon;$$

$$\mathrm{sh}\varepsilon,\mathrm{ch}\varepsilon,\mathrm{tg}\varepsilon;\cdots.$$

定义 11.1.1 阶符(order symbols)

(1) $f(\varepsilon)=O(\varphi(\varepsilon))$，$\varepsilon\to 0$ 表示：存在与 ε 无关的 $M>0$ 以及

$\varepsilon_0>0$,使

$$|f(\varepsilon)|\leqslant M|\varphi(\varepsilon)|,\text{当 } 0<|\varepsilon|<\varepsilon_0.$$

(2) $f(\varepsilon)=o(\varphi(\varepsilon)),\varepsilon\to 0$ 表示:对于任意与 ε 无关的 $\delta>0$,存在 $\varepsilon_0>0$,使

$$|f(\varepsilon)|<\delta|\varphi(\varepsilon)|,\text{当 } 0<|\varepsilon|<\varepsilon_0.$$

按定义,当 $\varphi(\varepsilon)\neq 0$ 时,$f(\varepsilon)=O(\varphi(\varepsilon)),\varepsilon\to 0$ 表示 $f(\varepsilon)/\varphi(\varepsilon)$ 在 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 有界;

$$f(\varepsilon)=o(\varphi(\varepsilon)),\varepsilon\to 0 \text{ 表示} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}=0.$$

特别是,$f(\varepsilon)=O(1),\varepsilon\to 0$ 表示 $f(\varepsilon)$ 在 $0<|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 有界;$f(\varepsilon)=o(1),\varepsilon\to 0$ 表示 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(\varepsilon)=0$.

若 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\dfrac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right|<+\infty$,则 $f(\varepsilon)=O(\varphi(\varepsilon)),\varepsilon\to 0$;

若 $f(\varepsilon)=o(\varphi(\varepsilon)),\varepsilon\to 0$,则 $f(\varepsilon)=O(\varphi(\varepsilon)),\varepsilon\to 0$.

如果 f,φ 不仅是 ε 的函数而且是 x 的函数,则 $f(x,\varepsilon)$ 与 $\varphi(x,\varepsilon)$ 有下列阶的关系式.

定义 11.1.2 阶符

(1) $f(x,\varepsilon)=O(\varphi(x,\varepsilon)),\varepsilon\to 0,x\in\Omega$ 表示:在任何点 $x\in\Omega$,存在与 ε 无关的 $M>0$ 以及 $\varepsilon_0>0$,使

$$|f(x,\varepsilon)|\leqslant M|\varphi(x,\varepsilon)|,\text{当 } 0<|\varepsilon|<\varepsilon_0.$$

若 M,ε_0 都与点 x 无关,则称 $f(x,\varepsilon)=O(\varphi(x,\varepsilon)),\varepsilon\to 0$ 关于 $x\in\Omega$ **一致**(uniformly)成立;否则称**非一致**成立.

(2) $f(x,\varepsilon)=o(\varphi(x,\varepsilon)),\varepsilon\to 0,x\in\Omega$ 表示:在任何点 $x\in\Omega$,对于任意与 ε 无关的 $\delta>0$,存在 $\varepsilon_0>0$,使

$$|f(x,\varepsilon)|<\delta|\varphi(x,\varepsilon)|,\text{当 } 0<|\varepsilon|<\varepsilon_0.$$

若 δ,ε_0 都与点 x 无关,则称 $f(x,\varepsilon)=o(\varphi(x,\varepsilon)),\varepsilon\to 0$ 关于 $x\in\Omega$ **一致**成立;否则称**非一致**成立.

性质 11.1.3 阶符的运算

(1) $O(O(\varphi))=O(\varphi)$, $o(o(\varphi))=o(\varphi)$,

$O(o(\varphi))=o(O(\varphi))=o(\varphi)$;

(2) $O(\varphi)+O(\varphi)=O(\varphi)$, $o(\varphi)+o(\varphi)=o(\varphi)$,

$O(\varphi)+o(\varphi)=O(\varphi)$;

(3) $O(\varphi_1)\cdot O(\varphi_2)=O(\varphi_1\varphi_2)$,

$o(\varphi_1)\cdot o(\varphi_2)=o(\varphi_1\varphi_2)$,

$O(\varphi_1)\cdot o(\varphi_2)=o(\varphi_1\varphi_2)$;

(4) 对于阶的关系式可以积分:

若 $f(\varepsilon)=O(\varphi(\varepsilon))$, $\varepsilon\to 0$, 则

$$\int_0^\varepsilon f(\tau)\mathrm{d}\tau = O\left(\int_a^\varepsilon |\varphi(\tau)|\mathrm{d}\tau\right),\quad \varepsilon\to 0$$

若 $f(x,\varepsilon)=O(g(x,\varepsilon))$, $\varepsilon\to 0$ 关于 $x\in[a,b]$ 一致成立,则

$$\int_a^b f(\tau,\varepsilon)\mathrm{d}\tau = O\left(\int_a^b |\varphi(\tau,\varepsilon)|\mathrm{d}\tau\right),\quad \varepsilon\to 0.$$

但应注意,一般对阶的关系式不可求导.

11.1.3 渐近展开

定义 11.1.4 若函数序列$\{\varphi_n(\varepsilon)\}$满足

$$\varphi_{n+1}(\varepsilon)=o(\varphi_n(\varepsilon)),\quad \varepsilon\to 0,\quad n=1,2,\cdots$$

则称$\{\varphi_n(\varepsilon)\}$为**渐近序列**(asymptotic sequence)(当 $\varepsilon\to 0$).

若上式对 n 一致成立,则称$\{\varphi_n(\varepsilon)\}$为**关于 n 一致的渐近序列**.

若函数序列为$\{\varphi_n(x,\varepsilon)\}$,且上式关于 x 一致成立,则称$\{\varphi_n(x,\varepsilon)\}$为**关于 x 一致的渐近序列**.

性质 11.1.5 渐近序列的性质

(1) 若$\{\varphi_n(\varepsilon)\}$是渐近序列(当 $\varepsilon\to 0$),则$\{|\varphi_n(\varepsilon)|^\alpha\}$($\alpha>0$)也是渐近序列(当 $\varepsilon\to 0$).

(2) 若$\{\varphi_n(\varepsilon)\}$是渐近序列(当 $\varepsilon\to0$),则$\{\psi_n(\varepsilon)\}=\left\{\int_0^\varepsilon|\varphi_n(\tau)|\mathrm{d}\tau\right\}$也是渐近序列(当 $\varepsilon\to0$).

(3) 若$\{\varphi_n(x,\varepsilon)\}$是关于 $x\in[a,b]$一致的渐近序列(当 $\varepsilon\to0$),则$\{\psi_n(\varepsilon)\}=\left\{\int_a^b|\varphi_n(\tau,\varepsilon)|\mathrm{d}\tau\right\}$也是渐近序列(当 $\varepsilon\to0$).

(4) 设$\{\varphi_n(\varepsilon)\}$与$\{\psi_n(\varepsilon)\}$是两个等价序列,就是说它们满足

$$\varphi_n(\varepsilon)=O(\psi_n(\varepsilon)),\quad \psi_n(\varepsilon)=O(\varphi_n(\varepsilon)),\quad \varepsilon\to0$$

若$\{\varphi_n(\varepsilon)\}$是渐近序列(当 $\varepsilon\to0$),则$\{\psi_n(\varepsilon)\}$也是渐近序列(当 $\varepsilon\to0$).

定义 11.1.6 设有函数 $f(\varepsilon)$与渐近序列$\{\varphi_n(\varepsilon)\}(\varepsilon\to0)$,若

$$f(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n\varphi_n(\varepsilon)+o(\varphi_{N-1}(\varepsilon)),\quad \varepsilon\to0,\tag{11.5}$$

即

$$\frac{f(\varepsilon)-\sum\limits_{n=0}^{N-1}a_n\varphi_n(\varepsilon)}{\varphi_{N-1}(\varepsilon)}\to0,\quad 当\ \varepsilon\to0,\tag{11.6}$$

则称 $\sum\limits_{n=0}^{N-1}a_n\varphi_n(\varepsilon)$ 为 $f(\varepsilon)$关于 $\varphi_n(\varepsilon)$的 **N 阶渐近展开**(asymptotic expansion)(当 $\varepsilon\to0$)或者 **N 次近似**,记作

$$f(\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{N-1}a_n\varphi_n(\varepsilon),\quad \varepsilon\to0.\tag{11.7}$$

若对所有正整数 N 上式都成立,则称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(\varepsilon)$ 为 $f(\varepsilon)$关于 $\varphi_n(\varepsilon)$的**完全的渐近展开**或者**渐近级数**(当 $\varepsilon\to0$),记作

$$f(\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(\varepsilon),\quad \varepsilon\to0.\tag{11.8}$$

特别是,当 $\varphi_n(\varepsilon)=\varepsilon^n$ 时,称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\varepsilon^n$ 为 $f(\varepsilon)$的**渐近幂级数**.

若给定渐近序列$\{\varphi_n(\varepsilon)\}$,则 $f(\varepsilon)$按$\{\varphi_n(\varepsilon)\}$的渐近展开式是唯

一确定的，其系数为

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{\varphi_0(\varepsilon)},\\ a_n&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)-\sum_{m=0}^{n}a_m\varphi_m(\varepsilon)}{\varphi_n(\varepsilon)},\quad n=1,2,\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{11.9}$$

注意 1 定义中的式(11.5)可以等价地改为

$$f(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n\varphi_n(\varepsilon)+O(\varphi_N(\varepsilon)),\ \varepsilon\to 0.\tag{11.10}$$

注意 2 “渐近”(当 $\varepsilon\to 0$)与“收敛”(当 $N\to\infty$)是彼此无关的两个概念. 一个函数的渐近级数有可能收敛：$f(\varepsilon)-\sum_{n=0}^{N-1}a_n\varphi_n(\varepsilon)\to 0$ (当 $N\to\infty$)；也可能发散. $f(\varepsilon)$的泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\varepsilon^n$ 不论收敛与否，必是 $f(\varepsilon)$的渐近幂级数(当 $\varepsilon\to 0$).

注意 3 同一个函数可以按不同的渐近序列得到不同的渐近展开；而不同的函数却可能有同一个渐近展开. 具有相同的渐近展开式的两个函数称为渐近相等. $f(\varepsilon)$和 $g(\varepsilon)$渐近相等的充分必要条件是对一切 n 有 $f(\varepsilon)-g(\varepsilon)=O(\varphi_n(\varepsilon))$，$\varepsilon\to 0$. 由此，一个渐近级数所表示的不只是一个函数而是一类函数.

定义 11.1.7 设有函数 $f(x,\varepsilon)$，渐近序列$\{\varphi_n(\varepsilon)\}(\varepsilon\to 0)$. 若

$$f(x,\varepsilon)-\sum_{n=0}^{N-1}a_n(x)\varphi_n(\varepsilon)\triangleq R_N(x,\varepsilon)=O(\varphi_N(\varepsilon)),\quad \varepsilon\to 0\tag{11.11}$$

关于 $x\in\Omega$ 一致成立，则称 $\sum_{n=0}^{N-1}a_n(x)\varphi_n(\varepsilon)$ 为 $f(x,\varepsilon)$关于所有 $x\in\Omega$ **一致(有效)的 N 阶渐近展开式**；否则称为**非一致(有效)的渐近展开式.**

若上述对所有 N 都成立，则称 $\sum_{n=0}^{N} a_n(x)\varphi_n(\varepsilon)$ 为 $f(x,\varepsilon)$ 关于所有 $x\in\Omega$ **一致（有效）的渐近级数**；否则称为**非一致（有效）的渐近级数**.

11.1.4 无量纲化

实际问题的数学模型，即使已经过简化也常含有多个参数，使人抓不住要领. 这时需通过量纲分析，把多个有量纲的参数组合成少数几个无量纲参数，把变量也化为无量纲变量，从而把方程化为无量纲方程，使方程进一步简化. 在无量纲化过程中，必须弄清哪个是小参数以及何时可以忽略含小参数的项. 为此，无量纲化过程必须符合尺度化要求. 所谓尺度化，是指一种特定的无量纲化，它是选用一组特定的参考量——尺度，使无量纲方程中出现小参数的项确实是小项. 一般，尺度的选择没有规律可循，往往取决于对物理问题的理解程度. 下面，以上抛问题为例加以说明.

例 11.1.8 上抛问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{gR^2}{(x+R)^2}, & ① \\ x(0)=0, \quad \dfrac{dx}{dt}(0)=v_0, & ② \end{cases}$$

其中，R 为地球半径，x 为质点离地面的径向距离，t 为时间，g 为重力加速度，v_0 为初速度，$0<x\ll R$，$v_0^2\ll Rg$.

首先，列出所有参量、变量的量纲：

量	自变量 t	因变量 x	g	v_0	R
量纲	T	L	LT^{-2}	LT^{-1}	L

（基本量纲：质量——M，长度——L，时间——T）

然后，选择参考量，组成新的无量纲量：若取长度参考量为 R，时间参考量为 Rv_0^{-1}，令 $x^* = x/R, t^* = t/Rv_0^{-1}$，则上抛问题无量纲化为

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}^2 x^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = -\dfrac{1}{(1+x^*)^2}, \\ x^*(0) = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*}(0) = 1, \end{cases}$$

其中，$\varepsilon = v_0^2/Rg \ll 1$ 是无量纲小参数. 原问题中的三个参数 R, g, v_0 减少为一个参数 ε. 但不可以认为 ε 所在项 $\varepsilon \frac{\mathrm{d}^2 x^*}{\mathrm{d}t^{*2}}$ 是小项而略去不计. 实际上，略去该项，微分方程变为代数方程 $1/(1+x^*)^2 = 0$ 问题无解. 该无量纲化不符合尺度化要求.

若取长度参考量为 R，时间参考量为 $\sqrt{Rg^{-1}}$，令 $x^* = x/R$, $t^* = t/\sqrt{Rg^{-1}}$，则上抛问题无量纲化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = -\dfrac{1}{(1+x^*)^2}, & ③ \\ x^*(0) = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*}(0) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & ④ \end{cases}$$

其中，$\varepsilon = v_0^2/Rg \ll 1$ 是无量纲小参数. 由方程③降阶得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*}\right)^2 = \frac{1}{1+x^*} + c_1,$$

若略去 ε 所在项（即令 $\varepsilon = 0$），以条件 $\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*}(0) = 0$ 代入，得 $c_1 = -1$，$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t^*}\right)^2 = -\frac{x^*}{1+x^*}$，由此，$-1 < x^* \leqslant 0$，原问题无解，该无量纲化也不符合尺度化要求.

若考虑最大上升高度为 $v_0^2/2g$，上升到最大高度所需时间为 v_0/g，取长度参考量为 v_0^2/g，令

$$x^* = x/v_0^2 g^{-1}, \quad t^* = t/v_0 g^{-1},$$

则上抛问题无量纲化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2x^*}{dt^{*2}} = -\dfrac{1}{(1+\varepsilon x^*)^2}, \\
x^*(0) = 0, \quad \dfrac{dx^*}{dt^*}(0) = 1.
\end{cases}
$$

其中 $\varepsilon = v_0^2/Rg \ll 1$ 为无量纲小参数. 由于 $x^* = O(1)(\varepsilon \to 0)$, εx^* 是小项. 取 $\varepsilon = 0$, 问题 P_ε 化为 P_0, 其解为零级近似解

$$
x_0^* = t^* - \frac{1}{2}t^{*2},
$$

当 $0 \leqslant t^* \leqslant 2$ 时, $0 \leqslant x_0^* \leqslant \dfrac{1}{2}$.

应该注意,只有经过尺度化的无量纲方程才能用摄动法求解. 尺度的选择与所研究的问题中参数的变化范围有关,例如当 v_0 很大,$x \gg R$ 时,v_0^2/Rg 不再是小量,应选择其它尺度. 另外,对于无量纲参数,应尽量给出物理解释,例如 $\varepsilon = v_0^2/Rg$ 是最大高度的两倍与地球半径之比.

11.2 正则摄动法

正则摄动法,就是对于正则摄动问题,求解的关于小参数 ε 的直接展开式(11.1)或者(11.2)的方法. 一般是用待定系数法,而对于(11.1)这种渐近幂级数展开式,利用泰勒级数有时是方便的.

例 11.2.1 考虑黎卡提(Riccati)方程的初值问题

$$
\begin{cases}
y' = a(x,\varepsilon)y^2 + b(x,\varepsilon)y + c(x,\varepsilon) \\
y(0) = d(\varepsilon)
\end{cases}
\tag{①}
$$

其中 a、b、c 以及 d 都有渐近幂级数展开式,例如

$$
a(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\varepsilon^n,
$$

$$
d(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n\varepsilon^n,
$$

并且系数 $a_n(x), b_n(x), c_n(x) \in C^\infty$.

设解为

$$y(x,\varepsilon) \sim y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots$$

代入原方程,得

$$\begin{aligned}
& y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \cdots \\
&\quad = (a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \cdots)(y_0^2 + \varepsilon \cdot 2y_0 y_1 \\
&\qquad + \varepsilon^2(2y_0 y_2 + y_1^2) + \cdots) \\
&\qquad + (b_0 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \cdots)(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \cdots) \\
&\qquad + (c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \cdots) \\
&\quad = (a_0 y_0^2 + b_0 y_0 + c_0) \\
&\qquad + \varepsilon(2a_0 y_0 y_1 + a_1 y_0^2 + b_0 y_1 + b_1 y_0 + c_1) \\
&\qquad + \varepsilon^2(2a_0 y_0 y_2 + a_0 y_1^2 + 2a_1 y_0 y_1 \\
&\qquad + a_2 y_0^2 + b_0 y_2 + b_1 y_1 + b_2 y_0 + c_2) \\
&\qquad + \cdots,
\end{aligned}$$

代入初始条件得

$$\begin{aligned}
& y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + \cdots \\
&\quad = d_0 + \varepsilon d_1 + \varepsilon^2 d_2 + \cdots.
\end{aligned}$$

对于初值问题比较 ε 同次幂的系数,得

$$\varepsilon^0: \begin{cases} y_0' = a_0 y_0^2 + b_0 y_0 + c_0, \\ y_0(0) = d_0; \end{cases} \quad \text{(退化问题)} \qquad ②$$

$$\varepsilon^1: \begin{cases} y_1' = (2a_0 y_0 + b_0) y_1 + (a_1 y_0^2 + b_1 y_0 + c_1), \\ y_1(0) = d_1; \end{cases} \qquad ③$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} y_2' = (2a_0 y_0 + b_0) y_2 + (a_0 y_1^2 + 2a_1 y_0 y_1 \\ \qquad + a_2 y_0^2 + b_1 y_1 + b_2 y_0 + c_2), \\ y_2(0) = d_2; \end{cases} \qquad ④$$

……

设退化问题②(仍然是黎卡提方程)存在唯一解 $y_0(x)$,再逐次求

解关于 y_1, y_2 的线性方程③、④，得

$$y_1(x) = d_1\exp\left[\int_{x_0}^{x}(2a_0(s)y_0(s) + b_0(s))\mathrm{d}s\right] + \int_{x_0}^{x}\left\{[a_1(t)y_0^2(t) + b_1(t)y_0(t) + c_1(t)] \cdot \exp\left[\int_{t}^{x}(2a_0(s)y_0(s) + b_0(s))\mathrm{d}s\right]\right\}\mathrm{d}t$$

$$y_2(x) = d_2\exp\left[\int_{x_0}^{x}(2a_0(s)y_0(s) + b_0(s))\mathrm{d}s\right] + \int_{x_0}^{x}\left\{[a_0(t)y_1^2(t) + 2a_1(t)y_0(t)y_1(t) + a_2(t)y_0^2(t) + b_1(t)y_1(t) + b_2(t)y_0(t) + c_2(t)] \cdot \exp\left[\int_{t}^{x}(2a_0(s)y_0(s) + b_0(s))\mathrm{d}s\right]\right\}\mathrm{d}t.$$

至此，已形式地得到解的三阶展开式

$$y(x,\varepsilon) \sim y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) \qquad ⑤$$

但我们并不知道这是否确实是 $y(x,\varepsilon)$ 的渐近展开式．为确认它是渐近展开式，还需证明 $y(x,\varepsilon) = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + O(\varepsilon^3)$．

可以证明（见文献[1]）如下定理．

定理 11.2.2 考虑一阶非线性方程的初值问题

$$\mathrm{P}_\varepsilon:\quad \begin{cases} y' = f(x,y,\varepsilon), \\ y(x_0) = d(\varepsilon). \end{cases}$$

设 f, d 都有渐近展开式

$$f(x,y,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x,y)\varepsilon^n,$$

$$d(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n\varepsilon^n,$$

并且系数 $f_n(x,y)$ 无限次可微．若退化问题

$$\mathrm{P}_0:\quad \begin{cases} y' = f_0(x,y) \\ y(x_0) = d_0 \end{cases}$$

在 x_0 的有界闭邻域 $|x-x_0|\leqslant R$ 上存在唯一的解 $y_0(x)$，则对于每个充分小的 ε，问题 P_ε 在 $|x-x_0|\leqslant R$ 上存在唯一的有界解 $y(x,\varepsilon)$，使

$$y(x,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N}y_n(x)\varepsilon^n+O(\varepsilon^{N+1})$$

对于每个 $N\geqslant 0$ 成立，而且系数 $y_n,n\geqslant 1$ 可以递推地作为线性初值问题的解而唯一地求得.

应该注意：y 是向量时，定理仍然成立；若不再增加假设，定理对无界区间不成立；若 f_n 的可微次数有限，则 $y(x,\varepsilon)$ 只能展开有限项.

根据该定理，例 11.2.1 中式⑤确实是原问题①的解的二阶近似.

例 11.2.3 上抛问题经尺度化(见例 11.1.8)，得

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=-(1+\varepsilon x)^{-2}, & ①\\[2mm] x(0)=0,\quad \dfrac{dx}{dt}(0)=1, & ②\end{cases}$$

其中 ε 为正的无量纲小参数.

解法 1 利用待定系数法直接展开. 先把方程①的右边按 ε 展开，得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-1+2\varepsilon x-3\varepsilon^2x^2+\cdots.$$

设

$$x(t,\varepsilon)\sim x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\cdots$$

代入式①，②，得

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x_0}{dt^2}+\varepsilon\frac{d^2x_1}{dt^2}+\varepsilon^2\frac{d^2x_2}{dt^2}+\cdots\\ &=-1+\varepsilon\cdot 2(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)-\varepsilon^2\cdot 3(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)^2+\cdots\\ &=-1+\varepsilon\cdot 2x_0+\varepsilon^2(-3x_0^2+2x_1)+\cdots,\end{aligned}\qquad ③$$

$$x_0(0)+\varepsilon x_1(0)+\varepsilon^2 x_2(0)+\cdots=0, \tag{④}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}(0)+\varepsilon\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(0)+\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(0)+\cdots=1. \tag{⑤}$$

比较式③,④,⑤两边 ε 同次幂的系数,得

$$\varepsilon^0:\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x_0}{\mathrm{d}t^2}=-1,\\[2ex] x_0(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}(0)=1;\end{cases} \tag{⑥}$$

$$\varepsilon^1:\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}=2x_0,\\[2ex] x_1(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(0)=0;\end{cases} \tag{⑦}$$

$$\varepsilon^2:\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}=2x_1-3x_0^2,\\[2ex] x_2(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(0)=0;\end{cases} \tag{⑧}$$

$\cdots\cdots$.

逐次求解⑥,⑦,⑧等各线性问题,得

$$x_0(t)=t-\frac{1}{2}t^2;$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}=2t-t^2,\\[2ex] x_1(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(0)=0,\end{cases}$$

$$x_1(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{12}t^4;$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}=-3t^2+\dfrac{11}{3}t^3-\dfrac{11}{12}t^4,\\[2ex] x_2(0)=0,\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}(0)=0,\end{cases}$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6.$$

至此已形式地求得解的直接展开式

$$x(t,\varepsilon) \sim \left(t - \frac{1}{2}t^2\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4\right)$$

$$+ \varepsilon^2\left(-\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6\right) + \cdots$$

解法 2 利用泰勒级数直接展开，对于较复杂的非线性问题有时较为方便. 设

$$x(t,\varepsilon) \sim x(t,0) + \varepsilon\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t,0) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{\partial^2 x}{\partial \varepsilon^2}(t,0) + \cdots$$

$$\triangleq x_0(t) + \varepsilon\dot{x}(t) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\ddot{x}(t) + \cdots,$$

注意"·"表示对 ε 求导并以 $\varepsilon=0$ 代入. 显然，$x_0(t)$ 是退化问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -1, \\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

的解

$$x_0(t) = t - \frac{1}{2}t^2.$$

把式①、②两边对 ε 求导并以 $\varepsilon=0$ 代入，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\dot{x}}{\mathrm{d}t^2} = 2(1+\varepsilon x)\left(x + \varepsilon\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0} = 2x_0, \\ \dot{x}(0) = 0,\ \dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}(0) = 0. \end{cases}$$

解之，得

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4.$$

把式①、②两边对 ε 求二阶导数并以 $\varepsilon=0$ 代入，得

$$
\frac{\mathrm{d}^2\tilde{x}}{\mathrm{d}t^2}=\left[-6(1+\varepsilon x)^{-4}\left(x+\varepsilon\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}\right)^2+2(1+\varepsilon x)^{-3}\left(2\frac{\partial x}{\partial\varepsilon}+\varepsilon\frac{\partial^2 x}{\partial\varepsilon^2}\right)\right]_{\varepsilon=0}
$$

$$
=-6x_0^2+4\dot{x},
$$

$$
x(0)=0,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0)=0,
$$

解之,得

$$
\dot{x}(t)=-\frac{1}{2}t^4+\frac{11}{30}t^5-\frac{11}{180}t^6.
$$

至此也已形式地求得解的直接展开式.

11.3 变形坐标法

如果直接展开式(例如第二项)中出现因子εt,则当自变量t大到$t=O(\varepsilon^{-1})$时,$\varepsilon t=O(1)$,这时该项就不再是前项的小量修正了,常称这种项为**长期项**(secular term).长期项的出现使展开式只在t的有限域中有效,而在t的无限域中是非一致有效的.

为了消除长期项,可把产生长期项的那个自变量作微小变形,即对该自变量也按ε的幂展开.通常作如下两种变形:

线性变形

$$
t=\omega\tau=(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots)\tau \tag{11.12}
$$

其中,τ是新的自变量,ω为参数.待定的变形参数$\omega_1,\omega_2,\cdots$为消除长期项提供了选择的余地.因为这里是把参数ω(常为频率、能级等)按ε的幂展开,故称之为**变形参数法**(method of strained parameter),亦称**LP法**(Lindstedt-Poincaré method).

非线性变形

$$
t=\tau+\varepsilon t_1(\tau)+\varepsilon^2 t_2(\tau)+\cdots \tag{11.13}
$$

其中,τ是新的坐标变量,$t_1(\tau),t_2(\tau),\cdots$是待定的变形坐标函数.

故称**变形坐标法**(method of strained coordinates)，亦称 **PL 法**(Poincaré Lighthill method). 1952 年郭永怀在研究边界层流动问题的高阶近似时，把 PL 法与解决边界层问题的放大尺度的方法相结合，得到了很好的结果，被钱学森命名为 **PLK 法**.

上述各种变形法是求一致有效渐近解的简单而有效的方法，在适用的场合通常只要求解一阶或二阶近似就能得到满意的结果. 但这种方法是有局限性的. Lighthill 曾指出他的方法只适用于双曲型方程，Levey 曾指出对于小参数乘以最高阶导数之类奇异摄动问题变形坐标法失效. 虽然变形坐标法的适用性问题还研究得很不够，但并不妨碍这种方法的广泛使用.

11.3.1 变形参数法

例 11.3.1 考虑弱非线性方程的初值问题

$$\begin{cases} \ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (0 < t < \infty), & ① \\ u(0) = 1,\ \dot{u}(0) = 0. & ② \end{cases}$$

其中"·"表示对 t 求导.

设

$$t = \tau(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots), \qquad ③$$

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \cdots. \qquad ④$$

代入式①，②，并令 ε 各次幂的系数为 0，得关于 $u_0(\tau)$，$u_1(\tau)$，…的方程和条件：

$$u_0'' + u_0 = 0,\ u_0(0) = 1,\ u_0'(0) = 0; \qquad ⑤$$

$$u_1'' + u_1 = -u_0^3 - 2\omega_1 u_0,\ u_1(0) = 0,\ u_1'(0) = 0; \qquad ⑥$$

……

其中"′"表示对 τ 求导. 从式⑤解得

$$u_0 = \cos\tau, \qquad ⑦$$

代入式⑥得

$$u_1'' + u_1 = -\left(2\omega_1 + \frac{3}{4}\right)\cos\tau - \frac{1}{4}\cos 3\tau. \tag{⑧}$$

为使 u_1 中不出现长期项，应让 $\cos\tau$ 的系数为 0，即应取

$$\omega_1 = -\frac{3}{8}.$$

如此，可由式⑧解得

$$u_1 = \frac{1}{32}(-\cos\tau + \cos 3\tau).$$

把上述结果代入式③、④，便得

$$u = \cos\tau + \varepsilon\frac{1}{32}(-\cos\tau + \cos 3\tau) + O(\varepsilon^2)$$

$$t = \tau\left(1 - \frac{3}{8}\varepsilon\right) + O(\varepsilon^2).$$

由此

$$u(t,\varepsilon) = \cos\left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon\right)t + \frac{\varepsilon}{32}\left[-\cos\left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon\right)t + \cos 3\left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon\right)t\right] + O(\varepsilon^2).$$

使用变形参数法的其它例子，可参阅本书参考文献[35]。

11.3.2 变形坐标法

例 11.3.2 考虑初值问题

$$\begin{cases} (x + \varepsilon u)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + (2 + x)u = 0, & ① \\ u(1) = e^{-1}. & ② \end{cases}$$

设

$$x = \tau + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \cdots, \tag{③}$$

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \cdots, \tag{④}$$

则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u'}{x'}$(其中"′"表示对$\tau$求导). 为方便计,让$x=1$时$\tau=1$,即令

$$x_m(1)=0 \quad (m=1,2,\cdots). \tag{5}$$

把式③、④、⑤代入①、②,并令ε的各次幂的系数为0,得关于u_0、u_1、…的含有待定函数x_1、x_2、…的方程和条件:

$$\tau u_0' + (2+\tau)u_0 = 0, \quad u_0(1)=\mathrm{e}^{-1}, \tag{6}$$

$$\tau u_1' + (2+\tau)u_1 = (2+\tau)u_0 x_1' - (u_0+u_0')x_1 - u_0 u_0',$$
$$u_1(1)=0; \tag{7}$$

……

从⑥解得

$$u_0=\mathrm{e}^{-\tau}/\tau^2, \tag{8}$$

代入⑦得

$$\left(\frac{u_1}{u_0}\right)' = -\left(\frac{2}{\tau}+1\right)x_1' + \frac{2}{\tau^2}x_1 + \mathrm{e}^{-\tau}\left(\frac{2}{\tau^4}+\frac{1}{\tau^3}\right). \tag{9}$$

不难看出,当$x_1=0$时($x=\tau$即直接展开时),

$$\left(\frac{u_1}{u_0}\right)'=O(\tau^{-4}), \quad \frac{u_1}{u_0}=O(\tau^{-3}),$$
$$u_1=O(\tau^{-5}), \quad u_0=O(\tau^{-2}),$$

后项u_1比前项u_0有更高的奇性. 为使展开式一致有效,可通过适当选取x_1,使u_1的奇性不超过u_0的奇性. 而实际上,只要选取x_1消去右边各项中奇性最坏的项,就能得到一致有效展开式. 在此,可取x_1使$-\frac{2}{\tau}x_1'+\frac{2}{\tau^2}x_1+\frac{2}{\tau^4}=0$,即可由

$$x_1' - \frac{1}{\tau}x_1 = \frac{1}{\tau^3}$$

解得

$$x_1 = -\frac{1}{3\tau}.$$

代入式⑨得

$$\left(\frac{u_1}{u_0}\right)' = -\frac{2}{3\tau^3} - \frac{2}{\tau^4} + e^{-\tau}\left(\frac{1}{\tau^3} + \frac{2}{\tau^4}\right),$$

其中，当 $\tau\to 0$ 时，奇性最坏的项 $-\frac{2}{\tau^4}+e^{-\tau}\frac{2}{\tau^4}\to 0$. 由此解得

$$u_1 = \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}\left[\frac{2}{3\tau} + \frac{1}{3\tau^2} - \int_\tau^1 e^{-\xi}\left(\frac{2}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^3}\right)d\xi\right]$$

类似可得

$$x_2 = -\frac{3}{10\tau^4},$$

把上述结果代入式③、①，便得

$$u = \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}\left\{1 + \varepsilon\left[\frac{2}{3\tau^3} + \frac{1}{3\tau^2} - \int_\tau^1 e^{-\xi}\left(\frac{2}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^3}\right)d\xi\right]\right\} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\tau^6}\right),$$

$$x = \tau - \frac{\varepsilon}{3\tau^2} - \frac{3\varepsilon^2}{10\tau^4} + O\left(\frac{\varepsilon^3}{\tau^6}\right)$$

11.3.3 重正化方法

Притуло(1962 年)和 Usher(1968 年)发现，为了消除长期项以便得到一致有效的摄动展开式，可以不在微分方程中引进自变量的变换，而是先求出非一致有效的直接展开式，然后再在这个直接展开式中引进自变量变换(11.12)或(11.13)，根据奇性不随近似阶数增加的条件来确定(11.12)中的 ω_i 或(11.13)中的 $x_i(\tau)$，从而消除长期项. 这种方法称为**重正化方法**(method of renormalization). 用此法在确定系数 $x_i(\tau)$时，不必求解微分方程而只需求解代数方程，从而简化了计算.

为了便于比较，先用例 11.3.1 和例 11.3.2 来说明重正化方法.

例 11.3.1 的重正化方法：

把问题①,②直接展开,得

$$u=\cos t+\varepsilon\left[-\frac{3}{8}t\sin t+\frac{1}{32}(\cos 3t-\cos t)\right]$$
$$+O(\varepsilon^2)$$

引进变换③,并把 $\cos t,\sin t,\cos 3t,\cdots$ 按 ε 展开:

$$\cos t=\cos\tau-\varepsilon\omega_1\tau\sin\tau+\cdots,$$
$$\sin t=\sin\tau+\varepsilon\omega_1\tau\cos\tau+\cdots,$$
$$\cos 3t=\cos 3\tau-\varepsilon 3\omega_1\tau\sin 3\tau+\cdots,$$

归并 ε 同次幂的系数,u 便化为

$$u=\cos\tau-\varepsilon\left[\left(\omega_1+\frac{3}{8}\right)\tau\sin\tau\right.$$
$$\left.-\frac{1}{32}(\cos 3\tau-\cos\tau)\right]+O(\varepsilon^2).$$

取 $\omega_1=-\frac{3}{8}$ 使长期项消失,便得一致有效的展开式.

例 11.3.2 的重正化方法:

把问题①、②直接展开,得

$$u=x^{-2}e^{-x}\left[1+\varepsilon\int_1^x e^{-\xi}\xi^{-3}(1+2\xi^{-1})d\xi\right]+O(\varepsilon^2).$$

引进变换③,并把上式的右边重新按 ε 展开,得

$$x^{-2}=\tau^{-2}-2\tau^{-3}x_1\varepsilon+\cdots,$$
$$e^{-x}=e^{-\tau}-e^{-\tau}x_1\varepsilon+\cdots,$$
$$\int_1^x e^{-\xi}\xi^{-3}(1+2\xi^{-1})d\xi$$
$$=\int_1^\tau e^{-\xi}\xi^{-3}(1+2\xi^{-1})d\xi+e^{-\tau}\tau^{-3}(1+2\tau^{-1})x_1\varepsilon,$$

从而

$$u=\tau^{-2}e^{-\tau}\left\{1-\varepsilon\left[(2\tau^{-1}+1)x_1\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_1^\tau e^{-\xi}\xi^{-3}(1+2\xi^{-1})d\xi\right]\right\}+O(\varepsilon^2).$$

取 x_1 使 $\tau\to 0$ 时最坏的奇性消失，即可由 $2\tau^{-1}x_1+\frac{2}{3}\tau^{-3}=0$（因积分项中奇性最高的项是$\frac{2}{3}e^{-\tau}\tau^{-3}$，而当 $\tau\to 0$ 时 $e^{-\tau}\to 1$），解得 $x_1=-\frac{1}{3}\tau^{-2}$，从而

$$u=\tau^{-2}e^{-\tau}\left\{1+\varepsilon\left[\frac{2}{3}\tau^{-3}+\frac{1}{3}\tau^{-2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_1^{\tau}e^{-\xi}\xi^{-3}(1+2\xi^{-1})d\xi\right]\right\}+O(\varepsilon^2).$$

这与前面所得结果相司.

11.4 匹配法

当因变量在自变量的某处发生急剧变化时，利用变形坐标法不能得到一致有效的渐近解. 例如当小参数与最高阶导数相乘时，就会在某部分边界附近出现这种现象，通常借用流体力学中的称呼把这种区域叫作**边界层**(boundary layer).

注意到放大自变量的尺度可以减缓因变量的变化速度这一事实，通常用如下两种方法求一致有效展开式. 一是**匹配法**(method of match)，二是**合成法**.

11.4.1 匹配法

匹配法是在边界层外用原尺度的变量直接展开得外部展开式

$$y^o(x;\varepsilon)\sim\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x)\beta_j(\varepsilon)\quad(\text{当 }\varepsilon\to 0),\qquad(11.14)$$

在边界层内用放大尺度的快变量 $\zeta=\zeta(x,\varepsilon)$ 展开得内部展开式

$$y^i(\zeta;\varepsilon)\sim\sum_{j=0}^{\infty}b_j(\zeta)\alpha_j(\varepsilon)\quad(\text{当 }\varepsilon\to 0),\qquad(11.15)$$

其中 $\alpha_j(\varepsilon)$ 与 $\beta_j(\varepsilon)$ 是当 $\varepsilon\to 0$ 时的渐近序列，通常是幂函数序列 ε^j.

然后再把内、外展开式按适当的匹配原则连接起来．外部展开式在边界层内失效，而描述急剧变化的内部展开式在边界层外失效，但可以把它们复合起来构成一致有效的统一的表达式．

以下以常微分方程的边值问题为例说明之．

1．一阶近似与普朗特(Prandtl)匹配法则

例 11.4.1

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + y' + y = 0 \ (\varepsilon > 0), & ① \\ y(0) = \alpha, & ② \\ y(1) = \beta, & ③ \end{cases}$$

其中“′”是对 x 求导．

不难求得该常系数线性问题的精确解

$$y = [(\alpha e^{r_2} - \beta)e^{r_1 x} + (\beta - \alpha e^{r_1})e^{r_2 x}]/(e^{r_2} - e^{r_1}) \qquad ④$$

其中 $r_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}$．显然，

$$r_1 = -1 + O(\varepsilon)$$

$$r_2 = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + O(\varepsilon)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (x\text{固定})}} y = \begin{cases} \beta e^{1-x}, & x \neq 0, \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

如图 11.1，当 ε 很小时，y 在 $x=0$ 点附近变化急剧；而当 $\varepsilon \to 0$ 时，y 在 $x=0$ 点不连续．

(1) 求外部展开式

设
$$y = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots \qquad ⑤$$

代入式①～③，并令 ε 各次幂的系数为 0，得

$$y_0' + y_0 = 0, \quad y_0(0) = \alpha, \quad y_0(1) = \beta,$$

$$y_n' + y_n = -y''_{n-1}, \quad y_n(0) = 0, \quad y_n(1) = 0 \ (n = 1, 2, \cdots).$$

由于 ε 与 y'' 相乘，致使这些关于 y_n 的方程都降为一阶方程．它们的解无法同时满足两个边界条件，必须放弃 $x=0$ 点的边界条件

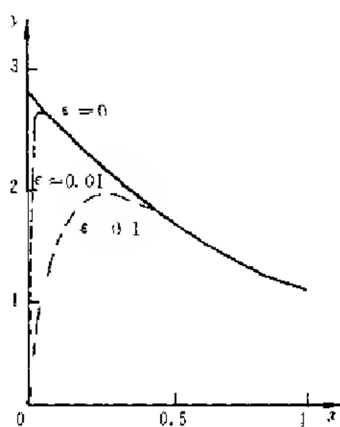


图 11.1

(这由精确解可以看出，当不知精确解时判断必须放弃哪个边界条件的方法留待本段后面说明)。由

$$\begin{cases} y_0' + y_0 = 0, \\ y_0(1) = \beta, \end{cases}$$

得

$$y_0 = \beta e^{1-x}. \tag{6}$$

由

$$\begin{cases} y_1' + y_1 = -\beta e^{1-x}, \\ y_1(1) = 0, \end{cases}$$

得

$$y_1 = \beta(1-x)e^{1-x} \tag{7}$$

外部展开式为

$$y^o = \beta e^{1-x} + O(\varepsilon).$$

(2) 求内部展开式

取伸展变换

$$\zeta = x/\varepsilon.$$

与 x 比较，ζ 是快变量. ε 的方次如何选取，在后面说明. 式①，②化为

$$\begin{cases} \ddot{y} + \dot{y} + \varepsilon y = 0, \\ y(0) = \alpha. \end{cases} \qquad ⑧$$

其中"·"表示对 ζ 求导. 设

$$y = y_0(\zeta) + \varepsilon y_1(\zeta) + \varepsilon^2 y_2(\zeta) + \cdots$$

代入式⑧，得

$$\ddot{y}_0 + \dot{y}_0 = 0, \quad y_0(0) = \alpha, \qquad ⑨$$

$$\ddot{y}_n + \dot{y}_n = -y_{n-1}, \quad y_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots). \qquad ⑩$$

由式⑨解得

$$y_0 = \alpha - A_0 + A_0 e^{-\zeta}, \qquad ⑪$$

由式⑩($n=1$)解得

$$y_1 = A_1(1 - e^{-\zeta}) - [\alpha - A_0(1 + e^{-\zeta})]\zeta, \qquad ⑫$$

其中 A_0、A_1 为待定常数. 内部展开式为

$$y^i = \alpha - A_0 + A_0 e^{-\zeta} + O(\varepsilon),$$

它在 ζ 有限即 $x = O(\varepsilon)$ 的范围内有效.

(3) 内、外展开式的匹配

设内、外展开式存在一个公共有效区域，普朗特匹配法则是说，在公共有效区域内，外部解的内部极限 $(y^o)^i$ 等于内部解的外部极限 $(y^i)^o$，即

$$\lim_{x \to 0} y^o = \lim_{\zeta \to +\infty} y^i. \qquad (11.16)$$

由此匹配法则得 $\alpha - A_0 = \beta e$，从而得内部展开式为

$$y^i = \beta e + (\alpha - \beta e) e^{-\zeta} + O(\varepsilon).$$

(4) 内、外展开式的合成

为构成一致有效的统一展开式，常用以下两种精确度相同的合成方法：

加法合成

$$y^u = y^o + y^i - (y^o)^i = y^o + y^i - (y^i)^o; \qquad (11.17)$$

乘法合成

$$y^u = y^o y^i/(y^o)^i = y^o y^i/(y^i)^o. \qquad (11.18)$$

此例按式(11.17)可得

$$y^u = \beta e^{1-x} + (\alpha - \beta e)e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon),$$

按式(11.18)可得

$$y^u = e^{-x}[\beta e + (\alpha - \beta e)e^{-x/\varepsilon}] + O(\varepsilon).$$

最后,究竟如何判断哪个边界有边界层,即在求外部解时必须放弃哪个边界的边界条件,在有些物理问题中,边界层是明显的,例如粘性流体的绕流问题中,边界层就是粘性起主要作用的紧靠物体表面的区域.但在有些问题中边界层不明显,只好用匹配条件进行试验了.用例 11.4.1 说明之.

假设 $x=1$ 附近是边界层,放弃条件 $y(1)=\beta$,由 $y'+y=0$,$y(0)=\alpha$ 得外部解 $y^o=\alpha e^{-x}+O(\varepsilon)$;取伸展变换

$$\zeta = (1-x)/\varepsilon^{\lambda} \quad (\lambda > 0),$$

把例 11.4.1 中的式①化为

$$\varepsilon^{1-2\lambda}\ddot{y} - \varepsilon^{-\lambda}\dot{y} + y = 0$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时,该式依 λ 的取值化为:

当 $\lambda>1$ 时,$\ddot{y}=0$,考虑 $y^i|_{\zeta=0}=\beta$,解得 $y^i=\beta+A\zeta+O(\varepsilon)$.由匹配条件(11.16)要求对任何 ζ 成立

$$\lim_{\zeta\to+\infty}(\beta + A\zeta) = \lim_{x\to1}\alpha e^{-x},$$

由此,除 $A=0$ 外还须 $\beta=\alpha e^{-1}$,一般是无法成立的;

当 $\lambda<1$ 时,$\dot{y}=0$,$y^i=\beta+O(\varepsilon)$,匹配条件仍无法满足;

当 $\lambda=1$ 时,$\ddot{y}-\dot{y}=0$,$y^i=\beta-A+Ae^{\zeta}+O(\varepsilon)$,由匹配条件,除 $A=0$ 外仍要 $\beta=\alpha e^{-1}$.从而得知,$x=1$ 附近不是边界层.

假设 $x=0$ 附近是边界层,前已求得外部解,取伸展变换

$$\zeta = x/\varepsilon^{\lambda} \qquad (\lambda > 0)$$

把例 11.4.1 中的式①化为

$$\varepsilon^{1-2\lambda}\ddot{y} + \varepsilon^{-\lambda}\dot{y} + y = 0.$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，该式依 λ 的取值化为：

$$\lambda > 1, \ \ddot{y} = 0;$$

$$\lambda < 1, \ \dot{y} = 0;$$

$$\lambda = 1, \ \ddot{y} + \dot{y} = 0.$$

由匹配条件判定必须放弃 $\lambda>1$，$\lambda<1$ 的情形，而取 $\lambda=1$，这正是前面所讨论的情形.

2. 高阶近似与范戴克(Van Dyke)匹配法则

由例 11.4.1 中的式⑥、⑦，外部展开式为

$$y^{o} = \beta[1 + \varepsilon(1 - x)]e^{1-x} + O(\varepsilon^2). \tag{13}$$

由⑪、⑫，内部展开式为

$$y^{i} = \{\alpha - A_0(1 - e^{-\zeta})\} + \varepsilon\{A_1(1 - e^{-\zeta}) - [\alpha - A_0(1 + e^{-\zeta})]\zeta\} + O(\varepsilon^2) \tag{14}$$

其中常数 A_0，A_1 要在内、外展开式的匹配中确定.

为使 $\zeta \to +\infty$ 时 y^{i} 有界，应取 $A_0 = \alpha$，于是 $\lim\limits_{\zeta\to+\infty} y^{i} = A_1\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. 而 $\lim\limits_{x\to 0} y^{o} = \beta e(1+\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$. 如果仍用普朗特匹配法则(11.16)，则得 $A_1 = \beta e\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$A_1 \to \infty$，与 $A_1 = O(1)$ 矛盾. 由此可见，普朗特匹配法则在求高阶近似时失效.

一个被广泛采用的简便而有效的匹配法则是范戴克匹配法则：

n 项外部展开的 m 项内部展开 $=$ m 项内部展开的 n 项外部展开. (11.19)

其中，m，n 可取相等或不等的任何正整数.

为确定 n 项外部展开

$$y^o(x;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k y_k(x) + O(\varepsilon^n)$$

的 m 项内部展开

$$y^i(\zeta;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k Y_k(\zeta) + O(\varepsilon^m),$$

应先用内部变量改写 n 项外部展开为

$$y^o(\varepsilon\zeta;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k y_k(\varepsilon\zeta) + O(\varepsilon^n),$$

然后固定内部变量 ζ，按小量 ε 展开：

$$Y_0(\zeta) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(\zeta\text{固定})}} y^o(\varepsilon\zeta;\varepsilon),$$

$$Y_k(\zeta) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(\zeta\text{固定})}} \frac{y^o(\varepsilon\zeta;\varepsilon) - \sum_{l=0}^{k-1} \varepsilon^l Y_l(\zeta)}{\varepsilon^k}.$$

为确定 m 项内部展开的 n 项外部展开，也类似地先用外部变量改写 m 项内部展开为

$$y^i(x/\varepsilon;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k Y_k(x/\varepsilon) + O(\varepsilon^m),$$

然后固定外部变量 x，按小量 ε 展开：

$$y_0(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(x\text{固定})}} y^i(x/\varepsilon;\varepsilon),$$

$$y_k(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ x\text{固定}}} \frac{y^i(x/\varepsilon;\varepsilon) - \sum_{l=0}^{k-1} \varepsilon^l y_l(x)}{\varepsilon^k}.$$

例如，取 $m=n=2$，用式(11.19)匹配内、外展开式[illegible]两项外部展开

$$y^o \sim \beta[1+\varepsilon(1-x)]e^{1-x}$$

$$=\beta[1+\varepsilon(1-\varepsilon\zeta)]e^{1-\varepsilon\zeta} \quad \text{（用内部变量改写）}$$

$$= \beta e(1+\varepsilon-\varepsilon\zeta+\cdots).\quad \text{(对}\,\varepsilon\,\text{展开)}$$

的两项内部展开为

$$(y^i)^o \sim \beta e(1+\varepsilon-\varepsilon\zeta), \tag{⑮}$$

两项内部展开

$$\begin{aligned} y^i &\sim \alpha - A_0(1-e^{-\zeta}) + \varepsilon\{A_1(1-e^{-\zeta}) - [\alpha - A_0(1+e^{-\zeta})]\zeta\} \\ &= \alpha - A_0(1-e^{-x/\varepsilon}) \\ &\quad + \varepsilon\left\{A_1(1-e^{-x/\varepsilon}) - [\alpha - A_0(1+e^{-x/\varepsilon})]\frac{x}{\varepsilon}\right\} \end{aligned}$$

（用外部变量改写）

$$= (\alpha - A_0)(1-x) + \varepsilon A_1 + \cdots \quad \text{(对}\,\varepsilon\,\text{展开)}$$

的两项外部展开为

$$(y^i)^o \sim (\alpha - A_0)(1-x) + \varepsilon A_1. \tag{⑯}$$

据式(11.19)，使式⑮与⑯对任何 x 相等，得 $A_0=\alpha-\beta e$，$A_1=\beta e$。从而确定内部展开

$$\begin{aligned} y^i &= \beta e + (\alpha-\beta e)e^{-\zeta} \\ &\quad + \varepsilon\{\beta e(1-e^{-\zeta}) - [\beta e - (\alpha-\beta e)e^{-\zeta}]\zeta\} \\ &\quad + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{⑰}$$

合成展开式

$$\begin{aligned} y^c &= y^o + y^i - (y^i)^o \\ &= \beta[1+\varepsilon(1-x)]e^{1-x} + [(\alpha-\beta e)(1+x) - \varepsilon\beta e]e^{-x/\varepsilon} \\ &\quad + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{⑱}$$

其中 $(y^i)^o$ 由式⑮给出.

另外，还有卡普伦(Kaplun)匹配法则. 它虽比范戴克法则更为一般，但因过于复杂，应用较少.

11.4.2 合成法

合成展开式(11.17)为

$$y(x;\varepsilon) = y^o(x;\varepsilon) + y^i(\zeta;\varepsilon) - (y^o)^i.$$

它可以看作两部分的和：

$$y(x;\varepsilon) = F(x;\varepsilon) + G(\zeta;\varepsilon) \tag{11.20}$$

其中 $F(x;\varepsilon) = y^o$，$G(\zeta;\varepsilon) = y^i - (y^o)^i$，这说明可以不先用匹配法求内、外展开式，然后再合成一致有效展开式，而是直接求这种具有两个部分的合成展开式，称**合成法**. 在边界层外，$y(x;\varepsilon)$的外部极限 $F + G^o$ 满足原微分方程和相应的边界条件；在边界层内，$y(x;\varepsilon)$的内部极限 $F^i + G$ 满足变量 ζ 的微分方程和相应的边界条件. (11.20)是满足全部边界条件的处处有效的解. 下面仍用例 11.4.1 说明之.

1. 拉塔(Latta)的做法

首先像 11.4.1 节那样判定 $x = 0$ 附近是边界层，且取 $\zeta = x/\varepsilon$. 考察了内部展开式中包含 $e^{-\zeta}$ 之后，设

$$\begin{aligned} y &= F(x;\varepsilon) + e^{-\zeta}H(x;\varepsilon) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n f_n(x) + e^{-x/\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n h_n(x) \end{aligned} \tag{①}$$

(这里 G 也表示为外部变量 x 的函数)把该式代入例 11.4.1 中的式①和③，分别令 ε^n，$\varepsilon^n e^{-x/\varepsilon}$ 的系数为 0，得关于 f_n，h_n 的方程和条件：

$$\left.\begin{aligned} &f_0' + f_0 = 0, && f_0(1) = \beta; \\ &h_0' - h_0 = 0, && h_0(0) = \alpha - f_0(0); \\ &f_1' + f_1 = -f_0'', && f_1(1) = 0; \\ &h_1' - h_1 = h_0'', && h_1(0) = -f_1(0); \\ &f_2' + f_2 = -f_1'', && f_2(1) = 0; \\ &h_2' - h_2 = h_1'', && h_2(0) = -f_2(0). \\ & && \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{②}$$

其中用到 $e^{-1/\varepsilon}$ 对 ε 的展开式的所有系数都为 0. 由式②逐次解得

$$
\left.\begin{aligned}
&f_0 = \beta e^{1-x}, \qquad h_0 = (\alpha - \beta e)e^{-x};\\
&f_1 = \beta(1-x)e^{1-x}, \quad h_1 = [-\beta e + (\alpha - \beta e)x]e^{-x};\\
&f_2 = \frac{1}{2}\beta(1-x)(5-x)e^{1-x},\\
&h_2 = \left[-\frac{5}{2}\beta e + (2\alpha - 3\beta e)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta e)x^2\right]e^{-x}.
\end{aligned}\right\} \quad ③
$$

由此,得

$$
\begin{aligned}
y = {} & \beta\left[1 + \varepsilon(1-x) + \frac{\varepsilon^2}{2}(1-x)(5-x)\right]e^{1-x}\\
& + \Big\{\alpha - \beta e + \varepsilon[-\beta e + (\alpha - \beta e)x] + \varepsilon^2\Big[-\frac{5}{2}\beta e\\
& + (2\alpha - 3\beta e)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta e)x^2\Big]\Big\}e^{-x/\varepsilon} + O(\varepsilon^3) \qquad ④
\end{aligned}
$$

注意到右边第二部分中 $e^{x} = 1 + x + \cdots$ 与 $x = \varepsilon\zeta$,则前两项与例 11.4.1 中的式⑧是一致的.

拉塔把外部变量推广为

$$
\zeta = g(x)/\delta(\varepsilon), \qquad (11.21)
$$

其中,$g(x)$在求解过程中确定.

2. 布朗伯格(Bromberg)和 Вишик-Люстерник 的做法

首先像 11.4.1 节那样判定 $x = 0$ 附近是边界层,且取内部变量$\zeta = x/\varepsilon$.设在边界层外 G 可以忽略,即 G 的外部极限 $G^{o} = 0$.把

$$
\begin{aligned}
y^{o}(x;\varepsilon) &= F + G^{o}\\
&= F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + \varepsilon^2 F_2(x) + \cdots \qquad ⑤
\end{aligned}
$$

代入例 11.4.1 中的式①,③,并令 ε 的同次幂系数为 0,得关于 $F_n(x)$的方程和条件:

$$
\left.\begin{aligned}
&F_0' + F_0 = 0, \qquad F_0(1) = \beta;\\
&F_n' + F_n = -F''_{n}, \quad F_n(1) = 0 \ (n = 1,2,\cdots)
\end{aligned}\right\} \quad ⑥
$$

再把

$$
\begin{aligned}
y(x;\varepsilon) &= F + G \\
&= F_0(0) + G_0(\zeta) + \varepsilon[F_0'(0)\zeta + F_1(0) + G_1(\zeta)] \\
&\quad + \varepsilon^2\left[\frac{1}{2}F_0''(0)\zeta^2 + F_1'(0)\zeta + F_2(0) + G_2(\zeta)\right] \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
\tag{⑦}
$$

代入关于内部变量ζ的方程与条件例 11.4.1 中的式⑧，并令ε的同次幂系数为 0，得关于$G_n(\zeta)$的方程和条件：

$$
\left.
\begin{aligned}
&G_0'' + G_0' = 0, \quad G_0(0) = \alpha - F_0(0); \\
&G_1'' + G_1' = -G_0 - F_0'(0) - F_0(0), G_1(0) = -F_1(0); \\
&G_2'' + G_2' = -G_1 - [F_0'(0) + F_0''(0)]\zeta \\
&\qquad - F_0''(0) - F_1'(0) - F_0(0) \\
&G_2(0) = -F_2(0);
\end{aligned}
\right\}
$$

由此，逐次解得

$$
\left.
\begin{aligned}
&F_0 = \beta e^{1-x}, \\
&G_0 = (\alpha - \beta e)e^{-\zeta}; \\
&F_1 = \beta(1-x)e^{1-x}, \\
&G_1 = [(\alpha - \beta e)\zeta - \beta e]e^{-\zeta}; \\
&F_2 = \frac{1}{2}\beta(1-x)(5-x)e^{1-x}, \\
&G_2 = \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta e)\zeta^2 + (\alpha - 2\beta e)\zeta - \frac{5}{2}\beta e\right]e^{-\zeta};
\end{aligned}
\right\}
$$

如此得到的展开式的前两项，与用匹配法求得的结果例 11.4.1 中的式⑬相同.

拉塔的合成解法用于线性问题较简便，用于非线性问题时，或用于需要较多的特殊函数表达内部解的情况时，以及用于需要结合较多的物理概念的问题时，就比较困难了. 而布朗伯格与 Вишик-Люстерник 的合成法避免了这些困难.

匹配法虽然较为繁琐，但仍为普遍有效的方法之一.

11.5 多重尺度法

在变形法和匹配法中对自变量的变换，实际上都是改变自变量的尺度. 在许多问题里，采用多个不同尺度自变量的**多重尺度法**(method of multiple scales)常是有效的. 自 50 年代后期以来，多重尺度法已经在许多领域中得到了广泛的应用，取得了很多成果.

有二种形式的多重尺度法.

1. 多变量展开法(导数展开法)

取线性变换

$$T_m = \varepsilon^m t \quad (m = 0,1,2,\cdots,M), \tag{11.22}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \cdots + \varepsilon^M\frac{\partial}{\partial T_M}, \tag{11.23}$$

求形式解

$$\begin{aligned} u(t;\varepsilon) &= u(T_0,T_1,\cdots,T_M;\varepsilon) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1}\varepsilon^m u_m(T_0,T_1,\cdots,T_M) + O(\varepsilon T_M). \end{aligned} \tag{11.24}$$

这里变量 T_m 比 T_{m-1} 慢，$O(\varepsilon T_M)$ 表明直到 $t=O(\varepsilon^{-M})$，展开式有效.

2. 双变量展开法

取线性变换

$$\xi = \varepsilon t, \quad \eta = (1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \cdots + \varepsilon^M\omega_M)t, \tag{11.25}$$

求形式解

$$\begin{aligned} u(t;\varepsilon) &= \tilde{u}(\xi,\eta;\varepsilon) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1}\varepsilon^m u_m(\xi,\eta) + O(\varepsilon^M), \end{aligned} \tag{11.26}$$

这里，ξ 比 η 慢.

3. 推广的多重尺度法

推广的导数展开法是取

$$T_m = \delta_m(\varepsilon)t \qquad (m = 0,1,\cdots,M) \tag{11.27}$$

或

$$T_m = \delta_m(\varepsilon)g_m(\mu_m(\varepsilon)t) \quad (m = 0,1,\cdots,M), \tag{11.28}$$

推广的双变量展开法是取

$$\xi = \mu(\varepsilon)t, \quad \eta = \sum_{m=0}^{M}\delta_m(\varepsilon)g_m(\mu(\varepsilon)t). \tag{11.29}$$

11.5.1 多变量法(导数展开法)

例 11.5.1 考虑线性阻尼振动问题

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = -2\varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{①}$$

不难求得精确解

$$x = a\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t + \varphi), \tag{②}$$

其中 a,φ 是任意常数. 它关于 ε 的展开式是

$$\begin{aligned} x &= a\left(1 - \varepsilon t + \frac{1}{2}\varepsilon^2t^2 - \cdots\right)\left[\cos(t+\varphi) + \frac{\varepsilon^2}{2}t\sin(t+\varphi) + \cdots\right] \\ &= a\cos(t+\varphi) - \varepsilon at\cos(t+\varphi) \\ &\quad + \varepsilon^2\left[\frac{a}{2}t^2\cos(t+\varphi) + \frac{a}{2}t\sin(t+\varphi)\right] + \cdots \end{aligned} \tag{③}$$

现在用导数展开法求渐近解. 设

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t,$$

并设形式解

$$x = x_0(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon x_1(T_0,T_1,T_2) + \cdots.$$

把此二式代入式①,注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2, \tag{④}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2)^2$$

$$= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + 2\varepsilon^3 D_1 D_2 + \varepsilon^4 D_2^2, \quad ⑤$$

其中 D_m 表示$\frac{\partial}{\partial T_m}$. 并令 ε 的同次幂系数相等，得到关于 x_0、x_1、x_2 的方程：

$$(D_0^2 + 1)x_0 = 0, \quad ⑥$$

$$(D_0^2 + 1)x_1 = -D_0(2D_1 + 1)x_0, \quad ⑦$$

$$(D_0^2 + 1)x_2 = -2D_0(D_1 + 1)x_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2 + 2D_1)x_0. \quad ⑧$$

由式⑥解得

$$x_0 = A_0(T_1, T_2)e^{iT_0} + \bar{A}_0(T_1, T_2)e^{-iT_0} \quad ⑨$$

其中$\bar{A}_0$是 A_0 的共轭复数. 把该式代入式⑦得

$$(D_0^2 + 1)x_1 = -2i(D_1 + 1)A_0 e^{iT_0} + cc \quad ⑩$$

其中 cc 表示前项的共轭复数. 由于非齐次方程⑩右边两项含有因子 $e^{\pm iT_0}$ ($\pm i$ 是特征方程的根), 其解中必定出现含有因子 T_0 的项，就是说必出现长期项. 为使长期项不出现，应适当取 A_0 使 $e^{\pm iT_0}$ 的系数为 0，即应取 A_0 使$(D_1 + 1)A_0 = 0$. 由此解得

$$A_0 = a_0(T_2)e^{-T_1},$$

从而

$$x_0 = (a_0 e^{iT_0} + \bar{a}_0 e^{-iT_0})e^{-T_1}. \quad ⑪$$

式⑩变为$(D_0^2 + 1)x_1 = 0$，解之，得

$$x_1 = A_1(T_1, T_2)e^{iT_0} + \bar{A}_1(T_1, T_2)e^{-iT_0}$$

再把已求得的 x_0，x_1 代入方程⑧，得

$$(D_0^2 + 1)x_2 = -Q(T_1, T_2)e^{iT_0} + cc \quad ⑫$$

其中

$$Q(T_1, T_2) = 2i(D_1 + 1)A_1 + [-a_0(T_2) + 2ia_0'(T_2)]e^{-T_1}.$$

显然，方程⑫的右边也必使其解 x_2 包含长期项，为了消除它，应适

当取 A_1 使 $Q(T_1,T_2)=0$,即应取

$$A_1=\left[a_1(T_2)+\frac{\mathrm{i}}{2}(-a_0+2\mathrm{i}a_0')T_1\right]\mathrm{e}^{-T_1}$$

$$x_1=\left[a_1+\frac{\mathrm{i}}{2}(-a_0+2\mathrm{i}a_0')T_1\right]\mathrm{e}^{-T_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0}+\mathrm{cc} \qquad ⑬$$

考虑式⑪与⑬,虽然因存在因子 e^{-T_1},当 $T_1\to\infty(t\to\infty)$时 x_0,x_1 都趋向 0,但只要 t 大到 $t=O(\varepsilon^{-2})$,即 $T_2=\varepsilon^2 t=O(1)$时,便有 $\varepsilon x_1=O(x_0)$,即 εx_1 不再是前项 x_0 的小量修正,展开式 $x_0+\varepsilon x_1$ 失效.因此,为了使 T_2 大到 $O(1)$时展开式 $x_0+\varepsilon x_1$ 仍有效,就不能允许在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}T_0}$ 的系数中存在含有因子 T_1 的项.这就要适当取 $a_0(T_2)$使 $-a_0+2\mathrm{i}a_0'=0$,即应取

$$a_0(T_2)=a_{00}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}T_2},$$

其中 a_{00}是常数,从而

$$A_1=a_1(T_2)\mathrm{e}^{-T_1}.$$

类似地,利用二阶展开式可确定

$$a_1(T_2)=a_{11}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}T_2},$$

其中 a_{11}是常数.至此,得到二阶展开式

$$\begin{aligned}x=&\left\{\left[a_{00}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(T_0-\frac{1}{2}T_2\right)}+\bar{a}_{00}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(T_0-\frac{1}{2}T_2\right)}\right]\right.\\&\left.+\varepsilon\left[a_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(T_0-\frac{1}{2}T_2\right)}+\bar{a}_{11}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(T_0-\frac{1}{2}T_2\right)}\right]\right\}\mathrm{e}^{-T_1}\\&+O(\varepsilon T_2),\end{aligned}$$

其中 $O(\varepsilon T_2)$表明,直到 t 大到 $t=O(\varepsilon^{-2})(T_2=O(1))$,展开式是有效的.如果参照精确解式②,求满足初始条件 $x(0)=a\cos\varphi$, $\dot{x}(0)=-a(\varepsilon\cos\varphi+\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\varphi)$的解,可得

$$(a_{00}+\bar{a}_{00})+\varepsilon(a_{11}+\bar{a}_{11})=a\cos\varphi,$$

$$(a_{00}-\bar{a}_{00})+\varepsilon(a_{11}-\bar{a}_{11})=\mathrm{i}a\sin\varphi,$$

$$a_{00}+\varepsilon a_{11}=\frac{1}{2}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

从而

$$x = ae^{-T_1}\cos\left(T_0 - \frac{1}{2}T_2 + \varphi\right) + O(\varepsilon T_2)$$

$$= ae^{-\varepsilon t}\cos\left(t - \frac{1}{2}\varepsilon^2 t + \varphi\right) + O(\varepsilon^2 t).$$

利用精确解还可进而求得余项 $O(\varepsilon^2 t)$ 实际上是

$$R = ae^{-\varepsilon t}\left[\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}t + \varphi) - \cos\left(t - \frac{1}{2}\varepsilon^2 t + \varphi\right)\right]$$

$$= -2ae^{-\varepsilon t}\sin\left[\frac{t}{2}\left(\sqrt{1-\varepsilon^2} + 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right) + \varphi\right]$$

$$\cdot \sin\left[\left(-\frac{1}{16}\varepsilon^4 + \cdots\right)t\right]$$

$$= O(\varepsilon^4 t).$$

另外还应注意，对于线性方程，在使用导数展开法时不必把因变量展开，如上例，把式④，⑤代入式①，并令 ε 的同次幂系数为0，得

$$(D_0^2 + 1)x = 0, \tag{⑭}$$

$$D_0(D_1 + 1)x = 0, \tag{⑮}$$

$$(D_1^2 + 2D_0D_2 + 2D_1)x = 0. \tag{⑯}$$

解式⑭得

$$x = A(T_1, T_2)e^{iT_0} + \overline{A}(T_1, T_2)e^{-iT_0}. \tag{⑰}$$

代入式⑮并注意对所有 T_0 成立，得关于 A 的方程

$$(D_1 + 1)A = 0, \tag{⑱}$$

解得

$$A = a(T_2)e^{-T_1}. \tag{⑲}$$

再把式⑰代入式⑯，又得关于 A 的方程

$$(D_1^2 + 2D_1 + 2iD_2)A = 0. \tag{⑳}$$

把式⑲代入式⑳并注意对所有 T_1 成立，得关于 $a(T_2)$ 的方程

$$(2iD_2 - 1)a = 0,$$

解得

$$a(T_2) = a_0 e^{-\frac{1}{2}T_2},$$

其中 a_0 是常数. 从而

$$A = a_0 e^{-\frac{1}{2}T_2} e^{-T_1},$$

$$x = a_0 e^{-T_1} e^{i\left(T_0 - \frac{T_2}{2}\right)} + \mathrm{cc}.$$

若记 $a_0 = \frac{a}{2}e^{i\varphi}$($a$ 是实常数),则得

$$x = a e^{-T_1} \cos\left(T_0 - \frac{T_2}{2} + \varphi\right)$$

$$= a e^{-\varepsilon t} \cos\left(t - \frac{1}{2}\varepsilon^2 t + \varphi\right).$$

例 11.5.2 用导数展开法求范得波(Van der Pol)方程

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \varepsilon(1 - u^2)\frac{du}{dt} \qquad ①$$

的渐近解.

设

$$T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t,$$

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \cdots,$$

则

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2(D_1^2 + 2D_0 D_2) + \cdots.$$

代入式①,并比较 ε 同次幂系数,得关于 x_0, x_1, x_2 的方程

$$(D_0^2 + 1)u_0 = 0, \qquad ②$$

$$(D_0^2 + 1)u_1 = -2D_0 D_1 u_0 + (1 - u_0^2)D_0 u_0, \qquad ③$$

$$(D_0^2 + 1)u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2)u_0 + (1 - u_0^2)D_0 u_1 + (1 - u_0^2)D_1 u_0 - 2u_0 u_1 D_0 u_0. \qquad ④$$

由式②解得

$$u_0 = A(T_1,T_2)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1,T_2)e^{-iT_0}$$

代入式③得

$$(D_0^2+1)u_1 = -i(2D_1A - A + A^2\bar{A})e^{iT_0}$$
$$- iA^3e^{3iT_0} + cc \tag{⑤}$$

为消除长期项，令 e^{iT_0} 的系数为 0，即

$$2D_1A = A - A^2\bar{A}, \tag{⑥}$$

则由式⑤解得

$$u_1 = B(T_1,T_2)e^{iT_0} + \frac{1}{8}iA^3e^{3iT_0} + cc$$

为求 A，记

$$A = \frac{1}{2}a(T_1,T_2)e^{i\varphi(T_1,T_2)}, \tag{⑦}$$

在方程⑥中分离实、虚部，得两个方程

$$D_1\varphi = 0, \quad D_1a = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \tag{⑧}$$

分别解得

$$\varphi = \varphi(T_2), \quad a^2 = \frac{4}{1 + c(T_2)e^{-T_1}}. \tag{⑨}$$

如果只要求 u 的一阶近似，则 $\varphi(T_2)$、$c(T_2)$ 可看作常数，满足初始条件 $u(0)=a_0$，$\frac{d}{dt}u(0)=0$ 的解是

$$u = a\cos t + O(\varepsilon),$$

其中

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right)e^{-\varepsilon t}} \qquad \left(\varphi = 0,\ c = \frac{4}{a_0^2} - 1\right). \tag{⑩}$$

如果要求 u 的二阶近似，则需确定函数 B、φ、c. 为此，把 u_0、u_1 代入式①，得

$$(D_0^2+1)u_2 = Q(T_1,T_2)e^{iT_0} + \bar{Q}(T_1,T_2)e^{-iT_0} + \mathrm{NST}$$

其中

$$Q = -2\mathrm{i}D_1 B + \mathrm{i}(1 - 2A\bar{A})B - \mathrm{i}A^2\bar{B} - 2\mathrm{i}D_2 A$$
$$- D_1^2 A + (1 - 2A\bar{A})D_1 A - A^2 D_1\bar{A} + \frac{1}{8}A^3\bar{A}^2$$

NST 表示不产生长期项的项. 为消除长期项，须令 $Q=0$. 为求 B，假设 $B=\frac{1}{2}\mathrm{i}be^{\mathrm{i}\varphi}$，其中 $b=b(T_1,T_2)$ 为实函数，φ 由式⑦给出，把 A，B 的表达式代入上式中，并令 $Q=0$，分离实、虚部，得

$$D_2 a = 0,\quad a = a(T_1)$$

与

$$2D_1 b - \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)b = 2aD_2\varphi + D_1^2 a$$
$$-\left(1 - \frac{3}{4}a^2\right)D_1 a - \frac{1}{128}a^5. \qquad ⑪$$

把由式⑧所得的

$$1 - \frac{a^2}{4} = \frac{2D_1 a}{a},\ D_1^2 a = \frac{1}{2}D_1 a - \frac{3}{8}a^2 D_1 a,$$
$$a^5 = 16a - 32D_1 a - 8a^2 D_1 a$$

代入式⑪，并以 $\frac{1}{2a}$ 乘该式两边，可得

$$D_1\left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{7}{32}a - \frac{1}{8a}\right)D_1 a - \left(D_2\varphi + \frac{1}{16}\right).$$

关于 T_1 积分之，得

$$\frac{b}{a} = \frac{7}{64}a^2 - \frac{1}{8}\ln a - \left(D_2\varphi + \frac{1}{16}\right)T_1 + b_0(T_2).$$

为使 u_1/u_0 对所有的 T_1 有界，式⑫中 T_1 的系数必须为 0，即 φ 应满足 $D_2\varphi = -\frac{1}{16}$，所以

$$\varphi = -\frac{1}{16}T_2 + \varphi_0$$

注意到式⑨，φ_0 是常数，于是得 u 的二阶渐近展开式

$$
\begin{aligned}
u = {} & a\cos\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \varphi_0\right] \\
& - \varepsilon\left\{\left(\frac{7}{64}a^3 - \frac{1}{8}a\ln a + ab_0\right)\sin\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \varphi_0\right]\right. \\
& \left. + \frac{1}{32}a^3\sin 3\left[\left(1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t + \varphi_0\right]\right\} + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
\qquad ⑫
$$

在$O(\varepsilon^2)$的误差范围内,a由式⑩确定,b_0看作常数,并且以

$$
\varepsilon\left(\frac{7}{64}a^2 - \frac{1}{8}\ln a + b_0\right) \approx \sin\varepsilon\left(\frac{7}{64}a^2 - \frac{1}{8}\ln a + b_0\right),
$$

$$
1 \approx \cos\varepsilon\left(\frac{7}{64}a^2 - \frac{1}{8}\ln a + b_0\right)
$$

代入,并记

$$
\theta = \frac{1}{16}\varepsilon^2 t - \frac{7}{64}\varepsilon a^2 + \frac{1}{8}\varepsilon\ln a - \varphi_0 - \varepsilon b_0
$$

则展开式⑫可进而写成

$$
u = a\cos(t - \theta) - \frac{1}{32}\varepsilon a^3\sin 3(t - \theta) + O(\varepsilon^2).
$$

例 11.5.3 考虑典型的弱非线性不稳定性问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - u_{xx} - u = -u^3, \\
u(x,0) = \varepsilon\cos kx, \quad u_t(x,0) = 0.
\end{cases}
$$

在 11.3.3 节中已用重正化方法求得当 k 远大于 1 或远小于 1 时驻波的一致有效渐近解. 当 $k=1+O(\varepsilon^2)$时,该展开式失效.

现在,求当 $k=1$ 时驻波的渐近展开式. 为方便计,先引进新变量 $\xi=kx$,把问题化为

$$
\begin{cases}
u_{tt} - k^2 u_{\xi\xi} - u = -u^3 \\
u(\xi,0) = \varepsilon\cos\xi, \quad u_t(\xi,0) = 0.
\end{cases}
\qquad ①
$$

设

$$
k = 1 + \varepsilon^2 k_2, \qquad ②
$$

$$
T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t. \qquad ③
$$

求如下形式的渐近解：

$$u(\xi,t;\varepsilon) = u(\xi,T_0,T_1,T_2;\varepsilon) = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \cdots. \quad ①$$

把式②～④代入式①，并比较 ε 同次幂的系数，得

ε 阶：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - u_1 = 0, \\ &u_1|_{T_0=0} = \cos\xi, \ \left.\frac{\partial u_1}{\partial T_0}\right|_{T_0=0} = 0. \end{aligned}\right\} \quad ⑤$$

ε^2 阶：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - u_2 = 0, \\ &u_2|_{T_0=0} = 0, \ \left.\frac{\partial u_2}{\partial T_0}\right|_{T_0=0} = -\left.\frac{\partial u_1}{\partial T_1}\right|_{T_0=0}. \end{aligned}\right\} \quad ⑥$$

ε^3 阶：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_3}{\partial T_0^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} - u_3 \\ &\quad = u_1^3 + 2k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2}, \\ &u_3|_{T_0=0} = 0, \ \left.\frac{\partial u_3}{\partial T_0}\right|_{T_0=0} = -\left.\left(\frac{\partial u_1}{\partial T_2} + \frac{\partial u_2}{\partial T_1}\right)\right|_{T_0=0}. \end{aligned}\right\} \quad ⑦$$

由式⑤求得一阶近似解

$$u_1 = a(T_1,T_2)\cos\xi, \quad a(0,0) = 1 \quad ⑧$$

把此式代入式⑥，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - u_2 = 0, \\ u_2|_{T_0=0} = 0, \ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial T_0}\right|_{T_0=0} = -\left.\dfrac{\partial a}{\partial T_1}\right|_{\substack{T_1=0 \\ T_2=0}} \cos\xi. \end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases} u_2 = [B(T_1,T_2) \cdot T_0 + b(T_1,T_2)]\cos\xi, \\ b(0,0) = 0, \ B(0,0) = -\left.\dfrac{\partial a}{\partial T_1}\right|_{\substack{T_1=0 \\ T_2=0}}. \end{cases}$$

为消除长期项，必须令 $B(T_1,T_2)=0$，由此

$$\left.\frac{\partial a}{\partial T_1}\right|_{\substack{T_1=0\\T_2=0}}=0. \tag{⑨}$$

于是

$$u_2=b(T_1,T_2)\cos\xi,\quad b(0,0)=0$$

把 u_1,u_2 代入式⑦，得

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial T_1^2}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2}-u_3$$

$$=\left(\frac{3}{4}a^3-2k_2a-\frac{\partial^2 a}{\partial T_1^2}\right)\cos\xi+\frac{1}{4}a^3\cos 3\xi$$

为消除长期项，a 必须满足方程

$$\frac{\partial^2 a}{\partial T_1^2}+a\left(2k_2-\frac{3}{4}a^2\right)=0.$$

关于 a 的初始条件，如前面式⑧、⑨得到

$$a\Big|_{\substack{T_1=0\\T_2=0}}=1,\quad \left.\frac{\partial a}{\partial T_1}\right|_{\substack{T_1=0\\T_2=0}}=0,$$

在 $O(\varepsilon T_1)=O(\varepsilon^2 t)$ 量级的误差范围内，a 可以看成 T_1 的函数，满足

$$\begin{cases}a''+\left(2k_2-\dfrac{3}{4}a^2\right)a=0,\\ a(0)=1,\ a'(0)=0,\end{cases}$$

其初积分为

$$(a')^2=\frac{3}{8}(a^2-1)(a^2-\beta),\quad \beta=\frac{16}{3}k_2-1,$$

a 可以用雅可比椭圆函数表示出.

由 $a(T_1)$ 是实函数，方程右边必为正，a^2 必在以 $1,\beta$ 为端点的区间之外. 由于 $a(0)=1$，当 $\beta<1$ 时，a^2 无限增加；而当 $\beta>1$ 时，a^2 在 0 与 1 之间振动. 所以 $\beta=1$ 或 $k_2=3/8$ 是稳定和不稳定的临界值. 由此，中性稳定性的条件是

$$k = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon^2.$$

这与按定义得出的结果相符,而用变形参数法会导致错误的结果.

11.5.2 双变量展开法

为便于比较,仍先用例 11.5.1 来说明方法.

例 11.5.4

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -2\varepsilon\frac{dx}{dt}. \qquad ①$$

设
$$\xi = \varepsilon t,$$
$$\eta = (1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \cdots)t.$$

则

$$\frac{d}{dt} = \varepsilon D_\xi + (1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots)D_\eta,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \varepsilon^2 D_\xi^2 + 2\varepsilon(1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots)D_\xi D_\eta + (1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots)^2 D_\eta^2.$$

(其中 $D_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}$, $D_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta}$),常微分方程①变为偏微分方程

$$[\varepsilon^2 D_\xi^2 + 2\varepsilon(1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots)D_\xi D_\eta + (1 + 2\varepsilon^2\omega_2 + \cdots)D_\eta^2 + 1]x$$
$$= -2\varepsilon[\varepsilon D_\xi + (1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots)D_\eta]x. \qquad ②$$

又设

$$x = x_0(\xi,\eta) + \varepsilon x_1(\xi,\eta) + \varepsilon^2 x_2(\xi,\eta) + \cdots$$

代入式②并比较 ε 同次幂的系数,得关于 x_0,x_1,x_2 的方程

$$(D_\eta^2 + 1)x_0 = 0, \qquad ③$$

$$(D_\eta^2 + 1)x_1 = -2D_\eta(D_\xi + 1)x_0, \qquad ④$$

$$(D_\eta^2 + 1)x_2 = -2D_\eta(D_\xi + 1)x_1 - (D_\xi^2 + 2\omega_2 D_\eta^2 + 2D_\xi)x_0. \qquad ⑤$$

由式③解得

$$x_0 = A_0(\xi)e^{i\eta} + \bar{A}_0(\xi)e^{-i\eta},$$

其中 $\overline{A}_0$ 是 A_0 的共轭复数. 把此式代入式④得

$$(D_\eta^2+1)x_1 = -2i(A_0'+A_0)e^{i\eta}+cc. \qquad ⑥$$

为使该式的解不含长期项,应取 $A_0(\xi)$ 使 $e^{i\eta}$ 的系数为 0,即应取 $A_0(\xi)$ 使

$$A_0'+A_0=0,$$

由此解得

$$A_0=a_0e^{-\xi}$$

其中 a_0 是常数. 从而

$$x_0=(a_0e^{i\eta}+\overline{a}_0e^{-i\eta})e^{-\xi}$$

而式⑤化为 $(D_\eta^2+1)x_1=0$,解得

$$x_1=A_1(\xi)e^{i\eta}+\overline{A}_1(\xi)e^{-i\eta}.$$

再把已求得的 x_0,x_1 代入方程⑤,便得

$$(D_\eta^2+1)x_2=[-2i(A_1'+A_1)+(2\omega_2+1)a_0e^{-\xi}]e^{i\eta}+cc.$$

为消除 x_2 中的长期项,应取 $A_1(\xi)$ 使

$$A_1'+A_1=-\frac{1}{2}i(2\omega_2+1)a_0e^{-\xi},$$

又为了使 A_1 中不含长期项,应取 $\omega_2=-\frac{1}{2}$ 以使此式中 $e^{-\xi}$ 的系数为 0. 从而,由 $A_1'+A_1=0$ 解得

$$A_1=a_1e^{-\xi}$$

a_1 是常数,而

$$x_1=(a_1e^{i\eta}+\overline{a}_1e^{-i\eta})e^{-\xi}.$$

由此得

$$\begin{aligned}x&=x_0+\varepsilon x_1+O(\varepsilon^2)\\&=(a_0+\varepsilon a_1)e^{-\xi}e^{i\eta}+cc+O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

若记 $a_0+\varepsilon a_1=\frac{1}{2}ae^{i\varphi}$,则

$$
\begin{aligned}
x &= a\mathrm{e}^{-\xi}\cos(\eta + \varphi) + O(\varepsilon^2) \\
&= a\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\cos\left(t - \frac{1}{2}\varepsilon^2 t + \cdots + \varphi\right) + \cdots \\
&= a\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\cos\left(t - \frac{1}{2}\varepsilon^2 t + \varphi\right) + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

此结果与导数展开法的结果一致.

例 11.5.5 用双变量法求范得波(Van der Pol)方程

$$
\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + u = \varepsilon(1 - u^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{①}
$$

的渐近解.

设

$$
\xi = \varepsilon t,\ \eta = (1 + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \cdots)t,
$$

$$
u = u_0(\xi,\eta) + \varepsilon u_1(\xi,\eta) + \varepsilon^2 u_2(\xi,\eta) + \cdots,
$$

代入方程①,并比较 ε 同次幂的系数,得

$$
(D_\eta^2 + 1)u_0 = 0, \tag{②}
$$

$$
(D_\eta^2 + 1)u_1 = -2D_\xi D_\eta u_0 + (1 - u_0^2)D_\eta u_0 \tag{③}
$$

$$
\begin{aligned}
(D_\eta^2 + 1)u_2 = {} & -2D_\xi D_\eta u_1 - D_\xi^2 u_0 - 2\omega_2 D_\eta^2 u_0 \\
& + (1 - u_0^2)(D_\eta u_1 + D_\xi u_0) \\
& - 2u_0 u_1 D_\eta u_0
\end{aligned} \tag{④}
$$

由式②解得

$$
u_0 = A_0(\xi)\cos\eta + B_0(\xi)\sin\eta,
$$

代入式③,得

$$
\begin{aligned}
(D_\eta^2 + 1)u_1 = {} & \left[-2B_0' + \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4}\right)B_0\right]\cos\eta \\
& + \left[2A_0' - \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4}\right)A_0\right]\sin\eta \\
& + \frac{1}{4}(A_0^3 - 3A_0B_0^2)\sin 3\eta
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{4}(B_0^3-3A_0^2B_0)\cos3\eta. \qquad ⑤$$

为消除长期项，令 $\cos\eta$、$\sin\eta$ 的系数为 0，即

$$\begin{cases} -2B_0'+\left(1-\dfrac{A_0^2+B_0^2}{4}\right)B_0=0, & ⑥ \\ 2A_0'-\left(1-\dfrac{A_0^2+B_0^2}{4}\right)A_0=0, & ⑦ \end{cases}$$

以 A_0 乘式⑦减去以 B_0 乘式⑥，并以 ρ 表示零次解 u_0 的振幅 a 的平方，即记 $\rho=a^2=A_0^2+B_0^2$，则得

$$\frac{d\rho}{d\xi}-\rho\left(1-\frac{1}{4}\rho\right)=0. \qquad ⑧$$

解之，得

$$a^2=\frac{4}{1+\left(\dfrac{4}{a_0^2}-1\right)\cdot e^{-\xi}}, \qquad ⑨$$

其中 $a_0=a(0)$ 是初始振幅。再以 A_0 乘式⑥加上以 B_0 乘式⑦，并除以 B_0^2，便得

$$\left(\frac{A_0}{B_0}\right)'=0 \quad 或 \quad \frac{A_0}{B_0}=常数 \qquad ⑩$$

记 $A_0=a\cos\varphi$，$B_0=-a\sin\varphi$（其中 φ 表示相位），则 $A_0/B_0=-\operatorname{ctg}\varphi$。由式⑩知 $\varphi=\varphi_0$（常数），于是 u_0 可表示为

$$u_0=a\cos(\eta+\varphi_0)$$

注意到式⑥、⑦，可由式⑤解得

$$u_1=A_1(\xi)\cos(\eta+\varphi_0)+B_1(\xi)\sin(\eta+\varphi_0)-\frac{a^3}{32}\sin3(\eta+\varphi_0).$$

把 u_0、u_1 代入方程①、得

$$(D_\eta^2+1)u_2=\left[2B_1'+\left(1-\frac{1}{4}a^2\right)B_1-a'-2\omega_2a\right.$$

$$+\left[\left(1-\frac{3}{4}a^2\right)a'+\frac{a^5}{128}\right]\cos(\eta+\varphi_0)$$

$$+\left[2A_1'-\left(1-\frac{3}{4}a^2\right)A_1\right]\sin(\eta+\varphi_0)+\text{NST},$$

其中NST 表示不产生长期项的项. 为了消除长期项,令

$$2A_1'-\left(1-\frac{3}{4}a^2\right)A_1=0,$$

$$2B_1'-\left(1-\frac{1}{4}a^2\right)B_1=2\omega_2 a-a''+\left(1-\frac{3}{4}a^2\right)a'+\frac{a^5}{128},$$

利用式⑧,可把它们改写成

$$\frac{A_1'}{A_1}=3\frac{a'}{a}-1,$$

$$\left(\frac{B_1}{a}\right)'=\left(\omega_2+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{7}{32}a-\frac{1}{8a}\right)a'.$$

解之,得

$$A_1=a_1a^3\mathrm{e}^{-\xi},$$

$$B_1=a\left(\omega_2+\frac{1}{16}\right)\xi+b_1a+\frac{1}{8}a\ln a-\frac{7}{64}a^3.$$

其中 a_1,b_1 是常数. 因为当 $t\to\infty$ 时,$\xi\to\infty$,$a\to2$,$B_1\to\infty$,u_1/u 无界,所以必须取 $\omega_2=-1/16$.

于是得 u 的二阶近似

$$u=(a+\varepsilon a^3a_1\mathrm{e}^{-\varepsilon t})\cos\left[\left(1-\frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t+\varphi_0\right]$$

$$-\varepsilon\left\{\left(\frac{7}{64}a^3-\frac{1}{8}a\ln a+b_1a\right)\sin\left[\left(1-\frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t+\varphi_0\right]\right.$$

$$\left.+\frac{a^3}{32}\sin3\left[\left(1-\frac{1}{16}\varepsilon^2\right)t+\varphi_0\right]\right\}+O(\varepsilon^3).$$

其中 a 由式⑨确定. 只要把这里的 $a+\varepsilon a^3a_1$ 看作例 11.5.2 中的 a_0,这个结果就与用导数展开法得到的结果完全一致了.

11.5.3 推广的多重尺度法

为便于比较，仍先用例 11.5.1 来说明推广的双变量法.

例 11.5.6 考虑线性阻尼振动问题

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=-2\varepsilon\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{①}$$

设

$$\xi=\varepsilon t,$$

$$\eta=\varepsilon^{-1}g_{-1}(\xi)+g_0(\xi)+\varepsilon g_1(\xi)+\cdots,$$

其中 g_i 满足 $g_i(0)=0$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon(\varepsilon^{-1}g'_{-1}+g'_0+\varepsilon g'_1+\cdots)\frac{\partial}{\partial\eta}, \tag{②}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}=&\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2\varepsilon^2(\varepsilon^{-1}g'_{-1}+g'_0+\varepsilon g'_1+\cdots)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\\&+\varepsilon^2(\varepsilon^{-1}g'_{-1}+g'_0+\varepsilon g'_1+\cdots)^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\\&+\varepsilon^2(\varepsilon^{-1}g''_{-1}+g''_0+\varepsilon g''_1+\cdots)\frac{\partial}{\partial\eta}.\end{aligned} \tag{③}$$

又设

$$x=x_0(\xi,\eta)+\varepsilon x_1(\xi,\eta)+\varepsilon^2x_2(\xi,\eta)+\cdots. \tag{④}$$

把式②～④代入式①，并比较 ε 同次幂的系数，便得关于 x_0，x_1 的方程

$$g'^2_{-1}\frac{\partial^2x_0}{\partial\eta^2}+x_0=0, \tag{⑤}$$

$$\begin{aligned}g'^2_{-1}\frac{\partial^2x_1}{\partial\eta^2}+x_1=&-2g'_{-1}g'_0\frac{\partial^2x_0}{\partial\eta^2}-2g'_{-1}\frac{\partial^2x_0}{\partial\xi\partial\eta}\\&-(g''_{-1}+2g'_{-1})\frac{\partial x_0}{\partial\eta}.\end{aligned} \tag{⑥}$$

由式⑤解得

$$x_0 = A_0(\xi)e^{i\eta/g'_{-1}} + \bar{A}_0(\xi)e^{-i\eta/g'_{-1}},$$

代入式⑥，则

$$g'^2_{-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + x_1 = \left[\left(-\frac{2g'_0}{g'_{-1}} - i\frac{g''_{-1}}{g'_{-1}} + 2i\right)A_0 + 2ig'_{-1}\left(\frac{A_0}{g'_{-1}}\right)' - 2\frac{g''_{-1}}{g'^2_{-1}}A_0\eta\right]\exp\left(i\frac{\eta}{g'_{-1}}\right) + cc. \qquad ⑦$$

为使 x_1 中不含长期项，$\exp(\pm i\eta/g'_{-1})$ 前的系数必须对所有的 η 都为零；又为使 $A_0(\xi)\neq 0$，必须同时有

$$g''_{-1} = 0. \qquad ⑧$$

$$\left(-\frac{2g'_0}{g'_{-1}} + i\frac{g''_{-1}}{g'_{-1}} + 2i\right)A_0 + 2ig'_{-1}\left(\frac{A_0}{g'_{-1}}\right)' = 0. \qquad ⑨$$

为满足式⑧，可取

$$g_{-1} = \xi$$

满足 $g_{-1}(0)=0$. 代入式⑨，得

$$A_0' + (1 + ig_0')A_0 = 0.$$

解得

$$A_0 = a_0e^{-\xi - ig_0(\xi)}$$

(a_0 是常数). 由此

$$x_0 = a_0e^{-\xi - ig_0 + i\eta} + cc.$$

注意到 $\eta = \frac{\xi}{\varepsilon} + g_0 + \varepsilon g_1 + \cdots$，$x_0$ 与 g_0 无关，不妨取

$$g_0(\xi) \equiv 0,$$

于是

$$A_0 = a_0e^{-\xi}, \quad x_0 = (a_0e^{i\eta} + \bar{a}_0e^{-i\eta})e^{-\xi} \qquad ⑩$$

由于式⑦右边恒为0，解得

$$x_1 = A_1(\xi)e^{i\eta} + \bar{A}_1(\xi)e^{-i\eta} \qquad ⑪$$

将式②～④代入式①，比较 ε^2 项系数，并用 $g_0=\xi, g_1=0$，得

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2}+x_2=-2\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi \partial \eta}-2\frac{\partial x_1}{\partial \eta}$$

$$-\frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2}-2g_1'\frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2}-\frac{\partial x_0}{\partial \xi},$$

再以式⑩、⑪代入，便得

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2}+x_2=-[2\mathrm{i}(A_1'+A_1)-(2g_1'+1)a_0\mathrm{e}^{-\xi}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}+\mathrm{cc}.$$

为消去 x_2 中的长期项而让 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}$ 的系数为 0，得

$$A_1'+A_1=-\frac{1}{2}\mathrm{i}(2g_1'+1)a_0\mathrm{e}^{-\xi};$$

又为 A_1 中不出现长期项而让 $\mathrm{e}^{-\xi}$ 的系数为 0，即 $2g_1'+1=0$，为此取

$$g_1=-\frac{1}{2}\xi$$

满足 $g_1(0)=0$. 由此

$$A_1=a_1\mathrm{e}^{-\xi}$$

$$x_1=(a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}+\bar{a}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta})\mathrm{e}^{-\xi}$$

若记 $a_0+\varepsilon a_1=\frac{1}{2}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则

$$\begin{aligned}x&=a\mathrm{e}^{-\xi}\cos(\eta+\varphi)+O(\varepsilon^2)\\&=a\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\cos\left(t-\frac{1}{2}\varepsilon^2 t+\cdots+\varphi\right)+O(\varepsilon^2)\\&=a\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\cos\left(t-\frac{1}{2}\varepsilon^2 t+\varphi\right)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

这个结果与导数展开法和双变量法的结果一致.

例 11.5.7

$$\begin{cases}\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+(2x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0, & ①\\ y(0)=\alpha,\ y(1)=\beta. & ②\end{cases}$$

由于小参数 ε 乘最高阶导数，直接展开式不可能同时满足两个边界条件，$x=0$ 附近是边界层. 可以利用匹配法先求出内、外展开式，然后再合成统一的一致有效展开式；这里利用多重尺度法，直接给出一致有效的展开式.

设

$$\xi = x, \tag{3}$$

$$\eta = \frac{g_{-1}(x)}{\varepsilon} + g_0(x) + \varepsilon g_1(x) + \cdots, \tag{4}$$

其中，要求 $g_{-1}(0)=g_0(0)=g_1(0)=\cdots=0$，且当 $x\to 0$ 时 $g_{-1}(x)\to x$，η 接近 x/ε. 这时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = D_\xi + [g'_{-1}/\varepsilon + g'_0 + \varepsilon g'_1 + \cdots]D_\eta, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = {} & D_\xi^2 + 2[g'_{-1}/\varepsilon + g'_0 + \varepsilon g'_1 + \cdots]D_\xi D_\eta \\ & + [g'_{-1}/\varepsilon + g'_0 + \varepsilon g'_1 + \cdots]^2 D_\eta^2 \\ & + [g''_{-1}/\varepsilon + g''_0 + \varepsilon g''_1 + \cdots]D_\eta,\end{aligned} \tag{6}$$

（其中 $D_\xi=\frac{\partial}{\partial\xi}$，$D_\eta=\frac{\partial}{\partial\eta}$）. 现在要求如下形式的展开式：

$$y = y_0(\xi,\eta) + \varepsilon y_1(\xi,\eta) + \cdots \tag{7}$$

把以上设的条件③～⑦代入式①，并令 ε 同次幂的系数为 0，得关于 y_0, y_1, y_2 的方程

$$g'_{-1}[g'_{-1}D_\eta^2 y_0 + (2\xi+1)D_\eta y_0] = 0, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} & g'_{-1}[g'_{-1}D_\eta^2 y_1 + (2\xi+1)D_\eta y_1] \\ & + 2g'_{-1}D_\xi D_\eta y_0 + 2g'_{-1}g'_0 D_\eta^2 y_0 \\ & + (2\xi+1)D_\xi y_0 + [g''_{-1} + (2\xi+1)g'_0]D_\eta y_0 \\ & + 2y_0 = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} & g'_{-1}[g'_{-1}D_\eta^2 y_2 + (2\xi+1)D_\eta y_2] \\ & + 2g'_{-1}D_\xi D_\eta y_1 + 2g'_{-1}g'_0 D_\eta^2 y_1 \\ & + (2\xi+1)D_\xi y_1 + [g''_{-1} + (2\xi+1)g'_0]D_\eta y_1 + 2y\end{aligned}$$

$$+ 2g'_{-1}D_\xi D_\eta y_0 + (g_0'^2 + 2g'_{-1}g'_1)D_\eta^2 y_0 + D_\xi^2 y_0$$
$$+ [g''_{-1} + (2\xi + 1)g'_1]D_\eta y_0 = 0. \qquad ⑩$$

由 $g'_{-1} \neq 0$(因当 $x \to 0$ 时,$g_{-1}(x) \to x$),式⑧的解是

$$y_0 = A_0(\xi) + B_0(\xi)e^{-\gamma(\xi)\eta}, \qquad ⑪$$

其中

$$\gamma(\xi) = (2\xi + 1)/g'_{-1}(\xi). \qquad ⑫$$

把式⑪,⑫代入式⑨得

$$g'^2_{-1}(D_\eta^2 + \gamma D_\eta)y_1$$
$$= [(2\xi + 1)A'_0 + 2A_0]$$
$$+ \{g'^2_{-1}\gamma\gamma' B_0\eta + [-2g'_{-1}(B_0\gamma)' + (2\xi + 1)B'_0$$
$$+ (2 - \gamma g''_{-1} + g'_{-1}g'_0\gamma^2)B_0]\}e^{-\gamma\eta}.$$

为使 y_1/y_0 对所有 η 有界,右边第一项和 $e^{-\gamma\eta}$ 的系数必须对于 η 恒等于 0,注意到 $g'_{-1} \neq 0, \gamma \neq 0$,必须

$$(2\xi + 1)A'_0 + 2A_0 = 0, \qquad ⑬$$

$$\gamma' B_0 = 0, \qquad ⑭$$

$$2g'_{-1}(B_0\gamma)' - (2\xi + 1)B'_0 - (2 - \gamma g''_{-1} + g'_{-1}g'_0\gamma^2)B_0 = 0. \qquad ⑮$$

于是解得

$$y_1 = A_1(\xi) + B_1(\xi)e^{-\gamma\eta}.$$

由式⑬解得

$$A_0(\xi) = \frac{a_0}{2\xi + 1}$$

其中 a_0 是积分常数. 为使 y_0 能满足两个边界条件,应有 $B_0(\xi) \neq 0$;由式⑭,应有 $\gamma' = 0$,不妨取

$$\gamma(\xi) = 1, \qquad ⑯$$

由式⑫,有

$$g_{-1}(\xi) = \xi^2 + \xi \qquad ⑰$$

（满足 $g_1(0)=0$）. 把式⑯、⑰代入式⑮，得

$$B_0' - g_0'B_0 = 0$$

解之，得

$$B_0(\xi) = b_0 e^{g_0(\xi)},$$

其中 b_0 是另一个积分常数. 于是得一阶近似

$$\begin{aligned} y &= y_0 + O(\varepsilon) \\ &= \frac{a_0}{2\xi+1} + b_0 e^{-g_1(\xi)/\varepsilon} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

由于展开式中不出现 $g_0(\xi)$，不妨取

$$g_0(\xi) = 0.$$

为求二阶近似，把 y_0、y_1 等代入式⑩，得

$$\begin{aligned} &(2\xi+1)^2(D_\eta^2 + D_\eta)y_2 \\ &= -\left[(2\xi+1)A_1' + 2A_1 + \frac{8a_0}{(2\xi+1)^3}\right] \\ &\quad + (2\xi+1)(B_1' - b_0 g_1')e^{-\eta} \end{aligned}$$

为使 y_2/y_1 对所有 η 有界，必须

$$(2\xi+1)A_1' + 2A_1 + \frac{8a_0}{(2\xi+1)^3} = 0 \tag{18}$$

$$B_1' - b_0 g_1' = 0 \tag{19}$$

由式⑱解得

$$A_1 = \frac{a_1}{2\xi+1} + \frac{2a_0}{(2\xi+1)^3}$$

其中 a_1 是积分常数. 为满足式⑲，可让 $B_1'=0$，$g_1'=0$，为此只要取

$$B_1(\xi) = b_1$$

$$g_1(\xi) = 0$$

其中 b_1 为积分常数，g_1 满足 $g_1(0)=0$. 于是，y 的二阶近似为

$$y = \frac{a_0}{1+2x} + b_0 e^{-(x^2+x)/\varepsilon}$$

$$
+\varepsilon\left\{\frac{a_1}{1+2x}+\frac{2a_0}{(1+2x)^3}+b_1\mathrm{e}^{-(x^2+x)/\varepsilon}\right\}
$$

$$
+O(\varepsilon^2).
$$

利用边界条件，可得 $a_0=3\beta, b_0=\alpha-3\beta, a_1=-2\beta/3, b_1=-16\beta/3$. 因此该式成为

$$
y=\frac{3\beta}{1+2x}+(\alpha-3\beta)\mathrm{e}^{-(x^2+x)/\varepsilon}
$$

$$
+\varepsilon\left[\frac{2\beta}{3(1+2x)}-\frac{6\beta}{(1+2x)^3}+\frac{16}{3}\beta\mathrm{e}^{-(x^2+x)/\varepsilon}\right]
$$

$$
+O(\varepsilon^2).
$$

参考文献

1. O'Malley R E 著，江福汝等译. 奇异摄动引论. 科学出版社，1983
2. Nayfeh A H 著，王辅俊等译. 摄动方法. 上海科技出版社，1984
3. 钱伟长主编. 奇异摄动理论及其在力学中的应用. 科学出版社，1981
4. 黄用宾等. 摄动法简明教程. 上海交大出版社，1986

附录

特殊函数表

	函数记号	名称
1	${}_AF_B((a);(b);z) = {}_AF_B\left(\begin{matrix}a_1,\cdots,a_A;z\\ b_1,\cdots,b_B\end{matrix}\right)$ 其中 $(a) = a_1, a_2, \cdots, a_A$ $(b) = b_1, b_2, \cdots, b_B$ ${}_pF_q(\alpha_1,\cdots,\alpha_p;\beta_1,\cdots,\beta_q;z)$ $= {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1,\cdots,\alpha_p;\\ \beta_1,\cdots,\beta_q;\end{matrix} z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{p}(\alpha_i)_n}{\prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_n} \frac{z^n}{n!}$	广义超几何函数 (generalized hypergeometric function)
2	$F(a,b;c;z) \equiv {}_2F(a,b;c;z)$	超几何函数 (hypergeometric function)
3	${}_1F_1(a;c;z) = \Phi(a,c;z)$	库默尔函数 (Kummer function)
4	$H(x) = \begin{cases}1, & x \geqslant 0\\ 0, & x < 0\end{cases}$	赫维赛德函数 (Heaviside function)

续表

	函数记号	名称
5	$x_+^a=\begin{cases}x^a, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $x_-^a=\begin{cases}0, & x\geqslant 0\\ (-x)^a, & x<0\end{cases}$	截断幂函数 (truncated power function)
6	$B(a,b)=\int_0^1(1-x)^{a-1}x^{b-1}\mathrm{d}x$ $\mathrm{Re}a>0,\quad \mathrm{Re}b>0$	贝塔函数 (Beta function)
7	$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x,\qquad \mathrm{Re}s>0$	欧拉-伽马函数 (Euler Gamma function)
8	$\Gamma\begin{bmatrix}a_1,a_2,\cdots,a_A\\ b_1,b_2,\cdots,b_B\end{bmatrix}=\Gamma[(a);(b)]=\dfrac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\cdots\Gamma(a_A)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\cdots\Gamma(b_B)}$ $\Gamma\begin{bmatrix}(a)\pm s\\ (b)\pm s\end{bmatrix}=\Gamma\begin{bmatrix}a_1\pm s,a_2\pm s,\cdots,a_A\pm s\\ b_1\pm s,b_2\pm s,\cdots,b_B\pm s\end{bmatrix}$ 其中 $(a)=a_1,a_2,\cdots,a_A$ $(b)=b_1,b_2,\cdots,b_B$	伽马函数乘积之比 (ration of products of Gamma function)
9	$\Delta(k,a)=\dfrac{a}{k},\dfrac{a+1}{k},\dfrac{a+2}{k},\cdots,\dfrac{a+k-1}{k}$ $k=1,2,3,\cdots$	特殊 k 维向量 (special k dimentional vector)
10	$\Gamma_k\begin{bmatrix}(a)\\ (b)\end{bmatrix}=\Gamma\begin{bmatrix}\Delta(k,a_1),\cdots,\Delta(k,a_A)\\ \Delta(k,b_1),\cdots,\Delta(k,b_B)\end{bmatrix}$ $\Gamma_3\begin{bmatrix}a+3s\\ b-3s\end{bmatrix}=$ $\Gamma\begin{bmatrix}a/3+s,(a+1)/3+s,(a+2)/3+s\\ b/3-s,(b+1)/3-s,(b+2)/3-s\end{bmatrix}$	

续表

	函　数　记　号	名　称
11	$\psi(a,c;z)=\dfrac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} e^{-zt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}dt$ $\mathrm{Re}a>0,\quad \mathrm{Re}z>0$	特里科米函数 (Tricomi function)
12	$a/bc\equiv\dfrac{a}{b}c,\quad a/(bc)=\dfrac{a}{bc}$ $a+b/c+d\equiv a+\dfrac{b}{c}+d$ $a+b/(c+d)\equiv a+\dfrac{b}{c+d}$	
13	$C(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\dfrac{\cos t}{t}dt$ $\dfrac{1}{2}-C(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}\dfrac{\cos t}{t}dt$	菲涅耳余弦积分 (Fresnel cosine integral)
14	$C_i(x)=-\int_x^{\infty}\dfrac{\cos t}{t}dt$	余弦积分 (cosine integral)
15	$C_n^{\lambda}(z)=\dfrac{(2\lambda)_n}{n!}F(-n,n+2\lambda;\lambda+1/2;\dfrac{1-z}{2})$ $n=0,1,2,\cdots$	盖根鲍尔多项式 (Gegenbauer polynomial)
16	$D_{\nu}(z)=2^{\nu/2}e^{-z^2/4}\psi\left(-\dfrac{\nu}{2},\dfrac{1}{2};\dfrac{z^2}{2}\right)$	双曲柱函数 (parabolic cylinder function) 韦伯函数 (Weber function)
17	$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ $=\dfrac{\pi}{2}F(-1/2,1/2;1;k^2)$ $\lvert k\rvert<1$	第二类全椭圆积分 (complete elliptic integral of the second kind)

续表

	函数记号	名称
18	$\mathbf{E}_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\nu\varphi - z\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$ $=2(\pi\nu)^{-1}\sin^2(\pi\nu/2)\,{}_1F_2(1;1-\nu/2,1+\nu/2;-z^2/4)-2z[\pi(1-\nu^2)]^{-1}$ $\times\cos^2(\pi\nu/2)\,{}_1F_2(1;(3+\nu)/2,(3-\nu)/2;-z^2/4)$	韦伯函数 (Weber function)
19	$\mathbf{E}_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(2\sin\varphi)^\mu\sin(\nu\varphi - z\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$ $=\sin(\pi\nu/2)\Gamma\begin{bmatrix}\mu+1\\1+(\mu+\nu)/2,1+(\mu-\nu)/2\end{bmatrix}$ ${}_2F_3\begin{pmatrix}(\mu+1)/2,1+\mu/2;-z^2/4\\1/2,1+(\mu+\nu)/2,1+(\mu-\nu)/2;\end{pmatrix}$ $-z\cos(\pi\nu/2)$ $\times\Gamma\begin{bmatrix}\mu+2\\(3+\mu+\nu)/2,(3+\mu-\nu)/2\end{bmatrix}$ ${}_2F_3\begin{pmatrix}\mu/2+1,(\mu+3)/2;-z^2/4\\3/2,(3+\mu+\nu)/2,(3+\mu-\nu)/2;\end{pmatrix}$	广义韦伯函数 (generalized Weber function)
20	$\mathrm{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\mathrm{d}t=-e^x\psi(1,1;-x)$, $x<0$	指数积分 (exponential integral)
21	$\overline{\mathrm{Ei}}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[\mathrm{Ei}(x+i0)+\mathrm{Ei}(x-i0)]=\gamma+\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k\cdot k!}$, $x>0$	Ei(x) 的实部 (real part of Ei(x))

	函 数 记 号	名 称
22	$\mathrm{erf}(x) = \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} dt$ $= 2\pi^{-1/2} x\, {}_1F_1(1/2;3/2;-x^2)$	误差函数(error function)
23	$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2} dt$ $= \pi^{-1/2} e^{-x^2} \psi(1/2,1/2;x^2)$	余补误差函数(complementary error function)
24	$\mathrm{H}_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}\frac{1}{\Gamma(\nu+3/2)}$ $\times\ {}_1F_2(1;3/2,\nu+3/2;-z^2/4)$	斯特鲁夫函数(Struve function)
25	$\mathrm{H}_\nu^0(z) = \mathrm{J}_{\nu+2}$, $\mathrm{H}_\nu^1(z) = \mathrm{H}_\nu(z)$	广义斯特鲁夫函数
26	$\mathrm{H}_n(z) = (-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}$ $= 2^n z\psi((1-n)/2,3/2;z^2)$, $n = 0,1,2,\cdots$	埃尔米特多项式(Hermite polynomial)
27	$\mathrm{I}^\alpha_{a+} f(x) = \int_a^x f(t)\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dt$; $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $(\mathrm{I}^\alpha_{a+} f(x) = (\mathrm{I}_{a+}^{-\alpha})^{-1} f(x)$, $\mathrm{Re}\,\alpha < 0)$, $\mathrm{I}^\alpha_{a+} f(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{I}_{a+}^{1+\alpha} f(x)$, $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$	黎曼-刘维尔积分(Riemann-Liouville integral)
28	$\mathrm{I}^\alpha_- f(x) = \int_x^\infty f(t)\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dt$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ $(\mathrm{I}^\alpha_- f(x) = (\mathrm{I}_-^{-\alpha})^{-1} f(x)$, $\mathrm{Re}\,\alpha < 0)$, $\mathrm{I}^\alpha_- f(x) = -\frac{d}{dx}\mathrm{I}_-^{1+\alpha} f(x)$, $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$, $\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$	外尔分式积分(Weyl fractional integral)

续表

	函数记号	名称
29	$J_{\nu}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_0F_1(\nu+1;\ -z^2/4)$	第一类贝塞尔函数 (Bessel function of the first kind)
30	$Y_{\nu}(z)=N_{\nu}(z)=-\frac{1}{\pi}\Big[\Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}{}_0F_1(1-\nu;$ $-z^2/4)+\cos\pi\nu\,\Gamma(-\nu)$ $\times\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}{}_0F_1(1+\nu;\ -z^2/4)\Big]$	第二类贝塞尔函数（诺伊曼函数）
31	$H^{(1)}_{\nu}(z)=J_{\nu}(z)+iY_{\nu}(z)$ $H^{(2)}_{\nu}(z)=J_{\nu}(z)-iY_{\nu}(z)$	第三类贝塞尔函数
32	$I_{\nu}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_0F_1\left(-;\nu+1;\frac{z^2}{4}\right)$	第一类变型的贝塞尔函数 (modified Bessel function of the first kind)
33	$J^{\mu}_{\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!\Gamma(1+\nu+\mu k)},\quad \mu>-1$ $J^{\alpha}_{\beta-1}(z)=\Phi(\beta,-\alpha;\ -z),\qquad 0<\alpha<1$	贝塞尔－麦特朗 (Bessel-Maitland) 函数 赖特(Wright)函数
34	$J^{\mu}_{\nu,\lambda}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{\nu+2\lambda+2k}}{\Gamma[1+\lambda+k]\Gamma[1+\lambda+\nu+\mu k]}$, $\mu>0$, $J^{\mu}_{\nu,0}(z)=(z/2)^{\nu}J^{\mu}_{\nu}(z^2/4)$, $J^{1}_{\nu,0}(z)=J_{\nu}(z)$	广义贝塞尔－麦特朗函数

	函 数 记 号	名 称
35	$\mathbf{J}_\nu(z)=\pi^{-1}\int_0^\pi\cos(\nu\varphi-z\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$ $=(\pi\nu)^{-1}\sin(\pi\nu)\,{}_1F_2(1;1+\nu/2,$ $1-\nu/2;-z^2/4)+[\pi(1-\nu^2)]^{-1}$ $\times\sin(\pi\nu)\,{}_1F_2(1;(3+\nu)/2,(3-\nu)/2;$ $-z^2/4)$	安杰函数 (Anger function)
36	$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ $=\frac{\pi}{2}F(1/2,1/2,1;k^2),$ $\|k\|<1$	第一类椭圆积分 (elliptic integral of the first kind)
37	$K_\nu(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\Gamma(-\nu)\,{}_0F_1(1+\nu;z^2/4)$ $+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\Gamma(\nu)\,{}_0F_1(1-\nu;z^2/4)$	麦克唐纳德(Macdonald)函数或克尔文(Kelvin)函数
38	$\mathbf{L}_\nu(z)=\frac{2^{-\nu}z^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+3/2)}\,{}_1F_2(1;\frac{3}{2},\frac{3}{2}+\nu;\frac{z^2}{4})$	变型斯特鲁夫(Struve)函数
39	$L_n^\alpha(z)$ 或 $L_n^{(\alpha)}(z)=\frac{e^z z^{-\alpha}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}[e^{-z}z^{n+\alpha}]$ $=(\alpha+1)_n(n!)^{-1}\,{}_1F_1(-n;\alpha+1;z),$ $n=0,1,2,\cdots,$ $L_n(z)=L_n^0(z)$	拉盖尔(Laguerre)多项式或广义拉盖尔多项式
40	$\mathrm{L}^n(z)=\sum_k\frac{z^k}{k^n},\quad \|z\|<1,\quad n=1,2,\cdots$	多项对数 (polylogarithm)

	函　数　记　号	名　称
41	$M_{\kappa,\mu}(z)=e^{-z/2}z^{c/2}\,{}_1F_1(a;c;z)$, $a=1/2-\kappa+\mu$, $c=2\mu+1$	退化的惠特克(Wittaker)超几何函数
42	$P_n(z)=\dfrac{2^{-n}}{n!}\dfrac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$ $=F(-n,1+n;1;(1-z)/2)$, $n=0,1,2,\cdots$	勒让德多项式
43	$P_\nu^\mu(z)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}F(-\nu,1+\nu;1-\mu;(1-z)/2)$, $\lvert\arg(z+1)\rvert<\pi$	第一类伴随勒让德函数(associated Legendre function of the first kind)
44	$P_\nu^\mu(x)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2}F\left(-\nu,1+\nu;1-\mu;\dfrac{1-x}{2}\right)$, $\lvert x\rvert<1$	
45	$P_\nu(z)=P_\nu^0(z)$	
46	$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\dfrac{(1+\alpha)_n}{n!}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;1+\alpha;\dfrac{1-z}{2}\right)$, $n=0,1,2,\cdots$	雅可比多项式(Jacobi polynomail)

续表

	函　数　记　号	名　称
47	$Q_\nu^\mu(z) = \frac{2^{-\nu-1}}{\Gamma(\nu+3/2)}\Gamma(\mu+\nu+1)e^{i\mu\pi}\sqrt{\pi}$ $\times z^{-\mu-\nu-1}(z^2-1)^{\mu/2}F((\mu+\nu+1)/2,$ $(\mu+\nu+2)/2,\nu+3/2,z^{-2}),$ $\lvert\arg(z\pm1)\rvert<\pi,\ \lvert\arg z\rvert<\pi$	第二类伴随勒让德函数 (associated Legendre function of the second kind)
48	$Q_\nu^\mu(x) = (1/2)e^{-i\mu\pi}[e^{-i\mu\pi/2}Q_\nu^\mu(x+i0)$ $+e^{i\mu\pi/2}Q_\nu^\mu(x-i0)],$ $\lvert x\rvert<1$	
49	$Q_\nu(z) = Q_\nu^0(z)$	第二类勒让德函数
50	$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,$ $\frac{1}{2} - S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$	菲涅耳正弦积分 (Fresnel sine integral)
51	$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$	正弦积分 (sine integral)
52	$\mathrm{si}(x) = \mathrm{Si}(x) - \frac{\pi}{2} = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t}dt$	
53	$s_{\mu,\nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)}{}_1F_2(1;(\mu-\nu$ $+3)/2;(\mu+\nu+3)/2;-z^2/4)$	洛默尔函数 (Lommel function)
54	$T_n(z) = \cos(n\cos^{-1}z)$ $= F(-n,n;1/2;(1-z)/2),$ $n = 0,1,2,\cdots$	切比雪夫多项式(第一类)

续表

	函　数　记　号	名　称
55	$U_n(z)=\frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}z]}{\sqrt{1-z^2}}=(n+1)F(-n,$ $n+2;3/2;(1-z)/2), n=0,1,2,\cdots$	切比雪夫多项式(第二类)
56	$W_{\kappa,\mu}(z)=e^{-z/2}z^{c/2}\psi(a,c;z)$, $a=1/2-\kappa+\mu,\quad c=2\kappa+1$	惠特克退化超几何函数 (Wittaker degenerate hypergeometric function)
57	$\Gamma(a,x)=\int_x^\infty e^{-t}t^{a-1}dt=e^{-x}\psi(1-a,1-a;x)$	不完全伽马函数 (non complete Gamma function)
58	$\gamma(a,x)=\Gamma(a)-\Gamma(a,x)=\int_0^x e^{-t}t^{a-1}dt$ $=\frac{x^a}{a}{}_1F_1(a;a+1;-x),\quad \mathrm{Re}a>0$	
59	$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]=-\psi(1)$ $=-\Gamma'(1)=0.5772156649\cdots$	欧拉常数
60	$\lambda^\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^\nu},\quad \lvert z\rvert<1$ $\lambda^\nu(z)=\frac{z}{\Gamma(\nu)2^\nu}\int_0^\infty\frac{t^{\nu-1}e^{t/2}}{e^t-z^2}dt$ $=L^\nu(z)-2^{-\nu}L^\nu(z^2),\quad \mathrm{Re}\nu>0$ $\lvert\arg(1-z^2)\rvert<\pi,\quad \lambda^1(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$	阶为ν的多项对数函数 (multilogarithm of order ν)
61	$[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,$ $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$	取整函数

续表

	函　数　记　号	名　称
62	$(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$，$k = 1,2,\cdots$ $(a)_0 = 1$，$(1)_k = k!$ $\Gamma(a+k) = (a)_k\Gamma(a)$	Pochammer 符号阶乘函数(Pochammer symbol factorial function)

中文—外文索引

A

阿达马不等式/Hadamard inequality　定理 8.5.7
阿尔采拉-阿斯可里定理/Arzela-Ascoli theorem　定理 3.3.46
阿基米德性质/Archimedian property　定理 1.5.6
埃尔米特多项式/Hermite Polynomial　定义 9.7.1
奥斯特洛夫斯基不等式/Ostrowshi inequality　定理 8.5.20

B

巴拿赫不动点定理/Banach theorem for fixed point　定理 3.3.48
巴拿赫代数/Banach algebra　定义 4.10.1
巴拿赫空间/Banach space　定义 3.4.11
本性点/essential point　定义 5.3.13
本质有界函数/essentially bounded function　定义 2.7.12
本征值/eigenvalue　4.8.1
本征空间/eigenspace　4.8.1
本征值的重数/multiplicity of a eigenvalue　4.8.1
本质边界条件/essential boundary condition　例 6.4.9
半范数/semi-norm　定义 3.4.4
边界/boundary　定义 3.3.12
边界点/boundary point　定义 3.3.12
边界层/boundary layer　11.4
闭集/closed set　定义 1.5.8，定义 3.3.13，定义 3.6.10
闭包/closure　定义 3.3.19、定义 3.6.10

闭映射/closed mapping　**定理 3.3.43**
闭凸包/closed convex hull　**定义 4.2.7**
闭算子/closed operator　**定义 4.5.6**
闭扩张/closed extension　**定义 4.6.25**
闭图象定理/closed graph theorem　**定理 4.5.8**
并集/union　**定义 1.1.6**
伴随空间/adjoint space　**定义 4.4.1**
伴随算子/adjoint operator　**定义 4.6.18**
伴随/adjoint　**定义 4.10.5**
伴随勒让德方程/adjoint Legendre equation　**9.6.4**
伴随勒让德函数/adjoint Legendre function　**定义 9.6.5**
贝尔曼不等式/Bellman inequality　**定理 6.8.2**
贝塞尔不等式/Bessel inequality　**定理 3.5.27**
贝塞尔函数的正交性/orthogonality of Bessel functions
贝塞尔函数/Bessel function　**表 10.15**
比哈里不等式/Bihari inequality　**定理 8.6.4**
变分/variation　**6.2.1**
变分方程/variation equation　**定理 6.4.7**
变形参数法/method of strained parameter　**11.3.1**
变形坐标法/method of strained coordinates　**11.3.2**
变形的贝塞尔函数/modified Bessel function　**定义 9.4.7**
标准正交多项式集/orthonormal polynomial set　**定义 9.5.7**
不完全 Γ 函数/incomplete Gamma function　**表 10.14**
不动点/fixed point　**定理 3.3.48**
布尼雅可夫斯基-施瓦兹不等式/Bunyakovski-Schwarz inequality
定理 8.2.12
布拉施凯不等式/Blaschke inequality　**定理 8.6.29**
泊松积分/Poisson integral　**定理 9.4.2**

波尔查诺 魏尔斯特拉斯定理/Bolzano Weierstrass theorem
定理 1.5.15
伯恩斯坦多项式/Bernstein polynomial **定理 2.7.7**
伯格斯曲隆不等式/Bergstrom inequality **定理 8.5.10**

C

仓恩引理/Zorn lemma **引理 1.4.4**
策墨洛选取公理/Zermelo axiom of choice **公理 1.4.5**
超越数/transcendental number **定理 1.3.13**
超平面/hyperplane **定义 4.4.17**
超几何函数/hypergeometric function **定义 9.3.1,表 10.18**
超几何级数/hypergeometric series **定义 9.3.1**
超几何微分方程/hypergeometric differential equation
性质 9.3.6
常值映射/constant mapping **定义 1.2.2**
乘法线性泛函/multiplication linear function **定义 4.10.23**
测度/measure **定义 2.2.4**
测度空间/measure space **定义 2.9.17**
测度的扩张/extension of measure **定理 2.9.13**
差集/difference set **定义 1.1.9**
承载空间/carrier space **定义 4.10.23**
层次分析/analysis hierarchy process **7.2.8**
成对比较/paired comparisons **7.2.8**
冲量过程/pulse process **7.2.7**
冲量稳定/pulse stable **7.2.7**
次可加性/subadditivity **定义 3.4.1,定义 4.4.2**
长期项/secular term **11.3**
稠密子集/dense subset **定义 3.3.19**

D

德摩根公式/De Morgan formula **定理 1.1.10**
对等/equipotent **定义 1.3.1**
对合运算/involution **定义 4.10.5**
对称双线性泛函/symmetric bilinear function **6.5.2**
对称算子/symmetric operator **定义 4.7.5**
对偶空间/dual space **定义 4.4.1**
对数函数/logarithmic function **表 10.10**
代数/algebra **定义 4.10.1**
代数数/algebraic number **例 1.3.9**
代数函数/algebraic function **表 10.8**
多项 对数函数/poly-logarithm function **表 10.10**
多重尺度法/method of multiple scales **11.5**
导出范数/derived norm **定理 3.5.5**
导出拓扑/derived topology **定义 3.6.6**
定义域/domain **定义 1.2.1,定义 4.3.1**
单调函数/monotone function **定义 2.5.1**
单调减少函数/monotone decreasing function **定义 2.5.1**
单调增加函数/monotone increasing function **定义 2.5.1**
单位分解/partition of unity **定义 4.8.11**
单位元/unit element **定义 4.10.1**
单位 *-表示/unital * representation **定义 4.10.7**
单层分布/single layer distribution **例 5.4.7**
度量/metric **定义 3.3.1**
度量空间/metric space **定义 3.3.3**
带符号的图/signed digraph **7.2.7**
点谱/point spectrum **定义 4.8.1**

狄拉克分布/Dirac distribution **例 5.3.3**
第一类贝塞尔函数/Bessel function of the first kind **定义 9.4.1**
第二类贝塞尔函数/Bessel function of the second kind
　定义 9.4.5
第三类贝塞尔函数/Bessel function of the third kind **定义 9.4.6**
第二类勒让德函数/Legendre function of the second kind
　定义 9.6.4
等价关系/equivalence relation **定义 1.4.6**
等价类/equivalence class **定义 1.4.8**
等距映射/isometric mapping **定义 3.3.7**
等距同构/isometric isomorphism **定义 3.3.7**
等距同构映射/isometrieally isomorphism mapping **定义 4.4.10**
等周问题/isoperimetric problem **例 6.2.8**
等周条件/isoperimetric condition **例 6.2.8**

E

二次泛函/quadratic functional **定理 6.4.3**

F

法图引理/Faton theorem **定理 2.4.11**
樊畿不等式/Ky Fan inequality **定理 8.5.19,定理 8.5.25,**
　定理 8.5.27,定理 8.5.28
赋范线性空间/normed linear space **定义 3.4.7**
赋范代数/normed algebra **定义 4.10.1**
赋范 * 代数/normed * algebra **定义 4.10.5**
赋拟范线性空间/quasi normed linear space **定义 4.2.16**
复合映射/composite mapping **定义 1.2.14**
泛函/functional **定义 4.4.1**

反三角函数/inverse trigonometric function　表 10.12
分离/separate　定义 4.4.18
分布/distribution　定义 5.3.1
分布导数/distributional derivative　定义 5.4.1
分布的支集/support set of distribution　定义 5.3.13
分布的直积/direct product of distribution　5.6.1
分布序列的弱收敛/weak convergence of a sequence of distribution　定义 5.3.16
弗雷德霍姆算子/Fredholm operator　定义 4.7.25
弗雷歇空间/Fréchet space　定义 4.2.17
弗兰克 皮克不等式/Frank-Pick inequality　定理 8.3.14
范数/norm　定义 3.4.1
傅里叶 贝塞尔级数/Fourier-Bessel series　定义 9.4.10
傅里叶变换/Fourier-transform　定义 5.7.14
傅里叶变换表/tables of Fourier transform　表 10.2
傅里叶变换的性质/the properties of Fourier transforms　10.3.2
傅里叶变换及其反演公式/Fourier transform and reciprocal formula　10.3.1
傅里叶级数/Fourier series　定义 3.5.29
傅里叶逆变换/inverse Fourier transform　定义 5.7.14
傅里叶系数集/Fourier coefficient set　定义 3.5.24
傅里叶余弦变换及其反演公式/Fourier cosine transform and reciprocal formula　定义 10.3.10
傅里叶展开式/Fourier expansion　定义 3.5.29
傅里叶卷积/Fourier convolution　定义 10.3.6
傅里叶正弦变换及其反演公式/Fourier sine transform and reciprocal formula　定义 10.3.11

G

伽马函数/Γ Function　**定义 9.2.1**
盖尔范德变换/Gelfand transform　**定义 10.10.23**
盖尔范德表示/Gelfand representation　**定义 10.10.23**
格拉姆-施密特定理/Gram-Schmidc theorem　**定理 3.5.20**
格隆沃尔不等式/Gronwall inequality　**定理 8.6.3**
广义解/generalized solution　**6.4.4**
广义函数/generalized function　**定义 5.3.1**
广义导数/generalized derivative　**定义 5.4.1**
广义拉盖尔多项式/generalized Laguerre polynomial
　　定义 9.8.1
共轭空间/conjugate space　**定义 4.4.1**
共轭算子/conjugate operator　**定义 4.6.16**
共轭双线性泛函/conjugate bilinear functional　**定义 4.7.32**
共鸣定理/resonance theorem　**定理 4.5.11**
改进的玫瑰形图/advanced rosette　**定理 7.2.13**
孤立点/isolated point　**定义 3.3.19**
规范正交集/orthonormal set　**定义 3.5.18**

H

哈代不等式/Hardy inequality　**定理 8.7.18、定理 8.7.19**
海涅-波莱尔-勒贝格定理/Heine Bore -Lebesgue theorem
　　定理 1.5.18
赫维赛德分布/Heaviside distribution　**例 5.3.4**
赫维赛德函数/Heaviside function　**例 5.3.4**
豪斯多夫空间/Hausdorff space　**定义 3.6.8**
赫尔德不等式/Hölder inequality　**8.2.3**

汉开尔变换表/tables of Hankel transforms 表 10.19
汉开尔变换及其反演公式/Hanke transform and reciprocal formula 10.6.1
汉开尔函数/Hankel function 定义 9.4.6
横截条件/transversality condition 例 6.2.6
核/kernel 定义 4.7.25
耗散算子/dissipative operator 定义 4.9.12
合流超几何函数/confluent hypergeometric function 定义 9.3.21
互反矩阵/reciprocal matrix 定义 7.2.16
互补误差函数/complementary error function 表 10.14
恒等映射/identical mapping 定义 1.2.2
恒同算子/identical operator 例 4.3.11
惠特克函数/Whittakel function 表 10.18
缓增分布/distribution of slow growth 定义 5.7.6
缓增函数/slowly growth function 定义 5.7.12

J

几乎处处/almost everywhere 定义 2.3.2
几乎处处收敛/almost everywhere convergence 定义 2.3.2
交集/intersection 定义 1.1.6
交换代数/commutative algebra 定义 4.10.1
级数/series 定义 3.4.13
极大元/maximum element 定义 1.4.3
极小元/minimum element 定义 1.4.3
极限点/limit point 定义 3.3.22、定义 3.6.10
极化恒等式/polarization identity 定理 3.5.7
极大理想/maximal ideal 定义 4.10.15

极值曲线/extremal　6.2.1
极值/extremum　6.2.1
极小化序列/minimizing sequence　6.3.2
近一致收敛/convergence almost uniform　定义 2.3.21
卷积/convolution　例 2.4.21
卷积定理/convolution theorem　定理 10.3.7
卷积型变换/convolution type transformation　10.11
绝对值/absolute value　定义 1.5.1
绝对收敛/absolutely convergence　定义 3.4.13
绝对连续函数/absolutely continuous function　定义 2.6.1
矩阵范数/matrix norm　例 3.4.3
迹/trace　定义 4.7.28
紧空间/compact space　定义 3.3.41
紧性/compactness　定理 1.5.18
紧支集/compact support　定义 3.4.15
紧线性算子/compact linear operator　定义 4.7.22
积集/product set　定义 1.1.11
积空间/product space　定义 3.3.6
积分算子/integral operator　例 4.3.13
积分变换/integral transform　定义 10.2.1
较强拓扑/stronger topology　例 3.6.4
较弱拓扑/weaker topology　例 3.6.4
基数/cardinal number　定义 1.3.5
基函数/base function　6.3.2
基本解/fundamental solution　定义 5.4.11
基本邻域系/basic neighborhoods system　定义 4.2.3
距离/distance　定义 3.3.24
距离函数/distance function　定义 3.3.1

检验函数/test function　**定义 5.2.3**
检验函数空间/space of test function　**定义 5.2.3**
渐近序列/asymptotic sequence　**定义 11.1.4**
渐近展开/asymptotic expansion　**定义 11.1.6**
集合/set　**1.1.1**
阶符/order symbol　**定义 11.1.1**
简单函数/simple function　**定义 2.3.8**
聚点/cluster point　**定义 3.3.19，定义 3.6.10**
结点/vertix　**7.2.7**
局部凸空间/locally convex space　**定义 4.2.10**
局部可积函数/locally integrable function　**定义 5.3.2**

K

卡尔逊不等式/Carlson inequality　**定理 8.6.21**
康托洛维奇法/Kantorovich method　**6.3.3**
康托洛维奇-列别捷夫变换/Kantorovich Lebegev transform
　　定义 10.11.1
柯西不等式/Cauchy inequality　**定理 3.1.6**
柯西定理/Cauchy theorem　**定理 1.5.13**
柯西-庞加莱不等式/Cauchy-Poincare inequality　**定理 8.5.26**
柯西序列/Cauchy sequence　**定义 1.5.11，定义 3.3.30**
空集/empty set　**1.1.1**
空间 s，c，l^p，l^∞/space s，c，l^p，l^∞　**定义 3.3.33**
扩充实数集/set of extended real numbers　**定义 1.5.1**
可分性/separability　**定义 2.7.9**
可分度量空间/separable metric space　**定义 3.3.39**
可分公理/axiom of separation　**定义 4.2.11**
可列集/denumerable set　**定义 1.3.7**

可加算子/additive operator　定义 4.3.1
可交换的/commutative　定义 4.3.19
可测集/measurable set　定义 2.2.6
可测函数/measurable function　定义 2.3.1
开集/open set　定义 1.5.8，定义 3.3.13，定义 3.6.1
开球/open sphere　定义 3.3.8
开覆盖/open covering　定义 1.5.16，定义 3.3.41
开映射/open mapping　定义 4.5.2
柯朗-费希尔不等式/Courant-Fischer inequality　定理 8.5.21

L

拉普拉斯变换/Laplace transform　定义 5.8.1
拉普拉斯变换表/tables of Laplace transform　表 10.3～表 10.5
拉普拉斯变换的性质/the properties of Laplace transform 10.4.3
拉普拉斯变换及其反演公式/Laplace transforms and reciprocal formula　定义 10.4.1
拉盖尔多项式/Laguerre polynomial　定义 9.8.4
拉克斯-米尔格拉姆定理/Lax Milgram theorem　定理 6.4.13
兰吉霍普不等式/Langenhop inequality　定理 8.6.5
勒贝格点/Lebesgue point　定义 2.6.4
勒贝格函数空间/Lebesgue function space　定义 2.7.1
勒贝格可积/Lebesgue integrable　定义 2.4.2
勒贝格控制收敛定理/Lebesgue dominated convergence theorem 定理 2.4.12
勒贝格-斯蒂尔切斯测度/Lebesgue-Stieltjes measure 定义 2.9.24
勒让德变换/Legendre transform　定义 10.9.1

勒让德多项式/Legendre polynomial　定义 9.6.1
勒让德方程/Legendre equation　定义 9.6.1
勒让德函数/Legendre function　表 10.17
黎曼-斯蒂尔切斯积分/Riemann Stieltjes integral　定义 2.5.13
里斯表现定理/Riesz Representation theorem　定理 4.4.16
里斯-费希尔定理/Riesz-Fisecher theorem　定理 3.5.28
离散度量空间/discrete metric space　例 3.3.4
离散拓扑/discrete topology　例 3.6.4
利普希茨条件/Lipschitz condition　例 3.3.45
里茨-伽辽金方程/Ritz-Galerkin equation　6.5.2
里茨法/Ritz method　6.3.2
理想/ideal　定义 4.10.15
列别捷夫变换/Lebegev transform　定义 10.11.3
列紧性/sequential compactness　定义 1.5.15
列紧空间/sequential compact space　定义 3.3.34
邻域/neighborhood　定义 1.5.7、定义 3.3.8、定义 3.6.9
邻域基底/base of neignborhoods　定义 4.2.3
邻接矩阵/adjacency matrix　7.2.7
邻接的函数关系/contiguous function relations　性质 9.3.6
连续点集的基数/cardinal number of continuous point set
　　定义 1.3.12
连续映射/continuous mapping　定义 3.3.26，定义 3.6.11
连续函数/continuous function　定义 3.3.26
连续线性泛函/continuous linear functional　定义 4.4.1
连续谱/continuous spectrum　定义 4.8.1
量纲分析/dimensional analysis　7.2.3
罗德里格斯公式/Rodrigues formula　定义 9.5.9
逻辑斯谛/logistic　例 7.3.1

零序列/null sequence 定义 5.2.7

M

马尔可夫链/Markov chain 7.2.6
满射/surjection 定义 1.2.1,定义 4.5.1
梅林变换表/tables of Mellin transforms 表 10.6
梅林变换的性质/the Properties of Mellin transform 10.5.2
梅林变换及其反演公式/Mellin transforms and reciprocal formula 定义 10.5.1
梅林变换与傅里叶变换的关系/relations of Mellin transform and Fourier transforms 10.5.3
梅涅尔-福克斯变换/Mehler Fox transform 定义 10.11.2
幂集/power set 定义 1.1.5
闵可夫斯基不等式/Minkowski inequality 8.2.4
闵可夫斯基泛函/Minkowski functional 定义 4.2.13

N

纳吉不等式/Sz Nagy inequality 定理 8.6.20
内点/interior point 定义 1.5.7,定义 3.3.12,定义 3.6.10
内部/interior 定义 3.3.12,定义 3.6.10
内积/inner product 定义 3.5.1
内映射/injection 定义 4.5.1
内积空间/inner product space 定义 3.5.2
内测度/inner measure 定义 2.2.4
能量法/energy method 定理 6.4.4
诺依曼函数/Neumann function 定义 9.4.5
逆象/inverse image 定义 1.2.1,定义 1.2.7
逆映射/inverse mapping 定义 1.2.5

拟范数/quasi norm 定义 4.2.16

O

欧拉常数/Euler constant 定义 9.2.3
欧拉方程/Euler equation 6.2
欧拉有限差分法/Euler finite difference method 6.3.1
欧几里得空间/Euclidean space 3.1.2

P

帕塞瓦尔等式/Parseval equality 定理 3.5.28
佩朗不等式/Perron inequality 定理 8.5.35
偏序/partial ordering 定义 1.4.1
偏序集/partial ordered set 定义 1.4.1
平庸拓扑/trivial topology 例 3.6.4
平凡理想/trivial ideal 定义 4.10.15
平衡包/balanced hull 定义 4.2.4
平衡集/balanced set 定义 4.2.4
平行四边形恒等式/parallelogram identity 定理 3.5.7
平均值不等式/mean value inequality 8.2.2
匹配法/method of match 11.4.1
谱/spectrum 定义 4.8.1
谱半径/spectrum radius 定理 4.8.5
谱族/spectral family 定义 4.8.11
普兰切瑞尔定理/Plancherel theorem 定理 10.3.8

Q

切比雪夫多项式/Chebyshev polynomial 定义 9.5.11
区间/interval 定义 1.5.1

全序/total ordering 定义 1.4.1
全序集/totally ordered set 定义 1.4.1
全序子集/totally ordered subset 定义 1.4.1
全变差/total variation 定义 2.5.6
全连续线性算子/complete continuous linear operator 定义 4.7.22
全椭圆积分/complete elliptic integral 表 10.13
齐次的/homogeneous 定义 4.3.1
奇异摄动问题/singular perturbation problem 11.1.1
球面函数/spherical function 定义 9.6.6
强收敛/strong convergence 定义 2.7.5，定义 3.4.9，定义 4.3.9
强连续算子半群/strong continuous semigroup of operator 定义 4.9.1
权向量/weight vector 7.2.8
权函数/weight function 定义 9.5.2

R

弱收敛/weak convergence 定义 4.6.1
弱*收敛/weak* convergence 定义 4.6.4
弱极限/weak limit 定义 4.6.1
弱列紧/sequential weak compact 定义 4.6.8
弱*列紧/sequential weak* compact 定义 4.6.8
弱解/weak solution 6.4.4

S

沙斯不等式/Szász inequality 定理 8.5.8
上界/upper bound 定义 1.4.3
上有界的/bounded above 定义 1.5.2

上确界/supremum　定义 1.5.3
双层分布/double-layer distribution　例 5.5.8
双映射/bijection　定义 1.2.3
双曲函数及其反函数/hyperbolic and it's inverse function　表 10.11
双曲柱函数及其反函数/hyperbolic cylinder and it's inverse function　表 10.14
生成空间/spanning space　定义 3.2.15
生成函数/generating function　定义 9.4.3
收敛/convergence　定义 3.3.22，定义 3.4.13，定义 3.6.10
施瓦茨不等式/Schwarz inequality　定理 3.5.4
时间序列/time series　7.1.3
势/potency　定义 1.3.5
实(数)直线/real line　定义 1.5.1
速降函数/rapidly decreasing function　定义 5.7.1
商集/quotient set　定义 1.4.8
商代数/quotient algebra　定义 4.10.20
随机性指标/random index　7.2.8
剩余谱/residual spectrum　定义 4.8.1
数域/number field　定义 3.2.1
数学模型/mathematical model　7.1
疏子集/nondense subset　定义 3.3.19
斯梯芬森不等式/Steffensen inequality　8.3.3
斯蒂尔切斯变换及其反演公式/Stieltjes transform and reciprocal formula　定义 10.7.1
算子乘积/multiplication of operator　定义 4.3.17
算子范数/norm of operator　定义 4.3.6
算子半群/semigroup of operator　定义 4.9.1

摄动方法/perturbation methods 11.1.1

T

跳跃/jump 定义 2.5.3
拓扑/topology 定义 3.6.1
拓扑空间/topological space 定义 3.6.3
拓扑映射/topological mapping 定义 3.6.11
拓扑性质/topological property 定义 3.6.11
图象/graph 定义 1.2.10,定义 4.5.5
投影/projection 定义 1.1.11
投影定理/projection theorem 定理 3.5.16
凸集/convex set 定义 3.4.6
凸包/convex hull 定义 4.2.7
凸泛函/convex functional 定义 4.4.2
同构/isomorphism 定义 3.2.17,定义 3.5.21
同构映射/isomorphic mapping 定义 4.4.10
同等连续/equicontinuous 定义 3.3.44
同态/homomorphism 定义 4.10.16
同态核/kernel of homomorphism 定义 4.10.16
同胚/homeomorphism 定义 3.6.11
特征函数/characteristic function 定义 1.2.16
特殊函数/special function 9.1

W

外姆普变换/Wimp transform 定义 10.11.4
外部/exterior 定义 3.3.12
外点/exterior point 定义 3.3.12
外测度/outer measure 定义 2.2.4

温德洛夫不等式/Wendroff inequality 定理 8.6.16,定理 8.6.19
温廷捷不等式/Wirtinger inequality 定理 8.4.7
魏尔斯特拉斯变换表/table of Weierstrass transforms 表 10.20
魏尔斯特拉斯变换及其反演公式/Weierstrass transforms and reciprocal formulas 定义 10.8.1
魏尔斯特拉斯定理/Weierstrass theorem 定理 3.4.19
维金生不等式/Wilkinson inequality 定理 8.5.18
无限维向量空间/infinite dimensional vector space 定义 3.2.15
无穷小生成元/infinitesimal generator 定义 4.9.2
完备性/completeness 定理 1.5.13,定理 2.7.6
完备度量空间/complete metric space 定义 3.3.32
完全集/complete set 定义 3.3.19、定义 3.5.30
完全测度/complete measure 定义 2.9.7
完全可加性/complete additivity 定理 2.2.11
误差函数/error function 表 10.14
微分算子/differential operator 定义 4.3.14,定义 5.2.1

X

吸收集/absorbing set 定义 4.2.5
希尔伯特变换/Hilbert transform 定义 10.10.1
希尔伯特不等式/Hilbert inequality 定理 8.7.9
希尔伯特空间/Hilbert space 定义 3.5.8
希尔伯特-施密特范数/Hilbert-Schmidt norm 定义 4.7.29
希尔伯特-施密特算子/Hilbert-Schmidt operator 定义 4.7.29
吸收链/absorbing chain 定义 7.2.11
象/image 定义 1.2.1,定义 1.2.7
相对列紧/relative sequentially compact 定义 3.3.34
限制/restriction 定义 1.2.11

线性运算/linear operation　定义 3.2.2
线性空间/linear space　定义 3.2.24
线性相关/linear dependence　定义 3.2.12
线性无关/linear independence　定义 3.2.12
线性算子/linear operator　定义 4.3.1
线性算子的特征值/eigenvalue of a linear operator　定义 6.5.5
线性算子的特征函数/eigenfunction of a linear operator　定义 6.5.5
线性拓扑空间/linear topological space　定义 4.2.1
形式伴随算子/formal adjoint operator　定义 5.4.9
向量空间/vector space　定义 3.2.4
向量范数/vector norm　例 3.4.2
系统辨识/system identification　7.1.3
下界/lower bound　定义 1.4.3,定义 1.5.2
下有界的/bounded below　定义 1.5.2
下确界/infimum　定义 1.5.3
下有界线性算子/bounded below linear operator　定义 6.5.6
虚功原理/principle of virtual work　定理 6.4.7

Y

雅可比多项式/Jacobi polynomial　定义 9.5.9
杨不等式/Young inequality　定理 8.2.1
预解式/resolvent　定义 4.8.1
预解算子/resolvent operator　定义 4.8.1
预解集/resolvent set　定义 4.8.1
元素/element　1.1
原象/inverse image　定义 1.2.1,定义 1.2.7
原函数/premitive function　定义 5.4.12

映射/mapping　定义 1.2.1
依范数收敛/convergence in norm　定义 3.4.9
依测度收敛/convergence in measure　定义 2.3.17
严格归纳极限/strict inductive limit　定义 4.2.22
余集(补集)/complementary set　定义 1.1.9
余核/cokernel　定义 4.7.25
余弦积分/cosine integral　表 10.14
酉空间/unitary space　定义 3.1.12
酉算子/unitary operator　定义 4.7.1
延拓(扩张)/extension　定义 1.2.11,定义 4.6.25
压缩映射/contraction mapping　定义 3.3.47
压缩半群/semigroup of contraction　定义 4.9.10
有限集/finite set　1.1.1
有界集/bounded set　定义 1.5.2,定义 4.2.9
有限开覆盖/finite open covering　定义 1.5.16,定义 3.3.41
有限维向量空间/finite dimensional vector space　定义 3.2.15
有界收敛定理/bounded covergence theorem　定理 2.4.13
有界可测函数空间/bounded measurable function space
　　定义 2.7.12
有界线性算子/bounded linear operator　定义 4.3.6
有界线性算子空间/space of bounded linear operator
　　定义 4.3.6
有界可逆算子/bounded invertible operator　定义 4.3.21
有界变差函数/bounded variation function　定义 2.5.6
有向图/directed graph　7.2.7
有向弧/directed arc　7.2.7
右逆/right inverse　定义 4.10.2
右理想/right ideal　定义 4.10.15

约当分解/Jordan decomposition **定理 2.5.10**
一一对应/one to one correspondence **定义 1.2.3**
一对一的映射/injection **定义 1.2.3**
一致有界/uniform boundedness **定义 3.3.44**
一致连续映射/uniformly continuous mapping **定理 3.3.43**
一致收敛/uniformly covergence **定义 4.3.7**
一致有界原理/uniform boundedness principle **定理 4.5.11**
一致连续半群/uniform continuous semigroup **定义 4.9.1**
一致性比/consistency ratio **7.2.8**
一致性指标/consistency index **7.2.8**
一致性矩阵/consistency matrix **定义 7.2.16**

Z

子集/subset **定义 1.1.4**
子覆盖/subcovering **定义 1.5.6,定义 3.3.41**
子空间/subspace **定义 3.2.6,定义 3.3.5,定义 3.6.10**
子代数/subalgebra **定义 4.10.1**
支集/support **定义 2.8.8,定义 3.4.15,定义 5.2.2**
正交/orthogonal **定义 3.5.11**
正交集/orthogonal set **定义 3.5.18**
正交补/orthogonal complement **定义 3.5.11**
正交和/orthogonal sum **定义 3.5.14**
正交投影/orthogonal projection **定义 3.5.15**
正交多项式/orthogonal polynomial **9.5**
正交多项式集/orthogonal polynomial set **定义 9.5.2**
正则元/regular element **定义 4.10.2**
正则链/regular chain **定义 7.2.10**
正则分布/regular distribution **定义 5.3.2**

正则摄动问题/regular pertubation problem 11. 1. 1
正规元/normal element **定义 4. 10. 5**
正规算子/normal operator **定义 4. 7. 3**
正定算子/positive definite operator **定义 6. 4. 11**
正算子/positive operator **定义 4. 7. 12**
正定双线性泛函/positive definite bilinear functional
  定义 6. 4. 10
正弦积分/sine integral **表 10. 14**
左逆/left inverse **定义 4. 10. 2**
左理想/left ideal **定义 4. 10. 15**
自反巴拿赫空间/reflexive Banach space **定义 4. 6. 10**
自然边界条件/natural boundary condition **6. 2. 5**
自然映射/natural mapping **定义 4. 6. 10**
自伴元/self adjoint element **定义 4. 10. 5**
自伴算子/self adjoint operator **定义 4. 7. 5**
自伴微分算子/self-adjoint differential operator **定义 5. 4. 9**
坐标函数/coordinate function **6. 3. 2**
直和/direct sum **定义 3. 2. 8**
直径/diameter **定义 3. 3. 24**
指数积分/exponential integral **表 10. 14**
指数函数/exponential function **表 10. 9**
指标型变换/transformations with respect to an index **10. 11**
重正化方法/method of renormalization **11. 3. 3**
真子集/proper subset **定义 1. 1. 4**
真理想/proper ideal **定义 4. 10. 15**
值域/range **定义 1. 2. 1, 定义 4. 3. 1**
值稳定/value stable **7. 2. 7**

最大值/maximum　**定义 1.5.2**
最小值/minimum　**定义 1.5.2**
最小闭扩张/minimal closed extension　**定义 4.6.25**

外文一中文索引

A

absolute value/绝对值 **定义 1.5.1**
absolutely convergence/绝对收敛 **定义 3.4.13**
absolutely continuous function/绝对连续函数 **定义 2.6.1**
absorbing chain/吸收链 **定义 7.2.11**
absorbing set/吸收集 **定义 4.2.5**
additive operator/可加算子 **定义 4.3.1**
adjacency matrix/邻接矩阵 **7.2.7**
adjoint/伴随 **定义 4.10.5**
adjoint Legendre equation/伴随勒让德方程 **9.6.4**
adjoint Legendre function/伴随勒让德函数 **定义 9.6.5**
adjoint operator/伴随算子 **定义 4.6.18**
adjoint space/伴随空间 **定义 4.4.1**
advanced rosette/改进的玫瑰形图 **定理 7.2.13**
algebra/代数 **定义 4.10.1**
algebra function/代数函数 **表 10.8**
algebra number/代数数 **例 1.3.8**
almost everywhere(a.e)/几乎处处 **定义 2.3.2**
almost everywhere convergence/几乎处处收敛 **定义 2.3.2**
analytic hierarchy process/层次分析 **7.2.8**
Archimedian property/阿基米德性质 **定理 1.5.6**
Arzela-Ascoli theorem/阿尔采拉-阿斯可里定理 **定理 3.3.46**
asymptotic expansion/渐近展开 **定义 11.1.6**

asymptotic sequence/渐近序列　定义 11. 1. 4
axiom of separation/可分公理　定义 4. 2. 11

B

B* algebra/B*-代数　定义 4. 10. 5
B function/贝塔函数　定义 9. 2. 6
balanced hull/平衡包　定义 4. 2. 4
balanced set/平衡集　定义 4. 2. 4
Banach algebra/巴拿赫代数　定义 4. 10. 1
Banach space/巴拿赫空间　定义 3. 4. 11
Banach theorem for fixed point/巴拿赫不动点定理　定理 3. 4. 48
base function/基函数　6. 3. 2
base of neighborhoods/邻域基底　定义 4. 2. 3
basic neighborhoods system/基本邻域系　定义 4. 2. 3
Bellman inequality/贝尔曼不等式　定理 8. 6. 2
Bergstrom inequality/伯格斯曲隆不等式　定理 8. 5. 10
Bernstein polynomial/伯恩斯坦多项式　定理 2. 7. 7
Bessel function/贝塞尔函数　表 10. 15
Bessel function of the first kind/第一类贝塞尔函数　定义 9. 4. 1
Bessel function of the second kind/第二类贝塞尔函数
　　定义 9. 4. 5
Bessel function of the third kind/第三类贝塞尔函数　定义 9. 4. 6
Bessel inequality/贝塞尔不等式　定理 3. 5. 27
Bihari inequality/比哈里不等式　定理 8. 6. 4
bijective/双映射　定义 1. 2. 3
Blaschke inequality/布拉施凯不等式　定理 8. 6. 29
Bolzano-Weierstrass theorem/波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理
　　定理 1. 5. 15

bounded above/上有界的　定义 1.5.2
bounded below/下有界的　定义 1.5.2
bounded below linear operator/下有界线性算子　定义 6.5.6
bounded convergence theorem/有界收敛定理　定理 2.4.13
bounded invertible operator/有界可逆算子　定义 4.3.21
bounded linear operator/有界线性算子　定义 4.3.6
bounded measurable function space/有界可测函数空间
定义 2.7.12
bounded set/有界集　定义 1.5.2，定义 4.2.9
bounded variation function/有界变差函数　定义 2.5.6
boundary/边界　定义 3.3.12
boundary layer/边界层　11.4
boundary point/边界点　定义 3.3.12
Bunyakovski Schwarz inequality/布尼雅可夫斯基 施瓦兹不等式
定理 8.2.12

C

C^* algebra/C^* 代数　定义 4.10.5
C_0-semigroup/C_0-半群　定义 4.9.1
cardinal number/基数　定义 1.3.5
cardinal number of continuous point set/连续点集的基数
定义 1.3.12
Carlson inequality/卡尔逊不等式　定理 8.6.21
carrier space/承载空间　定义 4.10.23
Cauchy inequality/柯西不等式　定理 3.1.6
Cauchy Poincare inequality/柯西-庞加莱不等式　定理 8.5.26
Cauchy sequence/柯西序列　定义 1.5.11，定义 3.3.30
Cauchy theorem/柯西定理　定理 1.5.13

characteristic function/特征函数　定义 1.2.16
chebyshev polynomial/切比雪夫多项式　定义 9.5.11
closed convex hull/闭凸包　定义 4.2.7
closed extension/闭扩张　定义 4.6.25
closed graph theorem/闭图象定理　定理 4.5.8
closed mapping/闭映射　定理 3.3.43
closed operator/闭算子　定义 4.5.6
closed set/闭集　定义 1.5.8,定义 3.3.13,定义 3.6.10
closure/闭包　定义 3.3.19,定义 3.6.10
cluster point/聚点　定义 3.3.19,定义 3.6.10
cokernel/余核　定义 4.7.25
commutative/可交换的　定义 4.3.19
commutative algebra/交换代数　定义 4.10.1
compact linear operator/紧线性算子　定义 4.7.22
compact space/紧空间　定义 3.3.41
compact support/紧支集　定义 3.4.15
compactness/紧性　定理 1.5.8
complementary error function/互补误差函数　表 10.14
complementary set/余集(补集)　定义 1.1.19
complete additivity/完全可加性　定理 2.2.11
complete continuous linear operator/全连续线性算子
　　定义 4.7.22
complete elliptic integral/全椭圆积分　表 10.13
complete measure/完全测度　定义 2.9.7
complete metric space/完备度量空间　定义 3.3.22
complete set/完全集　定义 3.3.19,定义 3.5.30
completeness/完备性　定理 1.5.13,定理 2.7.6
composite mapping/复合映射　定义 1.2.14

confluent hypergeometric function/合流超几何函数
定义 9.3.21
conjugate bilinear functional/共轭双线性泛函 **定义 4.7.32**
conjugate operator/共轭算子 **定义 4.6.16**
conjugate space/共轭空间 **定义 4.4.1**
consistency index/一致性指标 **7.2.8**
consistency matrix/一致性矩阵 **定义 7.2.16**
consistency ratio/一致性比 **7.2.8**
constant mapping/常值映射 **定义 1.2.2**
contiguous function relations/邻接函数关系 **性质 9.3.6**
continuous function/连续函数 **定义 3.3.26**
continuous linear functional/连续线性泛函 **定义 4.4.1**
continuous mapping/连续映射 **定义 3.3.26,定义 3.6.11**
continuous spectrum/连续谱 **定义 4.8.1**
contraction mapping/压缩映射 **定义 3.3.47**
convergence/收敛 **定义 3.3.22,定义 3.4.13,定义 3.6.10**
convergence almost uniform/近一致收敛 **定义 2.3.21**
convergence in measure/依测度收敛 **定义 3.2.17**
convergence in norm/依范数收敛 **定义 3.4.9**
convex functional/凸泛函 **定义 4.4.2**
convex hull/凸包 **定义 4.2.7**
convex set/凸集 **定义 3.4.6**
convolution/卷积 **例 2.4.21**
convolution theorem/卷积定理 **定理 10.3.7**
convolution type transformation/卷积型变换 **10.11**
coordinate function/坐标函数 **6.3.2**
cosine integral/余弦积分 **表 10.14**
Courant-Fischer inequality/柯朗-费希尔不等式 **定理 8.5.21**

D

De Morgan/德摩根公式　**定理 1.1.10**
dense subset/稠密子集　**定义 3.3.19**
denumerable set/可列集(可数集)　**定义 1.3.7**
derived norm/导出范数　**定理 3.5.5**
derived topology/导出拓扑　**定义 3.6.6**
differential operator/微分算子　**定义 4.3.14，定义 5.2.1**
diameter/直径　**定义 3.3.24**
difference set/差集　**定义 1.1.9**
dimensional analysis/量纲分析　**7.2.3**
Dirac distribution/狄拉克分布　**例 5.3.3**
direct product of distribution/分布的直积　**定义 5.6.1**
direct sum/直和　**定义 3.2.8**
directed arc/有向弧　**7.2.7**
directed graph/有向图　**7.2.7**
discrete metric space/离散度量空间　**例 3.3.4**
discrete topology/离散拓扑　**例 3.6.4**
dissipative operator/耗散算子　**定义 4.9.12**
distance/距离　**定义 3.3.24**
distance function/距离函数　**定义 3.3.1**
distribution/分布　**定义 5.3.1**
distribution of order k/k 阶分布　**定义 5.4.8**
distribution of slow growth/缓增分布　**定义 5.7.6**
distributional derivative/分布导数　**定义 5.4.1**
domain/定义域　**定义 1.2.1，定义 4.3.1**
double-layer distribution/双层分布　**例 5.5.8**
dual space/对偶空间　**定义 4.4.1**

E

eigenfunction of a linear operator/线性算子的特征函数 定义 6.5.5
eigenspace/本征空间(特征空间) 4.8.1
eigenvalue/本征值(特征值) 4.8.1
eigenvalue of a linear operator/线性算子的特征值 定义 6.5.5
element/元素 1.1
empty set/空集 1.1.1
energy method/能量法 定理 6.4.4
equicontinuous/同等连续 定义 3.3.44
equipotent/对等 定义 1.3.1
equivalence class/等价类 定义 1.4.8
equivalence relation/等价关系 定义 1.4.6
error function/误差函数 表 10.14
essential boundary condition/本质边界条件 例 6.4.9
essential point/本性点 定义 5.3.13
essentially bounded function/本质有界函数 定义 2.7.12
Euclidean space/欧几里得空间 3.1.2
Euler constant/欧拉常数 定义 9.2.3
Euler equation/欧拉方程 6.2
Euler finite difference method/欧拉有限差分法 6.3.1
existential conditions for Fourier transforms and reciprocal formulas/傅里叶变换及其反演公式的存在条件 10.3.3
existential conditions for Laplace transforms and reciprocal formulas/拉普拉斯变换及其反演公式的存在条件 10.4.4
exponential function/指数函数 表 10.9
exponential integral/指数积分 表 10.14

extension/扩张(延拓) **定义 1.2.11、定义 4.6.25**
extension of measure/测度的扩张 **定理 2.9.13**
exterior/外部 **定义 3.3.12**
exterior point/外点 **定义 3.3.12**
extremal/极值曲线 **6.2.1**
extremum/极值 **6.2.1**

F

Fatou theorem/法图引理 **定理 2.4.11**
finite open covering/有限开覆盖 **定义 1.5.16、定义 3.3.41**
finite dimensional vector space/有限维向量空间 **定义 3.2.15**
finite set/有限集 **1.1.1**
fixed point/不动点 **定理 3.3.48**
formal adjoint operator/形式伴随算子 **定义 5.4.9**
Fourier Bessel series/傅里叶 贝塞尔级数 **定义 9.4.10**
Fourier coefficient set/傅里叶系数集 **定义 3.5.24**
Fourier convolution/傅里叶卷积 **定义 10.3.6**
Fourier cosine transform and reciprocal formula/傅里叶余弦变换及其反演公式 **定义 10.3.10**
Fourier expansion/傅里叶展开式 **定义 3.5.29**
Fourier series/傅里叶级数 **定义 3.5.29**
Fourier sine transform and reciprocal formula/傅里叶正弦变换及其反演公式 **定义 10.3.11**
Fourier transform/傅里叶变换 **定义 5.7.14**
Fourier transform and reciprocal formula/傅里叶变换及其反演公式 **10.3.1**
Frank Pick inequality/弗兰克 皮克不等式 **定理 8.3.14**
Frechet space/弗雷歇空间 **定义 4.2.17**

Fredholm operator/弗雷德霍姆算子　**定义 4.7.25**
functional/泛函　**定义 4.4.1**
fundamental solution/基本解　**定义 5.4.11**
F_σ set /F_σ 型集　**例 2.2.17**

G

Gelfand representation/盖尔范德表示　**定义 10.10.23**
Gelfand transform/盖尔范德变换　**定义 10.10.23**
generalized derivative/广义导数　**定义 5.4.1**
generalized function/广义函数　**定义 5.3.1**
generalized Hankel transform/汉开尔变换的推广　**10.6.3**
generalized Laguerre polynomial/广义拉盖尔多项式
　定义 9.8.1
generalized solution/广义解　**6.4.4**
generating function/生成函数　**定义 9.4.3**
Gram Schmidt theorem/格拉姆 施密特定理　**定理 3.5.20**
graph/图象　**定义 1.2.10,定义 4.5.5**
Gronwall inequality/格隆沃尔不等式　**定理 8.6.3**
G_δ set/G_δ 型集　**例 2.2.17**

H

H-elliptical/H-椭圆的　**定义 6.4.10**
Hankel function/汉开尔函数　**定义 9.4.6**
Hadamard inequality/阿达马不等式　**定理 8.5.7**
Hankel transform and reciprocal formula/汉开尔变换及其反演公
　式　**10.6.1**
Hardy inequality/哈代不等式　**定理 8.7.18,定理 8.7.19**
Hausdorff space/豪斯多夫空间　**定义 3.6.8**

Heaviside distribution/赫维赛德分布 **例 5.3.4**
Heaviside function/赫维赛德函数 **例 5.3.4**
Heine Borel Lebesgue theorem/海涅-波莱尔-勒贝格定理
定理 1.5.18
Hermite polynomial/埃尔米特多项式 **定义 9.7.1**
Hilbert inequality/希尔伯特不等式 **定理 8.7.9**
Hilbert Schmidt norm/希尔伯特-施密特范数 **定义 4.7.29**
Hilbert Schmidt operator/希尔伯特-施密特算子 **定义 4.7.29**
Hilbert space/希尔伯特空间 **定义 3.5.8**
Hilbert transform/希尔伯特变换 **定义 10.10.1**
Hölder inequality/赫尔德不等式 **8.2.3**
homeomorphism/同胚 **定义 3.6.11**
homogeneous/齐次的 **定义 4.3.1**
homomorphism/同态 **定义 4.10.16**
hyperbolic and it's inverse function/双曲函数及其反函数
表 10.11
hyperbolic cylinder and it's inverse function/双曲柱函数及其反
函数 **表 10.14**
hypergeometric differential equation/超几何微分方程
性质 9.3.6
hypergeometric function/超几何函数 **定义 9.3.1,表 10.18**
hypergeometric series/超几何级数 **定义 9.3.1**
hyperplan/超平面 **定义 4.4.17**

I

ideal/理想 **定义 4.10.15**
identity mapping/恒等映射 **定义 1.2.2**
identical operator/恒同算子 **例 4.3.11**

image/象　**定义 1.2.1，定义 1.2.7**
incomplete Gamma function/不完全伽马函数　**表 10.14**
index of Fredholm operator/弗雷德霍姆算子的指数
　　定义 3.2.15
infimum/下确界　**定义 1.5.3**
infinite demensional vector space/无限维向量空间　**定义 3.2.15**
infinite set/无限集　**1.1.1**
infinitesimal generator/无穷小生成元　**定义 4.9.2**
injection/一对一的映射(1-1 映射)　**定义 1.2.3**
injective mapping/单射(内射)　**定义 4.5.1**
inner product/内积　**定义 3.5.1**
inner product space/内积空间　**定义 3.5.2**
integrable in the sense of Lebesgue/勒贝格意义下可积
　　定义 2.4.2
integral operator/积分算子　**定义 4.3.13**
integral transform/积分变换　**定义 10.2.1**
inter measure/内测度　**定义 2.2.4**
interior/内部　**定义 3.3.12，定义 3.6.10**
interior point/内点　**定义 1.5.7、定义 3.3.12，定义 3.6.10**
intersection/交集　**定义 1.1.6**
interval/区间　**定义 1.5.1**
inverse image/原象(逆象)　**定义 1.2.1、定义 1.2.7**
inverse Fourier transform/傅里叶逆(反)变换　**定义 5.7.14**
inverse mapping/逆映射　**定义 1.2.5**
inverse trigonometric function/反三角函数　**表 10.12**
involution/对合运算　**定义 4.10.5**
isolated point/孤立点　**定义 3.3.19**
isometric isomorphism/等距同构　**定义 3.3.7**

isometric mapping/等距映射　**定义 3.3.7**
isometrically isomorphism mapping/等距同构映射　**定义 4.4.10**
isomorphic mapping/同构映射　**定义 4.4.10**
isomorphism/同构　**定义 3.2.17**
isoperimetric condition/等周条件　**例 6.2.8**
isoperimetric problem/等周问题　**例 6.2.8**

J

Jacobi polynomial/雅可比多项式　**定义 9.5.9**
Jordan decomposition/约当分解　**定理 2.5.10**
jump/跳跃　**定义 2.5.3**
J^{μ}_{λ}-transform/J^{μ}_{λ}-变换　**定义 10.6.2**

K

Kantorovich-Lebegev transform/康托洛维奇 列别捷夫变换
　　定义 10.11.1
Kantorovich method/康托洛维奇法　6.3.3
kernel/核　**定义 4.7.25**
kernel of a homomorphic/同态核　**定义 4.10.16**
Ky Fan inequality/樊畿不等式　**定理 8.5.19，定理 8.5.25，**
　　定理 8.5.27，定理 8.5.28

L

Laguerre polynomial/拉盖尔多项式　**定义 9.8.4**
Langenhop inequality/兰吉霍普不等式　**定理 8.6.5**
Laplace transform/拉普拉斯变换　**定义 5.8.1**
Laplace transform and reciprocal formula/拉普拉斯变换及其反
　　演公式　**定义 10.4.1**

Lax-Milgram theorem/拉克斯-米尔格拉姆定理 **定理 6.4.13**
Lebegev transform/列别捷夫变换 **定义 10.11.3**
Lebesgue dominate convergence theorem/勒贝格控制收敛定理
定理 2.4.12
Lebesgue function space/勒贝格函数空间 **定义 2.7.1**
Lebesgue integrable/勒贝格可积 **定义 2.4.2**
Lebesgue point/勒贝格点 **定义 2.6.4**
Lebesgue-Stieltjes measure/勒贝格-斯蒂尔切斯测度
定义 2.9.24
left ideal/左理想 **定义 4.10.15**
left inverse/左逆 **定义 4.10.2**
Legendre equation/勒让德方程 **定义 9.6.1**
Legendre function/勒让德函数 **表 10.17**
Legendre function of the second kind/第二类勒让德函数
定义 9.6.4
Legendre polynomial/勒让德多项式 **定义 9.6.1**
Legendre transform/勒让德变换 **定义 10.9.1**
limit point/极限点 **定义 3.3.22,定义 3.6.10**
Lindstedt Poincaré method/LP 法 **11.3**
linear dependence/线性相关 **定义 3.2.12**
linear independence/线性无关 **定义 3.2.12**
linear operation/线性运算 **定义 3.2.2**
linear operator/线性算子 **定义 4.3.1**
linear space/线性空间 **定义 3.2.4**
linear topological space/线性拓扑空间 **定义 4.2.1**
Lipschitz condition/利普希茨条件 **例 3.3.45**
locally conver space/局部凸空间 **定义 4.2.10**
locally integrable function/局部可积函数 **定义 5.3.2**

logarithm functions/对数函数 **表 10.10**
Logistic/逻辑斯谛 **例 7.3.1**
lower bound/下界 **定义 1.4.3,定义 1.5.2**

M

mapping/映射 **定义 1.2.1**
Markov chain/马尔可夫链 **7.2.6**
mathematical model/数学模型 **7.1**
matrix norm/矩阵范数 **例 3.4.2**
maximal ideal/极大理想 **定义 4.10.15**
maximum/最大值 **定义 1.5.2**
maximum element/极大元 **定义 1.4.3**
mean value inequality/平均值不等式 **8.2.2**
measurable function/可测函数 **定义 2.3.1**
measurable set/可测集 **定义 2.2.6**
measure/测度 **定义 2.2.4**
measure space/测度空间 **定义 2.9.17**
Mehler-Fox transform/梅涅尔-福克斯变换 **定义 10.11.2**
Mellin transform and reciprocal formula/梅林变换及其反演公式
  定义 10.5.1
method of match/匹配法 **11.4.1**
method of multiple scales/多重尺度法 **11.5**
method of renormalization/重正化方法 **11.3.3**
method of strained coordinates/变形坐标法 **11.3.2**
method of strained parameter/变形参数法 **11.3.1**
metric/度量 **定义 3.3.1**
metric space/度量空间 **定义 3.3.3**
minimal closed extension/最小闭扩张 **定理 4.6.25**

minimizing sequences/极小化序列 6. 3. 2
minimum/最小值 定义 1. 5. 2
minimum element/极小元 定义 1. 4. 3
Minkowski inequality/闵可夫斯基不等式 8. 2. 4
Minkowski functional/闵可夫斯基泛函 定义 4. 2. 13
modified Bessel function/变形的贝塞尔函数 定义 9. 4. 7
monotone decreasing function/单调减少函数 定义 2. 5. 1
monotone function/单调函数 定义 2. 5. 1
monotone increasing function/单调增加函数 定义 2. 5. 1
multi-index of order n/n 重指标 定义 5. 2. 1
multiplication of operators/算子乘积 定义 4. 3. 17
multiplicative linear functional/乘法线性泛函 定义 4. 10. 23
multiplicity of a eigenvalue/本征值的重数 4. 8. 1

N

natural boundary condition/自然边界条件 6. 2. 5
natural mapping/自然映射 定义 4. 6. 10
neighborhood/邻域 定义 1. 5. 7，定义 3. 3. 8，定义 3. 6. 9
Neumann function/诺依曼函数 定义 9. 4. 5
nondense subset/疏子集 定义 3. 3. 19
norm/范数 定义 3. 4. 1
norm of operator/算子范数 定义 4. 3. 6
normal element/正规元 定义 4. 10. 5
normal operator/正规算子 定义 4. 7. 3
normed algebra/赋范代数 定义 4. 10. 1
normed linear space/赋范线性空间 定义 3. 4. 7
guasi normed linear space/赋拟范线性空间 定义 4. 2. 16
null sequence/零序列 定义 5. 2. 7

number field/数域 **定义 3.2.1**

O

one to-one correspondence/一一对应 **定义 1.2.3**
open ball/开球 **定义 3.3.8**
open covering/开覆盖 **定义 1.5.16,定义 3.3.41**
open mapping/开映射 **定义 4.5.2**
open set/开集 **定义 1.5.8,定义 3.3.13,定义 3.6.1**
order symbols/阶符 **定义 11.1.1**
orthogonal/正交 **定义 3.5.11**
orthogonal complement/正交补 **定义 3.5.11**
orthogonal polynomial/正交多项式 **表 10.16**
orthogonal polynomial set/正交多项式集 **定义 9.5.2**
orthogonal projection/正交投影 **定义 3.5.15**
orthogonal set/正交集 **定义 3.5.18**
orthogonal sum/正交和 **定义 3.5.14**
orthogonality of Bessel function/贝塞尔函数的正交性
定理 9.4.9
orthonormal polynomial set/标准正交多项式集 **定义 9.5.7**
orthonormal set/规范正交集 **定义 3.5.18**
Ostrowski inequality/奥斯特洛夫斯基不等式 **定理 8.5.20**
outer measure/外测度 **定义 2.2.4**

P

p norm/p 范数 **定义 2.7.1**
paired comparisons/成对比较 **7.2.8**
parallelogram identidy/平行四边形恒等式 **定理 3.5.7**
Parseval equality/帕塞瓦尔等式 **定理 3.5.28**

partial ordering/偏序　**定义 1.4.1**
partially ordering set/偏序集　**定义 1.4.1**
partition of unity/单位分解　**定义 4.8.11**
Perron inequality/佩朗不等式　**定理 8.5.35**
perturbation methods/摄动方法　**11.1.1**
Plancherel theorem/普兰切瑞尔定理　**定理 10.3.8**
Poincaré-Lighthill method/PL 法　**11.3**
point spectrum/点谱　**定义 4.8.1**
Poisson integral/泊松积分　**定理 9.4.2**
polarization identity/极化恒等式　**定理 3.5.7**
poly-logarithm function/多项-对数函数　**表 10.10**
positive definite bilinear functional/正定双线性泛函
　　定义 6.4.10
positive definite operator/正定算子　**定义 6.4.11**
positive operator/正算子　**定义 4.7.12**
potency/势　**定义 1.3.5**
power set/幂集　**定义 1.1.5**
premitive function/原函数　**定义 5.4.12**
principle of virtual work/虚功原理　**定理 6.4.7**
product set/积集　**定义 1.1.11**
product space/积空间　**定义 3.3.6**
projection/投影　**定义 1.1.11**
projection theorem/投影定理　**定理 3.5.16**
proper ideal/真理想　**定义 4.10.15**
proper subset/真子集　**定义 1.1.4**
pulse process/冲量过程　**7.2.7**
pulse stable/冲量稳定　**7.2.7**

Q

quadratic functional/二次泛函　定理 6.4.3
quasi-norm/拟范数　定义 4.2.16
quasi normed linear space/赋拟范线性空间　定义 4.2.16
quotient algebra/商代数　定义 4.10.20
quotient set/商集　定义 1.4.8

R

random index/随机性指标　7.2.8
range/值域　定义 1.2.1,定义 4.3.1
rapidly decreasing function/速降函数　定义 5.7.1
real line/实数直线　定义 1.5.1
reciprocal matrix/互反矩阵　定义 7.2.16
reflexive Banach space/自反巴拿赫空间　定义 4.6.10
regular chain/正则链　定义 7.2.10
regular distribution/正则分布　定义 5.3.2
regular element/正则元　定义 4.10.2
regular perturbation problem/正则摄动问题　11.1.1
relations between Fourier transform, Fourier sine transform and Fourier cosine transform/傅里叶变换与傅里叶正弦变换以及傅里叶余弦变换之间的关系　性质 10.3.12
relations of Mellin transforms and Fourier transforms /梅林变换与傅里叶变换的关系　10.5.3
relative sequentially compact/相对列紧　定义 3.3.34
residual spectrum/剩余谱　定义 4.8.1
resonance theorem/共鸣定理　定理 4.5.11
restriction/限制　定义 1.2.11

resolvent/预解式 **定义 4.8.1**
resolvent operator/预解算子 **定义 4.8.1**
resolvent set/预解集 **定义 4.8.1**
Riemann Stieltjes integral/黎曼 斯蒂尔切斯积分 **定义 2.5.13**
Riesz Fischer theorem/里斯 费希尔定理 **定理 3.5.28**
Riesz representation theorem/里斯表现定理 **定理 4.4.16**
right ideal/右理想 **定义 4.10.15**
right inverse/右逆 **定义 4.10.2**
Ritz Galerkin equation/里茨 伽辽金方程 **6.5.2**
Ritz method/里茨法 **6.3.2**
Rodrigues formula/罗德里格斯公式 **定义 9.5.9**

S

saparable metric space/可分度量空间 **定义 3.3.39**
Schwarz inequality/施瓦茨不等式 **定理 3.5.4**
secular term/长期项 **11.3**
self-adjoint differential operator/自伴微分算子 **定义 5.4.9**
self adjoint element/自伴元 **定义 4.10.5**
self-adjoint operator/自伴算子 **定义 4.7.5**
semi norm/半范数 **定义 3.4.4**
semigroup of contraction/压缩半群 **定义 4.9.10**
semigroup of operator/算子半群 **定义 4.9.1**
separability/可分性 **定义 2.7.9**
separate/分离 **定义 4.4.18**
sequential weak compact/弱列紧 **定义 4.6.8**
sequential weak* compact/弱*列紧 **定义 4.6.8**
sequeutial compactness/列紧性 **定义 1.5.15**
sequentially compact space/列紧空间 **定义 3.3.34**

series/级数　**定义 3.4.13**

set/集合　**1.1.1**

set of extended real number/扩充(张)实数集　**定义 1.5.1**

signed digraph/带符号的图　**7.2.7**

simple function/简单函数　**定义 2.3.8**

sine integral/正弦积分　**表 10.14**

single layer distribution/单层分布　**例 5.5.7**

singular perturbation problem/奇异摄动问题　**11.1.1**

slowly growth function/缓增函数　**定义 5.7.6**

space of bounded linear operator/有界线性算子空间
　　定义 4.3.6

space of test function/检验函数空间　**定义 5.2.3**

space s, c, l^p, l^∞/s、c、l^p、l^∞空间　**定义 3.3.33**

spanning space/生成空间　**定义 3.2.15**

special function/特殊函数　**9.1**

spectral family/谱族　**定义 4.8.11**

spectrum/谱　**定义 4.8.1**

spectrum radius/谱半径　**定理 4.8.5**

spherical function/球面函数　**定义 9.6.6**

Steffensen inequality/斯梯芬森不等式　**8.3.3**

Stieltjes transform and reciprocal formula/斯蒂尔切斯变换及其
　　反演公式　**定义 10.7.1**

strict inductive limit/严格归纳极限　**定义 4.2.22**

strong continuous semigroup of operator/强连续算子半群
　　定义 4.9.1

strong covergence/强收敛　**定义 2.7.5,定义 3.4.9,定义 4.3.9**

stronger topology/较强拓扑　**例 3.6.4**

subadditivity/次可加性　**定义 3.4.1**

subalgebra/子代数 **定义 4.10.1**
subcovering/子覆盖 **定义 1.5.16,定义 3.3.41**
subset/子集 **定义 1.1.4**
subspace/子空间 **定义 3.2.16,定义 3.3.5,定义 3.6.10**
support of a distribution/分布的支集 **定义 5.3.13**
support set/支集 **定义 2.8.8,定义 3.4.15,定义 5.2.2**
supremum/上确界 **定义 1.5.3**
surjective mapping/满射 **定义 1.2.1,定义 4.5.1**
symmetric bilinear functional/对称双线性泛函 **6.5.2**
symmetric operator/对称算子 **定义 4.7.5**
system identification/系统辨识 **7.1.3**
Szász inequality/沙斯不等式 **定理 8.5.8**
Sz Nagy inequality/纳吉不等式 **定理 8.6.20**

T

tables of Fourier transforms/傅里叶变换表 **表 10.2**
tables of Hankel transforms/汉克尔变换表 **表 10.19**
tables of Laplace transforms/拉普拉斯变换表
表 10.3～表 10.5
tables of Mellin transforms/梅林变换表 **表 10.6**
tables of Weierstrass transforms/魏尔斯特拉斯变换表
表 10.20
test function/检验函数 **定义 5.2.3**
the existences of Mellin transform and reciprocal formula
/梅林变换及其反演公式的存在定理 **定理 10.5.4,**
定理 10.5.5
the properties of Fourier transforms/傅里叶变换的性质 **10.3.2**
the properties of Laplace transforms/拉普拉斯变换的性质

10. 4. 3
the properties of Mellin transforms/梅林变换的性质　10. 5. 2
time series/时间序列　7. 1. 3
topological mapping/拓扑映射　定义 3. 6. 11
topological property/拓扑性质　定义 3. 6. 11
topological space/拓扑空间　定义 3. 6. 3
topology/拓扑　定义 3. 6. 1
total ordering/全序　定义 1. 4. 1
total variation/全变差　定义 2. 5. 6
totally ordered set/全序集　定义 1. 4. 1
totally ordered subset/全序子集　定义 1. 4. 1
trace/迹　定义 4. 7. 28
transcendental number/超越数　定理 1. 3. 13
transformations with respect to an index/指标型变换　10. 11
transversality condition/横截条件　例 6. 2. 6
trivial ideal/平凡理想　定义 4. 10. 15
trivial topology/平庸拓扑　例 3. 6. 4

U

uniform boundness principle/一致有界原理　定理 4. 5. 11
uniform boundness/一致有界　定义 3. 3. 44
uniform continuous semigroup/一致连续半群　定义 4. 9. 1
uniformly continuous mapping/一致连续映射　定理 3. 3. 43
uniformly convergence/一致收敛　定义 4. 3. 7
union/并集　定义 1. 1. 6
unit element/单位元　定义 4. 10. 1
unital' representation/单位'表示　定义 4. 10. 7
unitary operator/酉算子　定义 4. 7. 1

unitary space/酉空间 定义 3.1.12
upper bound/上界 定义 1.4.3

V

value stable/值稳定 7.2.7
variation/变分 6.2.1
variation equation/变分方程 定理 6.4.7
vector norm/向量范数 例 3.4.2
vector space/向量空间 定义 3.2.4
vertix/结点 7.2.7

W

weak convergence/弱收敛 定义 4.6.1
weak* convergence/弱*收敛 定义 4.6.4
weak convergence of a sequence of distributions
/分布序列的弱收敛 定义 5.3.16
weak limit/弱极限 定义 4.6.1
weak solution/弱解 6.4.4
weaker topology/较弱拓扑 例 3.6.4
Weierstrass transform and reciprocal formula
/魏尔斯特拉斯变换及其反演公式 定义 10.8.1
Weierstrass theorem/魏尔斯特拉斯定理 定理 3.4.19
weight function/权函数 定义 9.5.2
weight vector/权向量 7.2.8
Wendroff inequality/温德洛夫不等式
定理 8.6.16～定理 8.6.19
Whittaker fuaction/惠特克函数 表 10.18
Wilkinson inequality/维金生不等式 定理 8.5.18

Wimp transform/外姆普变换　**定义 10.11.4**
Wirtingen inequality/温廷捷不等式　**定理 8.4.7**

Y

Young inequality/杨不等式　**定理 8.2.1**

Z

Zermel axiom of choice/策墨洛选取公理　**公理 1.4.5**
Zorn lemma/仓恩引理　**引理 1.4.4**

*

Γ function/伽马函数　**定义 9.2.1**
σ-algebra/σ-代数　**定义 2.9.16**
σ-finite measure/σ-有限测度　**定义 2.9.8**
σ ring/σ 环　**定义 2.9.1**
μ^* measurable/μ^* 可测的　**定义 2.9.12**
* homomorphism/* 同态　**定义 4.10.7**
∞ norm/∞ 范数　**定义 2.7.12**
δ sequence/δ 序列　**定义 5.3.18**

外国人名表

Archimedes 阿基米德
Arzela 阿尔采拉
Ascoli, G. 阿斯科利
Banach, S. 巴拿赫
Bellman, R. 贝尔曼
Bergstrom, H. 伯格斯曲隆
Bernoulli 伯努利
Bernstein, S. (Бернштейн, С. Н.) 伯恩斯坦
Berwald, L. 伯瓦德
Bessel, F. W. 贝塞尔
Bihari, I. 比哈里
Birkhoff, G. 伯克霍夫
Blaschke, W. J. E. 布拉施凯
Bleistein, N. 布莱施坦
Bolzano, B. 波尔查诺
Borel, E. 波莱尔
Bunyakovski (Буняковский, В. Я.) 布尼雅可夫斯基
Cantor, G. 康托
Caplygin, S. A. (Чаплыгин, С. А.) 恰普利金
Carleman, T. 卡莱曼
Carlson, B. G. 卡尔逊
Cauchy, A. L. 柯西
Chebyshev (Чебышев, П. Л.) 切比雪夫

Christoffel, E.B.　克利斯多夫
Collatz, L.　柯拉兹
Courant, R.　柯朗
Darboux, G.　达布
De Morgan, A.　德摩根
Descartes, R.　笛卡儿
Dirac, P.A.M.　狄拉克
Dirichlet, P.G.L.　狄里克雷
Dixon, A.L.　狄克逊
Egorov, D.F.(Егоров, Д.Ф.)　叶果洛夫
Euclid　欧几里得
Euler, L.　欧拉
Fatou, P.J.L.　法图
Favard, J.A.　法瓦尔
Faxén　法申
Fischer, E.　费希尔
Fourier, J.B.J.　傅里叶
Fox, R.H.　福克斯
Frank, P.　弗兰克
Frechet, M.R.　弗雷歇
Fredholm, I.　弗雷德霍姆
Fresnel　菲涅耳
Fubini, G.　富比尼
Galerkin (Галёркин, Б.Г.)　伽辽金
Gauss, C.F.　高斯
Gegenbauer　盖根鲍尔
Gelfand, I.(Гельфанд, И.)　盖尔范德
Gersgorin, S.　格尔施戈林

Gram, J.P. 格拉姆

Green, G. 格林

Gronwall, T.H. 格隆沃尔

Hadamard, J. 阿达马

Hahn, H. 汉恩

Hankel, H. 汉开尔

Hardy, G.H. 哈代

Hausdorff, F. 豪斯多夫

Heaviside, O. 赫维赛德

Heine, H.E. 海涅

Hermite, C. 埃尔米特

Hilbert, D. 希尔伯特

Hölder, O. 赫尔德

Jacobi, C.G.J. 雅可比

Jordan, C. 约当

Kantorovich (Канторович, Л.В.) 康托洛维奇

Kelvin 开尔文

Kirchhoff, G.R. 基尔霍夫

Kummer, E.E. 库默尔

Ky Fan 樊畿

Lagrange, J.L. 拉格朗日

Laguerre, E.N. 拉盖尔

Langenhop, C.E. 兰吉霍普

Laplace, P.S. 拉普拉斯

Laurent, P.A. 罗朗

Lax, P.D. 拉克斯

Lebegev (Лебедев) 列别捷夫

Lebesgue, H.L. 勒贝格

Legendre, A.M. 勒让德
L'Hospital, G.F.A. 洛必达
Liouville, J. 刘维尔
Lipschitz, R. 利普希茨
Lumer, G. 鲁默
Macdonald, I.G. 麦克朵纳德
Maclaurin, C. 马克劳林
Maitland, 麦特朗
Malthus, T.R. 马尔萨斯
Markov (Марков, А. А.) 马尔可夫
Mehler, F.G. 梅涅尔
Meijer 迈耶尔
Mellin, R.H. 梅林
Milgram, A.N. 米尔格拉姆
Minkowski, H. 闵可夫斯基
Narain 纳尔仑
Neumann, B.H. 诺依曼
Newton, I. 牛顿
Olevski 奥列夫斯基
Olver, F.W.J. 奥尔弗
Ostrowski, A. (Островский, А.) 奥斯特洛夫斯基
Parseval, M.A. 帕塞瓦尔
Peixoto, M. 皮克苏托
Perron, O. 佩朗
Phillips, R.S. 菲利普斯
Pick, G. 皮克
Poincaré, H. 庞加莱
Poisson, S.D. 泊松

Plancherel, M. 普兰切瑞尔
Rayleigh, J. W. S. 瑞利
Riemann, G. F. B. 黎曼
Riesz, F. 里斯
Ritz, W. 里茨
Rodrigues 罗德里格斯
Saalschütz, L. 萨耳许茨
Schmidt, E. 施密特
Schwartz, H. A. 施瓦兹
Shapley, L. S. 沙普利
Sobolev, S. L. (Соболев, С. Л.) 索伯列夫
Steffensen, J. F. 斯梯芬森
Stieltjes, T. J. 斯蒂尔切斯
Stirling, J. 斯特林
Struve, W. 斯特鲁夫
Sturm, C. F. 斯图姆
Szász, O. 沙斯
Sz-Nagy, B. 纳吉
Taylor, B. 泰勒
Tricomi, F. G. 特里科米
Vandermonde, A. T. 范德蒙德
Varga, R. S. 瓦伽
Volterra, V. 沃尔特拉
von Neumann, J. 冯·诺依曼
Watson, G. L. 沃森
Weber, H. 维伯尔
Weierstrass, K. 魏尔斯特拉斯
Wendroff, B. 温德洛夫

Weyl, H. 外尔
Weyl, J. 外尔
Whipple, F. J. W. 惠普尔
Whittaker, E. T. 惠特克
Wilkinson, J. H. 维金生
Wimp 外姆普
Wirtinger, W. 温廷捷
Wright, E. M. 来特
Wronski, J. H. 沃隆斯基
Yosida, K. 吉田耕作
Young, W. H. 杨
Zermelo, E. F. F. 策墨洛
Zorn, M. 仓恩